# IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE

15.6.2000

1. Funkcija $f$ zadošča pogojem: $f(0) = f_0$, $f(x_1) = f_1$ in $f(1) = f_2$, $0 < x_1 < 1$. Na osnovi teh podatkov iščemo interpolacijski polinom $p(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, ki interpolira $f$ v točkah 0, $x_1$ in 1. Polinom $p$ določimo tako, da rešimo sistem linearnih enačb

$$p(0) = f_0, \quad p(x_1) = f_1, \quad p(1) = f_1.$$

   (a) Poišči interpolacijski polinom na omenjeni način v primeru, ko je $x_1 = 1/3$, $f_0 = 0$, $f_1 = 2/9$ in $f_2 = 0$.

   (b) Kakšna je občutljivost matrike sistema linearnih enačb iz točke (a) v maksimum normi?
   Spomni se, da je občutljivost matrike $A$ v maksimum normi definirana kot $\mathrm{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \, \|A^{-1}\|_\infty$.

   (c) Kakšen mora biti $x_1$, da bo občutljivost matrike dobljenega linearnega sistema v maksimum normi najmanjša? Izračunaj najmanjšo občutljivost!

2. Rešujemo enačbo $f(x) = 0.1$, kjer je

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

   (a) Zapiši algoritem, ki z Newtonovo metodo računa rešitev zgornje enačbe.

   (b) S pomočjo algoritma iz točke (a) izračunaj prva dva približka, če je $x_0 = 0.2$, integral pa računaš s trapezno metodo s korakom $h = x_n$.

   (c) Prva dva približka izračunaj še tako, da integral računaš z enostavno Simpsonovo formulo.

# IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE

28. junij 2000

1. Približke za rešitev nelinearne enačbe $f(x)=0$ računamo s *Halleyejo metodo*:
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \frac{1}{2}f''(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}.$$
   (a) Napiši čim bolj ekonomičen algoritem (čim manj izračunov vrednosti funkcije in odvodov) za računanje približkov po Halleyevi metodi.
   (b) Izračunaj prva dva približka v primeru, ko je $x_0 = 2$ in $f(x) = x^3 - 2$. Kam konvergira zaporedje približkov, če je konvergentno? Koliko se $x_2$ razlikuje od rešitve enačbe?
   (c) Izračunaj prva dva približka pri enakih pogojih kot v (b) še z Newtonovo metodo in primerjaj rezultate s tistimi iz točke (b).

2. Rešujemo enačbo $y(x) = 0.1$, kjer je $y(x)$ rešitev začetnega problema
$$y'(x) = e^{-x^2}, \quad y(0) = 0.$$
   (a) Napiši algoritem, ki z Newtonovo metodo računa približke rešitve enačbe $y(x) = 0.1$.
   (b) Izračunaj prva dva približka za rešitev po Newtonovi metodi, če je $x_0 = 0.2$. Vrednost funkcije $y(x)$ računaj s trapezno metodo s korakom $h = x_n$ (glej Osnove numerične matematike, str. 143).
   (c) Izračunaj prvi približek pri enakih pogojih kot v točki (b) še tako, da vrednost funkcije $y(x)$ izračunaš z metodo Runge-Kutta 4. reda.

**Dodatek:** Primerjaj rezultate iz (b) in (c) če veš, da je točna rešitev enačbe 0.100336.

IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD

15. september 2000

1. Funkcija $f$ je predstavljena s tabelo vrednosti

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3 | 2 | 3 | $y$ |

   (a) Zapiši interpolacijski polinom, ki interpolira vrednosti funkcije v točkah 0, 1 in 2 v Newtonovi obliki.

   (b) Izračunaj vrednost polinoma iz (a) v točki $x = 3$.

   (c) Določi $y$ tako, da bo tabela predstavljala kvadratno funkcijo.

2. Numerično bi radi izračunali vrednost integrala

$$\int_0^1 e^{\sin x}\, dx.$$

   (a) Izračunaj približno vrednost s trapeznim pravilom pri koraku $h = 0.25$.

   (b) Z istim korakom izračunaj približno vrednost še s Simpsonovim pravilom.

   (c) Izračunaj absolutno in relativno napako v obeh primerih, če veš da je točna vrednost integrala 1.63187.

# IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE

6.9.2000

1. Naj bo $A$ tridiagonalna kvadratna simetrična pozitivno definitna matrika.

   (a) Zapiši ekonomičen algoritem za $LU$ razcep take matrike in preštej število potrebnih množenj in deljenj (pivotiranje ni potrebno).

   (b) Zapiši ekonomičen algoritem za razcep Choleskega take matrike in preštej število potrebnih množenj in deljenj. Korenjenje štej za štiri množenja.

   (c) Reši sistem linearnih enačb

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

   z razcepom Choleskega.

2. **Kvadratna** funkcija $f$ je podana s tabelo vrednosti

| $x$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.86 | 5.22 | 11.34 |

   (a) Sestavi tabelo deljenih diferenc.

   (b) Izračunaj $f[1, 2, 3, 4]$.

   (c) Izračunaj $f(1.41)$.

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
21. september 2000

1. Rešujemo enačbo

$$f(x) = 10\,\sin x - x\int_2^3 \frac{t}{\log t}\,dt = 0.$$

   (a) Integral v predpisu funkcije $f$ izračunaj s trapeznim pravilom s korakom $h = 0.25$.

   (b) Izračunaj $f(1)$ in $f(3)$ ter se prepričaj, da ima zgornja enačba vsaj eno rešitev na intervalu $[1, 3]$.

   (c) Zapiši ekonomičen algoritem, ki računa rešitev zgornje enačbe na intervalu $[1, 3]$ po metodi regula falsi.

   (d) Določi rešitev na omenjenem intervalu z metodo regula falsi na dve decimalni mesti natančno.

2. Rešujemo začetni problem

$$y' = 3\,\frac{y}{x} - x, \quad y(1) = 1.$$

   (a) Poišči točno rešitev začetnega problema.

   (b) Z Eulerjevo metodo izračunaj približno rešitev na intervalu $[1, 1.5]$ z dolžino koraka $h = 0.25$. Kolikšna je globalna napaka pri $x = 1.5$?

   (c) Izračunaj približno rešitev še z eno od metod Runge-Kutta drugega reda (glej Osnove numerične matematike, str. 146) in enakim korakom kot v točki (b). Kolikšna je sedaj globalna napaka pri $x = 1.5$?

   (d) *Dodatek*: Kolikšna je v obeh primerih lokalna napaka pri $x = 1.5$?

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
18. junij 2001

1. Rešujemo sistem linearnih enačb

$$\begin{bmatrix} U & A \\ 0 & L \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

kjer je $U$ zgornje trikotna matrika, $L$ spodnje trikotna matrika in $A$ poljubna matrika (vse so reda $n \times n$).

   (a) Napišite algoritem za reševanje tega sistema enačb.

   (b) Preštejte število potrebnih operacij (množenj in deljenj).

   (c) Rešite sistem v primeru, ko je

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

   ter $A = U$, $L = U^T$ in $\mathbf{b} = [12, 6, 2, 2, 5, 8]^T$.

2. Znano je, da lahko integrale oblike

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$$

učinkovito računamo po približni formuli

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),$$

kjer sta $x_1$ in $x_2$ ničli polinoma $L_2(x) = 3\,x^2/2 - 1/2$.

   (a) Določite $\alpha_1$ in $\alpha_2$ tako, da bo formula čim bolj natančna.

   (b) Ugotovite za katere polinome formula ni več točna.

   (c) S pomočjo te formule izračunajte integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

   in izračunajte kolikšna je absolutna napaka rezultata.

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
27. junij 2001

1. Tabelo podatkov

| $x$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $y$ | 1 | 2 |

želite aproksimirati po metodi najmanjših kvadratov s funkcijo oblike

$$y(x) = e^{\lambda x}.$$

   (a) Napišite funkcijo, katere minimum je potrebno poiskati.

   (b) Zapišite enačbo, ki določa optimalni $\lambda$.

   (c) Numerično izračunajte optimalni $\lambda$ z Newtonovo metodo na tri decimalna mesta. Ustrezni začetni približek določite sami.

2. Rešujete začetni problem

$$y'(x) = -20\, y(x) + 20, \quad y(0) = 1.01.$$

   (a) Rešite problem z Eulerjevo metodo na intervalu $[0, 1]$ s korakom $h = 0.25$.

   (b) Poiščite točno rešitev začetnega problema.

   (c) Kolikšna je lokalna napaka v točki $x = 1/2$ in kolikšna globalna napaka pri $x = 1$. Zakaj tako?

IZPITI IZ NUMERIČNIH METOD
jesen 2001

1. Rešujemo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ &\vdots \\ x_n + x_1 &= n, \end{aligned}$$

kjer je $n$ liho število.

a) Zapišite sistem v matrični obliki in dokažite, da je vedno rešljiv.

b) Predlagajte algoritem za reševanje tega sistema in preštejte število potrebnih operacij (množenj in deljenj). Algoritem naj bo kar se da učinkovit.

c) Rešite sistem v primeru $n = 5$.

2. Radi bi izračunali nekaj decimalk števila $\sqrt{2}$. V ta namen rešujemo enačbo $x^2 - 2 = 0$ z navadno iteracijo takole

$$x_{n+1} = x_n + c\,(x_n^2 - 2).$$

a) Izračunajte prve štiri približke, če je $c = -0.3$ in $x_0 = 1$.

b) Za katere vrednosti parametra $c$ metoda konvergira, če vzamemo $x_0$ dovolj blizu $\sqrt{2}$?

c) Določite parameter $c$, pri katerem metoda najhitreje konvergira.

