Izpit iz Numerične matematike

Ljubljana, 23. 6. 2015

1. Linearen sistem $n = 2k$ enačb

$$2x_i + x_{n-i+1} = 1. \quad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

   (a) Napišite razširjeno matriko za $n = 4$ in rešitev sistema poiščite z LU razcepom.

   (b) Za $n = 20$ rešite sistem (1) z Jacobijevo iteracijo

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right).$$

   Koliko korakov iteracije potrebujemo za 3 pravilne decimalke, če za začetni približek izberemo vektor desnih strani? Koliko operacij potrebujemo za vsako iteracijo?

2. Naj bo $y(x)$ rešitev diferencialne enačbe

$$y'' - y = -x,$$

   ki zadošča začetnemu pogoju $y(0) = -1$ in $y'(0) = 2$.

   (a) Izračunajte približek za $y(1)$ z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.5$. Preverite, da je $y(x) = x - e^{-x}$ in določite lokalno napako na 1. koraku in globalno napako za $y(1)$.

   (b) Približek za $y(1)$ poiščite še z metodo RK4

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n, y_n) \\
k_2 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2) \\
k_3 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_2/2) \\
k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}
\end{aligned}$$

   s korakom $h = 0.1$.

   (c) Z linearno interpolacijo na podatkih iz prejšnje točke poiščite približek za ničlo. Ocenite napako vašega približka za ničlo in vašo oceno primerjajte z dejansko napako.

Izpit iz numerične matematike

8. 7. 2015

1 Naloga 1

Vrednost funkcije $f(a)$ je definirana kot največja rešitev enačbe

$$x + a^x = 0 \tag{1}$$

1. Poiščite vrednosti $f(1)$, $f(0.7)$ in $f(\pi)$.
2. Določite definicijsko območje funkcije f. *Na enačbo lahko gledamo kot na presečišče grafov dveh funkcij x in $-a^x$. Rob definicijskega območja bo tam, kjer se grafa ne sekata ampak dotikata.*
3. Vrednosti $f(0.7)$ in $f(\pi)$ izračunajte še z navadno iteracijo. Kako hitro konvergira? Primerjajte število potrebnih operacij med navadno iteracijo in metodo, ki ste jo uporabili pri prvi točki (če ste pri prvi točki uporabili navadno iteracijo, izberite drugo metodo za primerjavo).
4. Približno skicirajte graf funkcije f na intervalu $[0, 5]$.

1.1 Rešitev

Vrednosti funkcije $f(a)$ lahko poiščemo z eno od metod za reševanje nelinearnih enačb. Npr. z Newtonovo metodo

In [5]:
```
F = @(x,a) x+a.^x;
dF = @(x,a) 1+log(a).*a.^x
```

Out[5]:
```
dF =

@(x, a) 1 + log (a) .* a .^ x
```

In [8]:
```
function [x,it] = f(a)
    F = @(x,a) x+a.^x;
    dF = @(x,a) 1+log(a).*a.^x;
    x = 0;
    for it=1:100
        z = F(x,a);
        x = x - z/dF(x,a);
        if abs(z)<1e-5
          break
        end
    end
endfunction
```

In [9]: `[x,it]=f(0.7)`

Out[9]:
```
x = -2.1629
it =  5
```

In [10]: `[x,it]=f(1)`

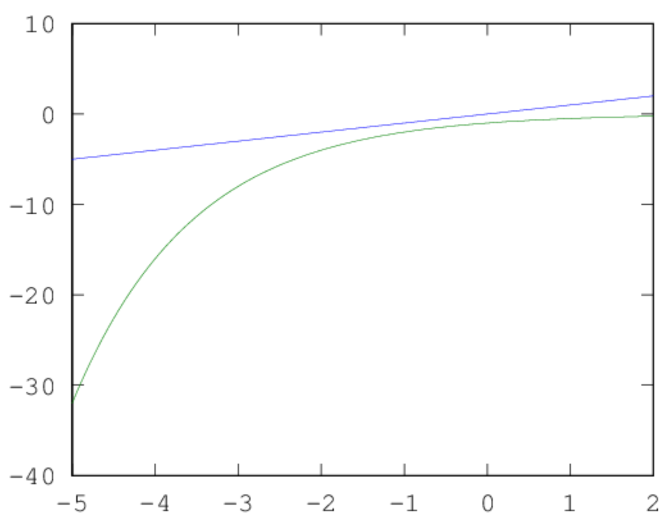
Out[10]:
```
x = -1
it =  2
```

In [11]: `[x,it]=f(pi)`