3. Funkcija $f$ je predstavljena s tabelo vrednosti

| $x$ | $-1$ | $0$ | $2$ | $a$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-4$ | $-2$ | $8$ | $0$ |

a) Z metodo *regula falsi* določite realno število $a$ na dve decimalni mesti tako, da bo tabela predstavljala vrednosti funkcije, ki jih interpolira polinom $p(x) = x^3 + x - 2$.

b) Kakšen pa mora biti $a$, da bo

$$f[-1, 0, 2, a] = 0?$$

c) Naj bo $a = 1$. Določite premico, ki po metodi najmanjših kvadratov aproksimira podatke iz tabele.

4. V krajiščih intervala $[a, a+h]$ poznamo vrednosti funkcije $f$ in njenih odvodov. Izpeljati želimo integracijsko formulo oblike

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx \approx \alpha\, f(a) + \beta\, f'(a) + \gamma\, f(a+h) + \delta\, f'(a+h).$$

   a) Določite koeficiente $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ in $\delta$ tako, da bo formula čim višjega reda (namig: predpostavite lahko, da je $a = 0$).
   b) Na podlagi te formule izpeljite še sestavljeno integracijsko pravilo.
   c) S pravilom iz točke b) izračunajte integral

$$\int_0^{0.3} \sin x\, dx,$$

   pri koraku $h = 0.1$. Kolikšna je absolutna napaka rezultata?

5. Rešujete začetni problem

$$y''(x) + 3\,y'(x) - 4\,y(x) = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 5.$$

   a) Poiščite točno rešitev problema.
   b) Prevedite diferencialno enačbo na sistem dveh diferencialnih enačb prvega reda.
   c) Sistem iz točke b) rešite z Eulerjevo metodo na intevalu $[0, 1]$ s korakom $h = 0.25$. Kolikšna je globalna napaka v točki $x = 1$?

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
6. september 2001

1. Rešujemo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ &\vdots \\ x_n + x_1 &= n, \end{aligned}$$

kjer je $n$ liho število.

a) Zapišite sistem v matrični obliki in dokažite, da je vedno rešljiv.

b) Predlagajte algoritem za reševanje tega sistema in preštejte število potrebnih operacij (množenj in deljenj). Algoritem naj bo kar se da učinkovit.

c) Rešite sistem v primeru $n = 5$.

2. Radi bi izračunali nekaj decimalk števila $\sqrt{2}$. V ta namen rešujemo enačbo $x^2 - 2 = 0$ z navadno iteracijo takole

$$x_{n+1} = x_n + c\,(x_n^2 - 2).$$

a) Izračunajte prve štiri približke, če je $c = -0.3$ in $x_0 = 1$.

b) Za katere vrednosti parametra $c$ metoda konvergira, če vzamemo $x_0$ dovolj blizu $\sqrt{2}$?

c) Določite parameter $c$, pri katerem metoda najhitreje konvergira.

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
21. september 2001

1. V krajiščih intervala $[a, a+h]$ poznamo vrednosti funkcije $f$ in njenih odvodov. Izpeljati želimo integracijsko formulo oblike

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx \approx \alpha\, f(a) + \beta\, f'(a) + \gamma\, f(a+h) + \delta\, f'(a+h).$$

   a) Določite koeficiente $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ in $\delta$ tako, da bo formula čim višjega reda (namig: predpostavite lahko, da je $a = 0$).

   b) Na podlagi te formule izpeljite še sestavljeno integracijsko pravilo.

   c) S pravilom iz točke b) izračunajte integral

$$\int_0^{0.3} \sin x\, dx,$$

   pri koraku $h = 0.1$. Kolikšna je absolutna napaka rezultata?

2. Rešujete začetni problem

$$y''(x) + 3\,y'(x) - 4\,y(x) = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 5.$$

   a) Poiščite točno rešitev problema.

   b) Prevedite diferencialno enačbo na sistem dveh diferencialnih enačb prvega reda.

   c) Sistem iz točke b) rešite z Eulerjevo metodo na intevalu $[0, 1]$ s korakom $h = 0.25$. Kolikšna je globalna napaka v točki $x = 1$?

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE

14. junij 2002

1. Vemo, da za števila $x$, ki so po absolutni vrednosti dovolj majhna, približno velja
$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$
   a) Omenjeno zvezo lahko uporabimo tudi za računanje vrednosti $\arcsin y$, pri dovolj majhnem $y$. V ta namen rešujemo enačbo
$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = y.$$
      Napišite algoritem, ki računa zaporedne približke za $\arcsin y$ tako, da enačbo rešujete z Newtonovo iteracijo.
   b) Izračunajte drugi približek $x_2$ za $\arcsin 0.2$ z metodo iz točke a). Začetni približek naj bo $x_0 = 0.1$.
   c) Kolikšna je absolutna napaka rezultata iz točke b)?

2. Hermitov interpolacijski polinom tretje stopnje ima to lastnost, da interpolira vrednost funkcije in njenega odvoda v dveh izbranih točkah. Dana je naslednja tabela podatkov

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | $\alpha$ |
| $f'(x)$ | 0 | 1 |

   a) Poiščite Hermitov polinom v primeru, ko je $\alpha = 0$.
   b) Kakšen mora biti $\alpha$, da bo stopnja interpolacijskega polinoma kvečjemu 2?
   c) Ali interpolacijski polinom obstaja za vsak $\alpha$?

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
26. junij 2002

1. Za realno matriko $A_n$ reda $n \times n$ velja

$$\begin{aligned} &a_{i,n-i+1} \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ &a_{i,j} = 0, \quad j > n - i + 1. \end{aligned}$$

   Ostali elementi so poljubni.

   a) Napišite en primer take matrike $A_4$.
   b) Zapišite učinkovit algoritem za reševanje sistema $A_n \mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je $\mathbf{b}$ dani vektor dimenzije $n$. Kolikšna je časovna zahtevnost vašega postopka?
   c) Kako bi popravili algoritem iz točke b), da bi deloval tudi na sistemu $A_n^T \mathbf{x} = \mathbf{b}$?
   d) Naj bo $n = 4$. Rešite sistem $A_4 \mathbf{x} = [20, 10, 4, 1]^T$, če je

$$a_{i,j} = \max\{6 - i - j, 0\}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, 4.$$

2. Integral utežene funkcije $f(x)\sqrt{x}$ računamo približno po formuli

$$\int_a^{a+h} f(x)\sqrt{x}\, dx \approx \alpha f(a) + \beta f(a + h).$$

   a) Določite parametra $\alpha$, $\beta$ tako, da bo formula čim višjega reda. (Nasvet: lahko predpostavite, da je $a = 0$.)
   b) Napišite algoritem za računanje integrala

$$\int_a^b f(x)\sqrt{x}\, dx$$

   s sestavljenim pravilom iz točke a).

   c) Pravilo iz točke b) uporabite pri izračunu integrala

$$\int_0^{0.2} e^{-\sqrt{x}}\sqrt{x}\, dx$$

   s korakom $h = 0.1$. Kolikšna je napaka rezultata, če veste, da je

$$\int e^{-\sqrt{x}}\sqrt{x}\, dx = -2\, e^{-\sqrt{x}}(2 + 2\sqrt{x} + x) + C?$$

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
26. junij 2002

1. Za realno matriko $A_n$ reda $n \times n$ velja

$$
\begin{aligned}
&a_{i,n-i+1} \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,\\
&a_{i,j} = 0, \quad j > n - i + 1.
\end{aligned}
$$

   Ostali elementi so poljubni.

   a) Napišite en primer take matrike $A_4$.
   b) Zapišite učinkovit algoritem za reševanje sistema $A_n\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je $\mathbf{b}$ dani vektor dimenzije $n$. Kolikšna je časovna zahtevnost vašega postopka?
   c) Kako bi popravili algoritem iz točke b), da bi deloval tudi na sistemu $A_n^T\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$?
   d) Naj bo $n = 4$. Rešite sistem $A_4\,\mathbf{x} = [20, 10, 4, 1]^T$, če je

$$a_{i,j} = \max\{6 - i - j, 0\}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, 4.$$

2. Integral utežene funkcije $f(x)\sqrt{x}$ računamo približno po formuli

$$\int_a^{a+h} f(x)\sqrt{x}\,dx \approx \alpha f(a) + \beta f(a+h).$$

   a) Določite parametra $\alpha$, $\beta$ tako, da bo formula čim višjega reda. (Nasvet: lahko predpostavite, da je $a = 0$.)
   b) Napišite algoritem za računanje integrala

$$\int_a^b f(x)\sqrt{x}\,dx$$

   s sestavljenim pravilom iz točke a).

c) Pravilo iz točke b) uporabite pri izračunu integrala

$$\int_0^{0.2} e^{-\sqrt{x}}\sqrt{x}\,dx$$

s korakom $h = 0.1$. Kolikšna je napaka rezultata, če veste, da je

$$\int e^{-\sqrt{x}}\sqrt{x}\,dx = -2\,e^{-\sqrt{x}}(2 + 2\sqrt{x} + x) + C?$$

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
6. september 2002

1. V ravnini imamo dane tri različne točke $\mathbf{T}_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2$. Bezierova parabola na teh treh točkah je parametrična krivulja, definirana takole

$$\mathbf{B}_2(t) := (1-t)^2\,\mathbf{T}_0 + 2\,(1-t)\,t\,\mathbf{T}_1 + t^2\,\mathbf{T}_2, \quad t \in [0,1].$$

   Poiskati želite točko na Bezierovi krivulji, ki je najbližje točki $\mathbf{T}_1$.

   a) Zapišite kvadrat razdalje $f(t) := d^2(\mathbf{T}_1, \mathbf{T})$ med točko $\mathbf{T}_1$ in točko $\mathbf{T} = (x(t), y(t))$ na krivulji pri parametru $t$.

   b) Parameter, pri katerem je dosežena minimalna razdalja, je tista rešitev enačbe $f'(t) = 0$, ki leži na $[0,1]$. Napišite algoritem, ki z metodo bisekcije poišče to rešitev. Za prva dva približka vzemite kar krajišči intervala $[0,1]$.

   c) Zgoraj opisani problem rešite za primer $\mathbf{T}_0 = (0,0)$, $\mathbf{T}_1 = (1,1)$ in $\mathbf{T}_2 = (2,0)$. Narišite skico!

   d) Dodatek: Zakaj rešitev zgornjega problema vedno obstaja?

2. Rešujete začetni problem

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

   a) Poiščite točno rešitev problema.

   b) Problem na intervalu $[0,1]$ rešite numerično tako, da ga prevedete na sistem dveh diferencialnih enačb prvega reda in uporabite Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.25$.

   c) Kolikšna je globalna napaka v točki $x = 1$ pri metodi iz b)?

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
20. september 2002

1. Naravni logaritem števila $a = 1 + \epsilon$, kjer je $|\epsilon|$ majhno število, lahko izračunamo približno tako, da rešimo enačbo

$$\frac{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{48}}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48}} = a.$$

   a) Zgornjo enačbo preoblikujte v polinomsko.
   b) Za enačbo iz točke a) napišite algoritem, ki računa njene rešitve po Newtonovi metodi.
   c) Z metodo iz točke b) izračunajte približek za $\ln(1.1)$. Začetni približek naj bo $x_0 = 0$. Dovolj je, če izračunate še približka $x_1$ in $x_2$.
   d) Kolikšna je absolutna napaka rezultata iz c)?

2.

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
13. junij 2003

1. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalno dominantna tridiagonalna matrika (od nič različni elementi so lahko le na diagonali in na obeh stranskih obdiagonalah). Znano je, da v tem primeru Jacobijeva metoda za reševanje sistema enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konvergira za vsak začetni približek.

   a) Zapišite **učinkovit algoritem** (upoštevajte strukturo matrike in ne izvajajte nepotrebih operacij) za reševanje sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ z Jacobijevo metodo. Preštejte število potrebnih operacij (množenj in deljenj) na enem koraku metode.

   b) Izračunajte drugi približek (torej $\mathbf{x}^{(2)}$) s to metodo, če je

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = [6, 4, 22, -9]^T, \quad \mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^T.$$

   c) Kako bi spremenili algoritem iz točke a), da bi deloval za petdiagonalno matriko (elementi so lahko od nič različni le na glavni in dveh stranskih diagonalah)?

2. Tabelo podatkov

| $x_i$ | $0$ | $\pi/4$ | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|
| $y_i$ | 1.1 | 1.5 | 0.9 |

   aproksimirate s funkcijo $f(x) = A\,\sin x + B\,\cos x$ po metodi najmanjših kvadratov.

   a) Zapišite normalni sistem enačb za parametra $A$ in $B$.

   b) Izračunajte parametra $A$ in $B$.

   c) Izračunajte napako metode najmanših kvadratov, torej vsoto

$$\sum_{i=1}^{3} (f(x_i) - y_i)^2.$$

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
30. junij 2003

1. Funkcija $f$ je podana s predpisom takole

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, & -1 \leq x \leq 1 \\ (1-x)(x-2)x + 1, & 1 \leq x \leq 3 \\ -x - 2, & x \geq 3. \end{cases}$$

   a) Prepričajte se, da z metodo regula falsi gotovo poiščemo ničlo funkcije na intervalu $[-1, 5]$.
   b) Ničlo poiščite z metodo regula falsi na eno decimalno mesto natančno.
   c) Koliko korakov bisekcije je potrebnih, da ničlo poiščete na 8 mest natančno, če je začetni interval $[-1, 5]$?

2. Rešujete začetni problem

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0$$

   na intervalu $[0, 0.5]$.

   a) Prevedite problem na reševanje sistema dveh diferencialnih enačb prvega reda.
   b) Rešite sistem enačb z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.1$.
   c) Izračunajte globalno napako numerične rešitve začetnega problema v točki $x = 0.5$.

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
5. september 2003

1. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična, pozitivno definitna matrika. Denimo, da poznate zgornje trikotno matriko $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, za katero je $A = R^T R$ (razcep Choleskega).

   a) Zapišite učinkovit algoritem za reševanje sistema linearnih enačb $A^2\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ dani vektor desnih strani.

   b) Preštejte število potrebnih operacij (množenj in deljenj) iz točke a).

   c) Uporabite algoritem iz točke a) za reševanje sistema $A^4\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

   d) *Dodatek*: Koliko operacij je potrebnih za reševanje sistema $A^n\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je $n \in \mathbb{R}$?

2. Določeni integral funkcije računamo z navadno trapezno formulo, torej

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(a+h)\right) + R(f),$$

kjer je

$$R(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a, a+h].$$

   a) Ocenite, kolikšno največjo absolutno napako lahko naredite pri računanju integrala

$$\int_0^{0.1} e^{-x}\,dx,$$

   če za korak vzamete $h = 0.1$.

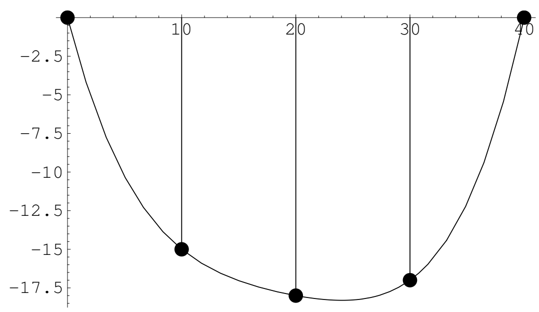
   b) Izračunajte točno absolutno napako iz točke a).

   c) Kolikšna je napaka, če integral iz točke a) računate s sestavljenim trapeznim pravilom s korakom $h = 0.025$?

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
19. september 2003

1. S čolna so izmerili globino jezera v petih točkah (glej sliko)

| $x$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | $-15$ | $-18$ | $-17$ | 0 |




a) Določite interpolacijski polinom skozi izmerjene točke, ki predstavlja približno obliko preseka skozi jezero.

b) Na podlagi izmerjenih podatkov s sestavljenim trapeznim pravilom izračunajte ploščino preseka jezera.

c) Ocenite globino jezera tako, da poiščete minimum interpolacijskega polinoma iz točke a). Metodo za izračun minimuma izberite sami.

2. Rešujete začetni problem

$$\begin{aligned} y' &= z, \quad y(0) = 1, \\ z' &= -y, \quad z(0) = 0. \end{aligned}$$

a) Poiščite točno rešitev problema. (Namig: Sistem prevedite na eno samo diferencialno enačbo drugega reda.)

b) Na intervalu $[0, 1]$ poiščite približno rešitev z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.25$.

c) Kolikšna je druga norma globalne napake rešitve iz točke b) v točki $x = 1$.

Ustni izpit bo v torek 30. 9. v pisarni Bojana Orla. Točna ura bo objavljena kasneje.

UVOD V NUMERIČNE METODE
Rešitve izpita z dne 7.2.2005

1. Določite najmanjšo stopnjo polinoma s katerim lahko interpoliramo naslednjo tabelo podatkov

$$\begin{array}{c|cccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & -5 & 1 & 1 & 1 & 7 & 25 \end{array}.$$

Prepričajte se, da ima polinom najnižje stopnje, ki interpolira zgornjo tabelo, eno samo ničlo na $[-2, 3]$. To ničlo izračunajte s tangentno metodo na dve decimalni mesti natančno.

**Rešitev**: Najlažje je, da polinom kar poiščemo, saj ga potrebujemo v drugem delu naloge. Uporabimo Newtonovo shemo

$$\begin{array}{ccccccc}
-2 & -5 & & & & & \\
 & & 6 & & & & \\
-1 & 1 & & -3 & & & \\
 & & 0 & & 1 & & \\
0 & 1 & & 0 & & 0 & \\
 & & 0 & & 1 & & 0 \\
1 & 1 & & 3 & & 0 & \\
 & & 6 & & 1 & & \\
2 & 7 & & 6 & & & \\
 & & 18 & & & & \\
3 & 25 & & & & &
\end{array}$$

in dobimo polinom

$$p(x) = -5 + 6(x+2) - 3(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1)x = x^3 - x + 1.$$

Torej tabelo lahko interpoliramo s polinomom tretje stopnje.

Ker je $p(-2) < 0$ in $p(3) > 0$, ima $p$ na $[-2, 3]$ eno ali tri ničle. Toda $p'(x) = 3x^2 - 1$, kar pomeni, da sta lokalna ekstrema lahko le v $\pm 1/\sqrt{3}$. Hitro preverimo, da je $p''(1/\sqrt{3}) > 0$ in $p(1/\sqrt{3}) > 0$, torej ima $p$ pozitivno vrednost v lokalnem minimumu. Iz tega lahko sklepamo, da je na $[-2, 3]$ ena sama ničla.

Tangentna metoda za iskanje ničle je

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n + 1}{3x_n^2 - 1} = \frac{2x_n^3 - 1}{3x_n^2 - 1}.$$

Z začetnim približkom $x_0 = -2$ po štirih korakih dobimo ničlo $-1.32$ na dve decimalni mesti natančno.

2. V naslednji tabeli so podatki hitrosti avtomobila ($v$[km/h]) v prvih dveh sekundah vožnje

| $v$ | 40 | 46 | 51 | 55 | 59 |
|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 |

S trapeznim in Simpsonovim pravilom izračunajte dolžino poti (v metrih), ki jo je prevozil avtomobil v prvih dveh sekundah. Nato z vrednostmi hitrosti ob časih $0.5s$, $1s$ in $1.5s$ čim bolje ocenite pospešek avtomobila po eni sekundi.

**Rešitev**: Korak v tabeli je očitno $h = 0.5$. S trapeznim pravilom dobimo oceno za pot

$$s = \frac{0.5}{2}(40 + 2 * 46 + 2 * 51 + 2 * 55 + 59)/3.6 = 27.9861m,$$

s Simpsonovim pa

$$s = \frac{0.5}{3}(40 + 4 * 46 + 2 * 51 + 4 * 55 + 59)/3.6 = 28.0093m$$

(fizikom menda ni treba posebej razlagati, zakaj faktor 3.6 v imenovalcu!). Pospešek najbolje ocenimo s sredinsko formulo za odvod

$$v'(t) \approx \frac{v(t+h) - v(t-h)}{2h}.$$

V našem primeru dobimo $v'(1) \approx 2.5m/s^2$.

3. Naj bo

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & x & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & x \end{pmatrix}.$$

Izračunajte determinanto matrike $A$ tako, da najprej izračunate njen $LU$ razcep in upoštevate dejstvo $\det A = \det U = \prod_{i=1}^{n+1} u_{ii}$.

**Rešitev**: Dokaj preprosto je izračunati $LU$ razcep matrike $A$, saj je potrebno izračunati kvociente v $L$ samo na spodnji obdiagonali, v $U$ pa le elemente v zadnjem stolpcu. Dobimo

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{x} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{x} & 1 \end{pmatrix}$$

in

$$U = \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & & a_0 \\ 0 & x & \cdots & & a_1 + \frac{a_0}{x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x + \frac{a_{n-1}}{x} & + \cdots + \frac{a_0}{x^n} \end{pmatrix}.$$

Torej je

$$\begin{aligned} \det A = \det U &= x^n \left( x + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n} \right) \\ &= x^{n+1} + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \end{aligned}$$

4. Nekdo je reševal diferencialno enačbo $y''(x) = -x\,y(x)$ na intervalu $[0, 0.2]$ z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.1$. Za vrednost funkcije $y(0.2)$ je dobil numerični približek 0.2, za odvod $y'(0.2)$ pa 0.999. Izračunajte vrednosti $y(0)$ in $y'(0)$?
**Rešitev**: Enačbo zapišemo kot sistem prvega reda

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -x\,y_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}.$$

Zapišimo dva koraka Eulerjeve metode

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1 &= \mathbf{Y}_0 + h\mathbf{F}(x_0, \mathbf{Y}_0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} y_2(0) \\ -0\,y_1(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1(0) + h\,y_2(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_2 &= \mathbf{Y}_1 + h\mathbf{F}(x_1, \mathbf{Y}_1) = \begin{pmatrix} y_1(0) + h\,y_2(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} \\ &+ h \begin{pmatrix} y_2(0) \\ -0.1\,(y_1(0) + h\,y_2(0)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.999 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Upoštevamo, da je $h = 0.1$ in dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} y_1(0) + 0.2\,y_2(0) &= 0.2 \\ -0.01\,y_1(0) + 0.999\,y_2(0) &= 0.999, \end{aligned}$$

katerega rešitev je $y_1(0) = 0$ in $y_2(0) = 1$.

# Rešitve drugega izpita iz UVNM, 5.5.2005

1. S tangentno metodo računate najmanjšo ničlo *Laguerreovega* polinoma $L_3$. Naj bo začetni približek $x_0 = 0$. Zapišite približek $x_2$ na 4 decimalna mesta. Laguerreovi polinomi so dani rekurzivno takole

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= 1 - x, \\ (n+1)\, L_{n+1}(x) &= (2\,n + 1 - x)\, L_n(x) - n\, L_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Določite red konvergence metode pri iskanju te ničle.
*Namig: Najprej izračunajte koeficiente polinoma $L_3$.*

**Rešitev**: Iz rekurzivne formule dobimo

$$L_3(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 9\,x^2 - 18\,x + 6).$$

Torej lahko iskanje ničle $L_3$ poenostavimo v iskanje ničle funkcije $f(x) = x^3 - 9\,x^2 + 18\,x - 6$. Tangentna metoda se tedaj glasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 9\,x_n^2 + 18\,x_n - 6}{3\,x_n^2 - 18\,x_n + 18}.$$

Če je $x_0 = 0$, dobimo $x_2 = 0.4114$.
Red konvergence je 2, saj je ničla $\alpha$ enostavna ($f$ ima tri različne ničle) in $f''(\alpha) \neq 0$.

2. *Gauss–Chebysheva* kavadraturna formula se glasi

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, f\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right) + \frac{2\,\pi}{2^{2n}(2\,n)!} f^{(2n)}(\xi),$$

kjer je $\xi \in [-1, 1]$. Določite konstanti $\alpha_1$ in $\alpha_2$ ter izračunajte numerični približek za integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

v primeru $n = 2$. S pomočjo zgoraj zapisane formule ocenite absolutno napako pri izračunu.

**Rešitev**: Konstanti $\alpha_1$ in $\alpha_2$ izračunamo tako, da za $f$ zaporedoma izberemo 1 in $x$ ter zahtevamo, da je formula točna. Dobimo sistem

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= \arcsin x|_{-1}^{1} = \pi, \\ \alpha_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha_2 \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0, \end{aligned}$$

katerega rešitev je $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$.
Numerični približek za integral je torej

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \approx \frac{\pi}{2}\left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = 3.9603.$$

Iz Gauss–Chebysheve formule dobimo oceno za absolutno napako

$$\left| \int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx - \sum_{k=1}^{2} \alpha_k\, e^{\cos\left(\frac{2k-1}{4}\pi\right)} \right| \le \frac{2\,\pi}{2^4(4)!} \max_{\xi\in[-1,1]} (e^x)^{(4)}$$
$$< \frac{2\,\pi}{2^4(4)!} e^1 = 0.0445.$$

3. Tabelo podatkov $(x_i, f_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, aproksimirate s konstanto po metodi najmanjših kvadratov. Preverite, da je konstanta enaka povprečni vrednosti števil $f_i$.

   **Rešitev**: Vzemimo za aproksimacijsko funkcijo $f(x) = c$, kjer je $c$ iskana konstanta. Minimizirati moramo funkcijo

$$E(c) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (c - f_i)^2.$$

   Ko njen odvod postavimo na 0, dobimo pogoj

$$c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i,$$

   kar je ravno povprečna vrednost.

4. Nihanje matematičnega nihala opišemo z eksaktnim

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell} \sin(\varphi(t)) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0,\ \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$$

   in poenostavljenim

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell}\varphi(t) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0,\ \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$$

   začetnim problemom. Izračunajte razliko kotnih hitrosti, ki ju dobimo z reševanjem prvega in drugega problema z Eulerjevo metodo po $0.5s$. Korak naj bo $0.25s$, $\ell = 0.1m$, $\varphi_0 = 0.5$ in $\dot{\varphi}_0 = 0s^{-1}$.

**Rešitev**: Obe diferencialni enačbi prevedemo na sistem dveh prvega reda

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Y}' &:= \mathbf{F}_1(t, \mathbf{Y}) := [\mathbf{Y}(2), -\frac{g}{\ell}\,\sin(\mathbf{Y}(1))]^T, \\
\mathbf{Y}' &:= \mathbf{F}_2(t, \mathbf{Y}) := [\mathbf{Y}(2), -\frac{g}{\ell}\,\mathbf{Y}(1)]^T,
\end{aligned}
$$

kjer je $\mathbf{Y} = [\varphi, \dot{\varphi}]^T$. Eulerjeva metoda se potem glasi

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{Y}_i + h\mathbf{F}_i(t_i, \mathbf{Y}_i).$$

Z danimi podatki iz naloge pridemo do približkov za kotno hitrost. V prvem primeru $\dot{\varphi}(0.5) \approx -0.2349$ in v drugem$\dot{\varphi}(0.5) \approx -0.2450$. Torej je absolutna vrednost razlike enaka 0.0101.

# Rešitve drugega kolokvija iz UVNM
# 31.1.2005

1. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tridiagonalna matrika. Napišite algoritem, ki v času $\mathcal{O}(n)$ izračuna $LU$ razcep matrike $A$. Utemeljite, zakaj je vaš algoritem res ustrezne časovne zahtevnosti.
   Predlagani algoritem uporabite za izračun $LU$ razcepa matrike

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   **Rešitev**: Ker je matrika tridiagonalna, lahko pri $LU$ razcepu upoštevamo njeno strukturo in ne izvajamo odvečnih operacij (množenj z ničlo). Algoritem zapišemo v Matlabovi obliki takole:

```
function [L,U]=lu3diag(A);
  n=size(A,1); %stevilo vrstic matrike A
  L=eye(n); %identiteta dim. nxn
  U=triu(A);%U=A na zacetku!
  for i=2:n
      L(i,i-1)=A(i,i-1)/U(i-1,i-1);%kvocient
      U(i,i)=U(i,i)-L(i,i-1)*U(i-1,i);%eliminacija
  end
```

   Ker je v algoritmu ena sama zanka dolžine $n-1$, znotraj nje pa na vsakem koraku konstantno mnogo operacij, je časovna zahtevnost $\mathcal{O}(n)$. Za matriko $A$ dobimo

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Tabelo podatkov

| $x_i$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | $2$ | $1$ | $0$ | $1$ | $2$ |

   zaradi očitne simetrije aproksimiramo s parabolo oblike $p(x) = \alpha\, x^2 + \beta$. Izračunajte tisti par parametrov $\alpha$ in $\beta$, pri katerem je dosežena vrednost

$$\min_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{5} (p(x_i) - y_i)^2.$$

**Rešitev**: Opazimo, da gre za klasično metodo najmanjših kvadratov, z aproksimacijsko funkcijo $p(x) = \alpha\, x^2 + \beta$. Lahko rešujemo preko normalnega sistema enačb (vemo, v praksi bi uporabili $QR$ razcep). Matrika normalnega sistema je torej $M = A^T A$, kjer je

$$A = \begin{pmatrix} x_1^2 & 1 \\ x_2^2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_5^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Torej je

$$M = \begin{pmatrix} 34 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix},$$

koeficienta $\alpha$ in $\beta$ pa rešitev sistema $M[\alpha, \beta]^T = A^T[y_1, \ldots, y_5]^T = [18, 6]^T$. Dobimo $\alpha = 0.4286$ in $\beta = 0.3429$.

3. Naj bo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 2 & -0.1 \\ x & 0.2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Naslednje probleme rešite **brez računanja** lastnih vrednosti:

a) Preverite, da matrika $A$ za $x \in (-2.8, 2.8)$ ne more imeti negativnih lastnih vrednosti.

b) Za kakšne $x \in \mathbb{R}$ gotovo nima nobene dvojne lastne vrednosti?

c) Čim bolje ocenite najmanjšo lastno vrednost v primeru, ko je $x = 0$.

*Namig: Uporabite Gershgorinov izrek.*
**Rešitev**: Po Gersgorinovem izreku je vsaka lastna vrednost matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vsebovana v uniji krogov $K_i$, kjer je

$$K_i = \{z \in \mathbb{R};\ |z - a_{ii}| \le \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

Velja še več, če je kakšen krog izoliran od ostalih, je v njem natanko ena lastna vrednost.
V našem primeru so radiji krogov $R_1 = |0.1| + |0.2| = 0.3$, $R_2 = |0.1| + |-0.1| = 0.2$ in $R_3 = |x| + |0.2|$. Če označimo s $K(s, r)$ krog s središčem v $(s, 0)$ in radijem $r$, potem so vse lastne vrednosti v uniji

krogov $K(1, 0.3)$, $K(2, 0.2)$ in $K(3, |x| + 0.2)$. Če je torej $|x| \leq 2.8$, v uniji ne more biti števil z negativno realno komponento.
Matrika zagotovo nima dvojne lastne vrednosti, če so vse tri lastne vrednosti med seboj različne. To pa je gotovo res tedaj, ko se Gersgorinovi krogi ne sekajo, torej, če je $|x| < 0.6$.
Pri izboljšanju ocene za lastne vrednosti se lahko opremo na dejstvo, da imata matriki $A$ in $X^{-1}AX$ iste lastne vrednosti. Še posebej je to dejstvo zanimivo tedaj, ko za $X$ izberemo kakšno preprosto matriko (na primer diagonalno).
Vzemimo torej $X = \mathrm{diag}(a, 1, 1)$, kjer je $a > 0$. V matriki $X^{-1}AX$ se prva vrstica množi z $1/a$, prvi stolpec pa z $a$. Torej moramo paziti, da se prvi in drugi krog ne združita (tretjemu se radij ne spremeni, saj je $a_{31} = x = 0$). Z malo razmisleka opazimo, da se prvi in drugi krog ne bosta združila, če bo

$$\frac{0.1}{a} + \frac{0.2}{a} + 0.1a + 0.1 < 1.$$

To prevedemo nakvadratno neenačbo $a^2 - 9a + 3 < 0$. Zato mora biti $a$ manjši od večjega korena kvadratne enačbe $a^2 - 9a + 3 = 0$, torej

$$a < \frac{9 + \sqrt{69}}{2} = 8.6533$$

Pri temu izbranemu $a$ je prvi radij manjši od $0.3/a = 0.0347$, torej je najmanjša lastna vrednost na intervalu $(0.9653, 1.0347)$.

4. Rešujete *Besselovo* diferencialno enačbo

$$x^2\, y''(x) + x\, y'(x) + x^2\, y(x) = 0, \quad y(0) = 1,\; y'(0) = 0.$$

Z Eulerjevo metodo in korakom $h = 0.1$ ocenite vrednost $y'(0.2)$.
*Namig:* $y''(0) = -\frac{1}{2}$.
**Rešitev**: Enačbo drugega reda prevedemo na sistem prvega

$$\mathbf{Y}' = [y', -\frac{1}{x}y' - y]^T = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}).$$

Z Eulerjevo metodo tako dobimo

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_0 + h\mathbf{F}(0, \mathbf{Y}_0) = [1, 0]^T + 0.1[0, -1/2]^T = [1, -0.05]^T$$

(tu smo upoštevali namig, da je $y''(0) = -1/2$, saj zaradi deljenja z 0 ne moremo izračunati $y''(0)$). Na drugem koraku dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_2 &= \mathbf{Y}_1 + h\mathbf{F}(0.1, \mathbf{Y}_1) \\ &= [1, -0.05]^T + 0.1[-0.05, -(1/0.1)(-0.05) - 1]^T = [0.995, -0.1]^T. \end{aligned}$$

Približek za $y'(0.2)$ je torej $-0.1$.

# UVOD V NUMERIČNE METODE
## 1. izpit, 7.2.2005

1. Določite najmanjšo stopnjo polinoma s katerim lahko interpoliramo naslednjo tabelo podatkov

$$\begin{array}{c|rrrrrr} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & -5 & 1 & 1 & 1 & 7 & 25 \end{array}.$$

   Prepričajte se, da ima polinom najnižje stopnje, ki interpolira zgornjo tabelo, eno samo ničlo na $[-2, 3]$. To ničlo izračunajte s tangentno metodo na dve decimalni mesti natančno.

2. V naslednji tabeli so podatki hitrosti avtomobila ($v$[km/h]) v prvih dveh sekundah vožnje

$$\begin{array}{c|rrrrr} v & 40 & 46 & 51 & 55 & 59 \\ \hline t & 0 & 0.5 & 1 & 1.5 & 2 \end{array}.$$

   S trapeznim in Simpsonovim pravilom izračunajte dolžino poti (v metrih), ki jo je prevozil avtomobil v prvih dveh sekundah. Nato z vrednostmi hitrosti ob časih $0.5s$, $1s$ in $1.5s$ čim bolje ocenite pospešek avtomobila po eni sekundi.

3. Naj bo

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & x & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & x \end{pmatrix}.$$

   Izračunajte determinanto matrike $A$ tako, da najprej izračunate njen $LU$ razcep in upoštevate dejstvo $\det A = \det U = \prod_{i=1}^{n+1} u_{ii}$.

4. Nekdo je reševal diferencialno enačbo $y''(x) = -x\,y(x)$ na intervalu $[0, 0.2]$ z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.1$. Za vrednost funkcije $y(0.2)$ je dobil numerični približek 0.2, za odvod $y'(0.2)$ pa 0.999. Izračunajte vrednosti $y(0)$ in $y'(0)$?

# UVOD V NUMERIČNE METODE
## 2. izpit, 5.5.2005

1. S tangentno metodo računate najmanjšo ničlo *Laguerreovega* polinoma $L_3$. Naj bo začetni približek $x_0 = 0$. Zapišite približek $x_2$ na 4 decimalna mesta. Laguerreovi polinomi so dani rekurzivno takole
$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= 1 - x, \\ (n+1)\, L_{n+1}(x) &= (2\,n + 1 - x)\, L_n(x) - n\, L_{n-1}(x). \end{aligned}$$
Določite red konvergence metode pri iskanju te ničle.
*Namig: Najprej izračunajte koeficiente polinoma $L_3$.*

2. *Gauss–Chebysheva* kavadraturna formula se glasi
$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, f\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right) + \frac{2\,\pi}{2^{2n}(2\,n)!} f^{(2n)}(\xi),$$
kjer je $\xi \in [-1, 1]$. Določite konstanti $\alpha_1$ in $\alpha_2$ ter izračunajte numerični približek za integral
$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$
v primeru $n = 2$. S pomočjo zgoraj zapisane formule ocenite absolutno napako pri izračunu.

3. Tabelo podatkov $(x_i, f_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, aproksimirate s konstanto po metodi najmanjših kvadratov. Preverite, da je konstanta enaka povprečni vrednosti števil $f_i$.

4. Nihanje matematičnega nihala opišemo z eksaktnim
$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell}\sin(\varphi(t)) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0,\ \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$$
in poenostavljenim
$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell}\varphi(t) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0,\ \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$$
začetnim problemom. Izračunajte absolutno vrednost razlike kotnih hitrosti, ki ju dobimo z reševanjem prvega in drugega problema z Eulerjevo metodo po $0.5s$. Korak naj bo $0.25s$, $\ell = 10m$, $\varphi_0 = 0.5$ in $\dot{\varphi}_0 = 0s^{-1}$. Za težni pospešek vzemite $g = 9.8m/s^2$.

# UVOD V NUMERIČNE METODE
# 3. izpit, 13.6.2005

1. Integral $I = \int_a^{a+h} f(x)\,dx$ računate z enostavnim trapeznim pravilom s korakom $h$, torej

$$I \approx T(h) := \frac{h}{2}\left(f(a) + f(a+h)\right).$$

Kako bi izračunali $h$, če poznate $T(h)$? Naj bo $a = 0$, $f(x) = \exp(-x)$ in $T(h) = 0.4016$. Koliko je v tem primeru $h$?

2. Temperatura v razgretem avtomobilu se spreminja s časom približno takole

$$T(t) = T_0 + \Delta T_0 \exp(k\,t),$$

kjer je $T(t)$ temperatura ob času $t$ v notranjosti avtomobila, $T_0$ znana konstantna zunanja temperatura, $\Delta T_0$ razlika med notranjo in zunanjo temperaturo ob začetku hlajenja (torej ob času $t = 0$) in $k$ parameter, ki opisuje hitrost hlajenja.
Zunanja temperatura je $T_0 = 30C$. Temperaturo v avtomobilu ste izmerili v minutnih intervalih in dobili naslednjo tabelo:

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | 42.9106 | 41.1123 | 39.5644 | 38.2322 | 37.0855 |

Z metodo najmanjših kvadratov določite $\Delta T_0$ in $k$ za ta primer.
*Namig: Logaritmirajte količino $T(t) - T_0$ in uporabite klasično metodo najmanjših kvadratov na logaritmiranih podatkih.*

3. Za matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ poznamo njen $LU$ razcep, torej $A = L\,U$. Zapišite **učinkovit** algoritem za reševanje sistema $A^T\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ znani vektor desnih strani sistema. Kolikšna je časovna zahtevnost algoritma? Izračunajte $\mathbf{x}$, če je

$$A = L\,U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

in $\mathbf{b} = [6, 7, 25]^T$.

4. Začetni problem

$$y^{(2005)}(x) - 2\,x\,y = 0, \quad y(1) = 1,\, y'(1) = 1,\, \ldots, y^{(2004)}(1) = 1,$$

rešujete z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.1$. Kakšen je približek za $y^{(2004)}(0.2)$.

UVOD V NUMERIČNE METODE
4. izpit, 12.9.2005

1. Delec se giblje po krivulji

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ t \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Numerično izračunajte tisto točko na krivulji, v kateri je delec najbližje točki $\mathbf{T}(0,1)$. Rezultat naj bo točen na dve decimalni mesti.

2. Integral funkcije $f$ na intervalu $[0,h]$ računate po približni formuli

$$\int_0^h f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right).$$

Določite števili $x_1$ in $x_2$ tako, da bo formula čim višjega reda. Ali ju lahko določite tako, da bo formula natančna za polinome stopnje $\leq 3$? Z izpeljano formulo numerično izračunajte

$$\int_0^{0.3} \sin\sqrt{x}\,dx.$$

3. Naj bo

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}, \quad x > 1.$$

Določite $\mathrm{cond}_\infty(A)$ in $\mathrm{cond}_1(A)$.

4. Rešujete začetni problem

$$y' = x\,y, \quad y(0) = 1.$$

Kolikšen je lahko največ korak $h > 0$, da bo absolutna napaka približka po enem koraku Eulerjeve metode manjša kot 0.1.
*Namig: Najprej izračunajte točno rešitev!*

# UVOD V NUMERIČNE METODE
## 1. kolokvij, 16.12.2004

1. Funkcijo $f(x) = \ln x$ imate tabelirano v točkah $x_0 = 10$, $x_1 = 11$ in $x_2 = 12$ (vrednosti $f(x_i)$ izračunajte sami). Ocenite vrednost $f(11.1)$ z vrednostjo kvadratnega interpolacijskega polinoma na točkah $x_i$, $i = 0, 1, 2$. Nato čim bolje ocenite napako, ki jo pri tem naredite (pri tem ne smete uporabiti točne vrednosti $f(11.1)$).

2. Izpeljite integracijsko formulo oblike

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \alpha\, f(0) + \beta\, f(1) + \gamma\, f'(0) + R(f),$$

   da bo natančna za polinome čim višje stopnje. Nato z njo ocenite integral

$$\int_0^{0.2} \sin x\, dx$$

   ter za ta primer izračunajte napako $R(f)$.

3. Ničlo funkcije $f_a(x) = x\,\ln x - a$ iščete z navadno iteracijo oblike

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a}{\ln x_n + 1}.$$

   Preverite, da je ta iteracija ravno tangentna metoda za reševanje enačbe $f_a(x) = 0$ z redom konvergence vsaj 2.
   Grafično (ali kako drugače) utemeljite, da ima $f_1$ eno samo ničlo in jo z zgornjo iteracijo določite na tri decimalna mesta natančno.

4. Naj bo $n \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ in

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Izračunajte $\|A^n\|_p$ za $p = 1, 2, \infty$.

# UVOD V NUMERIČNE METODE
## 2. kolokvij, 31.1.2005

1. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tridiagonalna matrika. Napišite algoritem, ki v času $\mathcal{O}(n)$ izračuna $LU$ razcep matrike $A$. Utemeljite, zakaj je vaš algoritem res ustrezne časovne zahtevnosti.
   Predlagani algoritem uporabite za izračun $LU$ razcepa matrike
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Tabelo podatkov

| $x_i$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | $2$ | $1$ | $0$ | $1$ | $2$ |

   zaradi očitne simetrije aproksimiramo s parabolo oblike $p(x) = \alpha\, x^2 + \beta$. Izračunajte tisti par parametrov $\alpha$ in $\beta$, pri katerem je dosežena vrednost
$$\min_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{5} (p(x_i) - y_i)^2.$$

3. Naj bo
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 2 & -0.1 \\ x & 0.2 & 3 \end{pmatrix}.$$
   Naslednje probleme rešite **brez računanja** lastnih vrednosti:
   a) Preverite, da matrika $A$ za $x \in (-2.8, 2.8)$ ne more imeti negativnih lastnih vrednosti.
   b) Za kakšne $x \in \mathbb{R}$ gotovo nima nobene dvojne lastne vrednosti?
   c) Čim bolje ocenite najmanjšo lastno vrednost v primeru, ko je $x = 0$.

   *Namig: Uporabite Gershgorinov izrek.*

4. Rešujete *Besselovo* diferencialno enačbo
$$x^2\, y''(x) + x\, y'(x) + x^2\, y(x) = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$
   Z Eulerjevo metodo in korakom $h = 0.1$ ocenite vrednost $y'(0.2)$.
   *Namig:* $y''(0) = -\frac{1}{2}$.

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
7. junij 2004

1. Naj bo $f(x) = \cos x - \alpha\, x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
   a) Določite vsa realna števila $\alpha$, za katera ima enačba $f(x) = 0$ vsaj eno rešitev na $[0, 1]$.
   b) Rešitev enačbe $f(x) = 0$ poiščite z Newtonovo metodo v primeru $\alpha = 1$. Začetni približek izberite sami, ničla naj bo izračunana vsaj na tri decimalna mesta natančno.
   c) Naj bo $|\alpha| < 1$. Poiščite vsaj en začetni približek $x_0$ pri katerem Newtonova metoda za reševanje enačbe $f(x) = 0$ odpove na **prvem** koraku.

2. Vrv pritrdimo v točkah $\mathbf{T}_1(0, 1)$ in $\mathbf{T}_2(1, 2)$ tako, da prosto visi. Koordinate nekaj točk na vrvi lahko preberemo v naslednji tabeli:

| $x$ | 0 | 0.3333 | 0.6667 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1.0000 | 1.1854 | 1.3801 | 2.0000 |

   Obliko vrvi modeliramo s funkcijo $f(x) = a\,\mathrm{ch}(x) + b$ po metodi najmanjših kvadratov.
   a) Zapišite algoritem za izračun parametrov $a$ in $b$.
   b) Izračunajte parametra $a$ in $b$ za dano tabelo z algoritmom iz točke a.
   c) Obliko vrvi iz zgornje tabele sedaj modeliramo s funkcijo

$$g(x) = c\,(e^x + e^{-x}) + d$$

   po metodi najmanjših kvadratov. Kakšna sta sedaj parametra $c$ in $d$?
   *Namig: poskusite uporabiti rezultat iz točke b.*

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
16. junij 2004

1. Znano je, da vsoto potenc naravnih števil $\sum_{i=1}^{n} i^k$ lahko izrazimo s polinomom

$$p_{k+1}(n) = c_0+c_1(n-1)+c_2(n-1)(n-2)+\cdots+c_{k+1}(n-1)\cdots(n-k-1).$$

Koeficiente polinoma $p_{k+1}$ dobimo z reševanjem sistema linearnih enačb

$$p_{k+1}(j) = \sum_{i=1}^{j} i^k, \quad j = 1, 2, \ldots, k+2,$$

torej $A\mathbf{c} = \mathbf{d}$, kjer je $A \in \mathbb{R}^{(k+2)\times(k+2)}$, $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_{k+1})^T$ in $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_{k+2})^T$.

a) Zapišite matriko sistema $A$ in desno stran $\mathbf{d}$.
b) Glede na obliko matrike $A$ predlagajte algoritem za reševanje sistema $A\mathbf{c} = \mathbf{d}$.
c) Izračunajte $p_2$ z algoritmom iz točke b.

2. Pri izpeljavi formule za računanje določenega integrala funkcije

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{5}\left(2f(a) + 3f(a+2h/3)\right)$$

smo naredili napako pri izračunu koeficientov. Formulo smo želeli izpeljati tako, da bo natančna za polinome čim višje stopnje.

a) Popravite napako v formuli.
b) Zapišite algoritem za izračun integrala s sestavljenim pravilom na podlagi popravljene formule.
c) Izračunajte napako pri računanju integrala funkcije $f(x) = \sin x$ na $[0, 0.2]$ s popravljeno formulo in korakom $h = 0.2$.

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
30. avgust 2004

1. Dana je tabela podatkov

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-5$ | $0$ | $1$ | $y_3$ | $y_4$ |

   a) Kakšna mora biti zveza med $y_3$ in $y_4$, da bo tabelo mogoče interpolirati s kubičnim polinomom?

   b) Določite tak par števil $y_3$ in $y_4$, da je tabelo mogoče interpolirati s kubičnim polinomom z vodilnim koeficientom 1.

   c) Kolikšna je vrednost interpolacijskega polinoma iz b) pri $x = \pi/2$?

2. Iščemo rešitev začetnega problema $y' = y - x$, $y(0) = 0$.

   a) Poiščite točno rešitev začetnega problema.

   b) Na intervalu $[0, 1]$ poiščite numerično rešitev z Adams-Bashforth-Moultonovo prediktor-korektor metodo četrtega reda. Dodatne vrednosti izračunajte z Runge-Kutta metodo četrtega reda. Za korak vzemite 0.25.

   c) Kolikšna je globalna napaka pri $x = 1$?

# IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
15.9.2004

1. Za elemente realne matrike $A$ dimenzije $n \times n$ velja: $a_{ij} = 0$ za $j > i + 1$.

   a) Zapišite en primer take matrike za $n = 4$.

   b) Napišite **učinkovit** algoritem za izračun novega približka Gauss-Seidelove iteracije pri reševanju sistema $Ax = b$.

   c) Preštejte število operacij (množenj in deljenj) v točki b).

2. Iščete realne ničle polinoma $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$.

   a) Preverite, da ima $p$ realno ničlo na intervalu $[-2, -1]$.

   b) Ničlo na intervalu $[-2, -1]$ poiščite na eno decimalno mesto natančno z metodo regula falsi.

   c) Koliko se relativno spremeni realna ničla iz točke b), če vodilni koeficient polinoma $p$ povečamo za 0.1?

# IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
15.9.2004

1. Za elemente realne matrike $A$ dimenzije $n \times n$ velja: $a_{ij} = 0$ za $j > i + 1$.

   a) Zapišite en primer take matrike za $n = 4$.

   b) Napišite **učinkovit** algoritem za izračun novega približka Gauss-Seidelove iteracije pri reševanju sistema $Ax = b$.

   c) Preštejte število operacij (množenj in deljenj) v točki b).

2. Iščete realne ničle polinoma $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$.

   a) Preverite, da ima $p$ realno ničlo na intervalu $[-2, -1]$.

   b) Ničlo na intervalu $[-2, -1]$ poiščite na eno decimalno mesto natančno z metodo regula falsi.

   c) Koliko se relativno spremeni realna ničla iz točke b), če vodilni koeficient polinoma $p$ povečamo za 0.1?

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
6. junij 2005

1. Temperatura v razgretem avtomobilu se spreminja s časom približno takole

$$T(t) = T_0 + \Delta T_0 \exp(k\,t),$$

kjer je $T(t)$ temperatura ob času $t$ v notranjosti avtomobila, $T_0$ znana konstantna zunanja temperatura, $\Delta T_0$ razlika med notranjo in zunanjo temperaturo ob začetku hlajenja (torej ob času $t = 0$) in $k$ parameter, ki opisuje hitrost hlajenja.

a) Zapišite algoritem, ki bo ocenil $\Delta T_0$ in $k$ po metodi najmanjših kvadaratov, če so dani podatki o notranji temperaturi $T(t_i)$ ob nekaj izbranih časih $t_i$.
*Namig: logaritmirajte* $T(t) - T_0$.

b) Zunanja temperatura je $T_0 = 30C$. Temperaturo v avtomobilu smo izmerili v minutnih intervalih in dobili naslednjo tabelo:

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | 42.9106 | 41.1123 | 39.5644 | 38.2322 | 37.0855 |

Določite $\Delta T_0$ in $k$ za ta primer.

c) Kolikšna bo temperatura v točki b) po 10 minutah? Po kolikšnem času bo temperatura padla na $35C$?

2. Integral $I = \int_a^{a+h} f(x)\,dx$ računamo z enostavnim trapeznim pravilom s korakom $h$, torej

$$I \approx T(h) := \frac{h}{2}\left(f(a) + f(a+h)\right).$$

Kako bi izračunali $h$, če poznate $T(h)$?

b) Naj bo $a = 0$, $f(x) = \exp(-x)$ in $T(h) = 0.4016$. Izračunajte $h$ na tri decimalna mesta.

c) Izračunajte vrednost integrala $I$ iz točke b) še s sestavljenim trapeznim pravilom s korakom $h/2$ (kjer ste $h$ izračunali v točki b)) in z Rombergovo metodo izračunajte boljši približek.

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
15.6.2005

1. Za matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ poznate njen $LU$ razcep, torej $A = LU$.

   a) Zapišite **učinovit** algoritem za reševanje sistema $A^T A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ znani vektor desnih strani sistema.

   b) Kolikšna je časovna zahtevnost algoritma iz točke a)?

   c) Izračunajte $\mathbf{x}$, če je

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   in $\mathbf{b} = [47, 61, 192]^T$.

2. Rešujete začetni problem

$$y'' + \sin y = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{8},\ y'(0) = 0,$$

   ki opisuje nihanje.

   (a) Enačbo zapišite kot sistem dveh enačb prvega reda.

   (b) Izračunajte rešitev sistema z Adams-Bashfortovo metodo drugega reda na intervalu $[0, 1]$ s korakom $h = 0.5$. Dodatno začetno vrednost izračunajte s katerokoli metodo Runge-Kutta drugega reda.

   (c) Z interpolacijskim polinomom druge stopnje izračunajte približek za $y'(0.62)$.

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
29.8.2005

1. Robot se giblje po krivulji, ki je podana parametrično s predpisom
$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$
V točki $\mathbf{T}(2,2)$ se nahaja kontrolni senzor. Izračunajte tisto točko na krivulji gibanja robota, v kateri je robot najbližje senzorju..
   (a) Razdaljo robota do senzorja izrazite kot funkcijo $f(t)$.
   (b) Iščete torej minimum funkcije $f$. Vsi kandidati za minimum so med rešitvami nelinearne enačbe $f'(t) = 0$. Zapišite jo!
   (c) Enačba $f'(t) = 0$ ima eno samo rešitev. Poiščite jo na tri decimalna mesta natančno z Newtonowo metodo. Nato določite iskano točko na krivulji.

2. Integral funkcije $f$ na intervalu $[0, h]$ želite približno računati s formulo
$$\int_0^h f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_1\,h) + f(x_2\,h)\right).$$
   (a) Določite števili $x_1$ in $x_2$ tako, da bo formula čim višjega reda.
   (b) Z dobljeno formulo približno izračunajte integral
$$\int_0^{0.5} \sin x\,dx.$$

(c) Nato integral iz točke (b) izračunajte še s trapezno formulo in ugotovite, katera formula je v tem primeru bolj natančna.

# IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
14. 9. 2005

1. Dan je sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} 0.1410 \cdot 10^{-2} x + 0.4004 \cdot 10^{-1} y &= 0.1142 \cdot 10^{-1} \\ 0.2000 \cdot 10^{0} x + 0.4912 \cdot 10^{1} y &= 0.1428 \cdot 10^{1} \end{aligned}$$

   (a) Izračunajte rešitev sistema brez pivotiranja!

   (b) Izračunajte rešitev sistema z delnim pivotiranjem!

   (c) Izračunajte število občutljivosti matrike sistema v neskončni normi!

   Pri prvih dveh vprašanjih računajte na 5 decimalnih mest.

2. Nekdo je reševal diferencialno enačbo $y''(x) = -2\,y'(x) + 3\,y(x)$ na intervalu $[0, 0.2]$ z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.1$. Za vrednost funkcije $y(0.2)$ je dobil numerični približek 0.2, za odvod $y'(0.2)$ pa 0.999.

   (a) Izračunajte vrednosti $y(0)$ in $y'(0)$!

   (b) Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe!

   (c) Koliko je točna vrednost $y(0.2)$?

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
14. 9. 2005

1. Dan je sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} 0.1410 \cdot 10^{-2} x + 0.4004 \cdot 10^{-1} y &= 0.1142 \cdot 10^{-1} \\ 0.2000 \cdot 10^{0} x + 0.4912 \cdot 10^{1} y &= 0.1428 \cdot 10^{1} \end{aligned}$$

   (a) Izračunajte rešitev sistema brez pivotiranja!

   (b) Izračunajte rešitev sistema z delnim pivotiranjem!

   (c) Izračunajte število občutljivosti matrike sistema v neskončni normi!

   Pri prvih dveh vprašanjih računajte na 5 decimalnih mest.

2. Nekdo je reševal diferencialno enačbo $y''(x) = -2\,y'(x) + 3\,y(x)$ na intervalu $[0, 0.2]$ z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.1$. Za vrednost funkcije $y(0.2)$ je dobil numerični približek 0.2, za odvod $y'(0.2)$ pa 0.999.

   (a) Izračunajte vrednosti $y(0)$ in $y'(0)$!

   (b) Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe!

   (c) Koliko je točna vrednost $y(0.2)$?

IZREDNI IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
28.11.2005

1. Naj bo $a > 0$. Z navadno iteracijo oblike
$$x_{n+1} = \alpha\, x_n + \beta\, \frac{a}{x_n}, \quad n = 0, 1, \ldots$$
želite izračunati približek $\sqrt{a}$.

   (a) Določite parametra $\alpha$ in $\beta$ tako, da bo iteracija čim hitreje konvergirala za dovolj dober začetni približek.

   (b) Prepričajte se, da je iteracija, ki ste jo dobili v a), ravno Newtonova metoda za reševanje enačbe $x^2 - a = 0$.

   (c) Z zgoraj izračunano iteracijo izračunajte $\sqrt{10}$ na štiri decimalna mesta natančno. Za $x_0$ izberite 3.

   *Nasvet: Iteracijo zapišite v obliki $x_{n+1} = g(x_n)$ in zahtevajte, da je $g(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ ter $g'(\sqrt{a}) = 0$.*

2. Za neznano funkcijo $f$ poznate naslednje podatke

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1$ | $1$ | $-1$ |

   (a) Izračunajte Newtonov intepolacijski polinom za zgornjo tabelo.

   (b) S pomočjo polinoma iz točke a) ocenite, kje ima $f$ ničlo.

   (c) Ocenite še, kje ima $f$ lokalni maksimum (spet s pomočjo polinoma).

   *Namig: Ničla in ekstrem $f$ sta približno tam, kjer sta ničla in ekstrem polinoma.*

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
8. 6. 2006

1. Rešujemo enačbo
$$e^{-x} = \sin(x)$$
   (a) Z bisekcijo, določi približno lokacijo prvih (najmanjših) dveh rešitev enačbe.
   (b) Z navadno iteracijo izračunaj prvo ničlo na 3 mesta natančno. Na katerem intervalu iteracija konvergira?
   (c) Drugo ničlo poišči z Newtonovo metodo poišči na 3 mesta natančno.

2. Podatke za neznano funkcijo $f(x)$

| x | $-0.5$ | 0 | 0.5 | 1 | 1.5. |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 1 | 0.2 | 0.8 | 1.8 | 3 |

   aproksimiramo s funkcijo oblike
$$p(x) = a + bx^2.$$
   (a) Zapiši matriko normalnega sistema za dane vrednosti $x$.
   (b) Izračunaj parametra $a$ in $b$ po metodi najmanjših kvadratov.
   (c) Integral
$$\int_{-0.5}^{1.5} f(x)dx$$

izračunaj s trapezno in Simpsonovo metodo s korakom $h = 1$. Oceni napako trapezne formule, če predpostaviš, da je $|f''(x)| \leq 2b$. Rezultata primerjaj z

$$\int_{-0.5}^{1.5} p(x)dx.$$

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
25.8.2006

1. Tabelo podatkov

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-23$ | $-5$ | $1$ | $1$ |

interpolirate s kubičnim polinomom.

(a) Zapišite interpolacijski polinom v Newtonovi obliki.

(b) Newtonovo obliko iz točke a) prepišite v standardno (torej v obliko $p_3(x) = a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$).

(c) Predpostavite, da tabela predstavlja vrednosti neznane zvezne funkcije $f$ na $[-3, 0]$. Utemeljite, da ima $f$ ničlo na $[-2, -1]$. Ničlo ocenite tako, da namesto ničle funkcije $f$ (ki je seveda ne poznate) izračunate ničlo interpolacijskega polinoma, ki ste ga zapisali v točki b). Ničlo določite na dve decimalni mesti s katerokoli numerično metodo.

2. Rešujete začetni problem drugega reda

$$y'' + 2\,x\,y' + 2\,x\,y = (3\,x - 2)e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

(a) Prevedite zgornji problem na reševanje sistema dveh diferencialnih enačb prvega reda.

(b) Z Eulerjevo metodo in korakom $h = 0.1$ izračunajte numerični približek za rešitev sistema v točki $x = 0.2$.

(c) Preverite, da je $y(x) = x\,e^{-x}$ rešitev začetnega problema (izračunajte odvoda, vstavite v diferencilano enačbo in primerjajte levo in desno stran). Kolikšna je torej absolutna napaka približka za $y'(0.2)$ iz točke b)?

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
10. 6. 2008

1. Vrednosti funkcije integralski sinus, ki je definirana kot

$$\mathrm{si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt,$$

so podane v tabeli

| $x$ | 1 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{si}(x)$ | 0.94608 | 1.02869 | 1.10805 | 1.18396 | 1.25623 | 1.32468 |

Iščemo vrednost $x_0$, pri kateri je $\mathrm{si}(x_0) = 1$.

(a) Z uporabo linerne interpolacije približno izračunaj $x_0$.

(b) Koliko se vrednost si v približku razlikuje od 1? Integral računaj s Simpsonovo formulo.

(c) Približek izboljšaj še z enim korakom Newtonove metode. Uporabiš lahko prej izračunan integral.

(d) Koliko je sedaj razlika med vrednostjo funkcije si in 1.

2. Dan je začetni problem za NDE 2. reda

$$y''(x) + y(x) = 0$$

z začetnimi pogoji $y(1) = 0.5$ ter $y'(1) = 0.1$.

(a) Izračunaj točno rešitev, če veš, da je oblike

$$y(x) = A\sin(x) + B\cos(x).$$

(b) Z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.1$ poišči vrednost rešitve $y(1.2)$.

(c) Kolikšna je globalna napaka? Kolikšna je lokalna napaka na prvem koraku?

(d) *Dodatek:* Kolikšna je lokalna napaka na drugem koraku?

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
11. 9. 2008

1. Rešujemo klasično transcendentno enačbo
$$x = \tan(x).$$
   (a) Z bisekcijo preveri, da ima enačba rešitev na intervalu $(3\pi/2, 5\pi/2)$ in jo izračunaj na 1 decimalko natančno.
   (b) S tangentno metodo poišči rešitev enačbe na intervalu $(5\pi/2, 7\pi/2)$ na 3 decimalke natančno. Pazi pri izbiri začetnega približka.
   (c) Navadno iteracijo lahko uporabimo, če enačbo $x = \tan(x)$ preoblikujemo v enačbo
$$x = \tan^{-1}(x),$$
pri čemer moramo paziti, katero vejo večlične funkcije $\tan^{-1}(x)$ uporabimo. Z navadno iteracijo poišči rešitev enačbe na intervalu $(13\pi/2, 15\pi/2)$ na 3 decimalke natanko.

   Dodatek Enačba izgleda kot nalašč za navadno iteracijo(metodo fiksne točke). Prepričaj se, da navadna iteracija dana z rekurzivno formulo
$$x_{n+1} = \tan(x_n)$$
ne konvergira za noben začetni približek.

2. Dan je začetni problem za diferencialno enačbo
$$y'(x) + y(x) = x$$
in začetni pogoj $y(1) = 1$.

(a) Izračunaj $y(2)$ z Eulerjevo metodo s koraki $h = 1$ in h=0.5.

(b) Vrednost $y(2)$ izračunaj še z trapezno metodo s korakoma $h = 1$ in $h = 0.5$.

(c) Določi globalne in lokalne napake za približke izračunane v prejšnjih točkah, če veš, da je $x - 1 + Ce^{-x}$ splošna rešitev diferencialne enačbe $y'(x) + y(x) = x$.

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE
23. september 2009

1. V spodnji tabeli so vrednosti funkcije sin.

| $x$ | 0 | 0.3 | 0.6 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | 0 | 0.295 | 0.564 | 0.783 |

   (a) S kvadratno in kubično interpolacijo podatkov iz zgornje tabele poišči približno vrednost za $\sin 0.8$.

   (b) Kolikšna je absolutna napaka v obeh primerih?

   (c) S pomočjo inverzne interpolacije s kvadratnim polinomom poišči rešitev enačbe

$$x - \sin x = 0.08$$

   in določi relativno napako rešitve, ki jo dobiš. *Navodilo:* Sestavi interpolacijsko tabelo za inverzno funkcijo funkcije $f(x) = x - \sin x$.

2. Integral funkcije na intervalu $[0, h]$ želimo izračunati po približni formuli

$$\int_0^h f(x)\,dx \approx \alpha\, f(0) + \beta\, f(\gamma).$$

   (a) Določite $\alpha$, $\beta$ in $\gamma$ tako, da bo formula čim višjega reda.

   (b) Iz zgornje formule izpeljite sestavljeno pravilo in ga uporabite za izračun integrala

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$$

   s korakom $\pi/4$.

(c) Izračunajte še približek s sestavljenim trapeznim pravilom pri isti dolžini koraka in primerjajte oba približka s točno vrednostjo. Kolikšni sta absolutni napaki?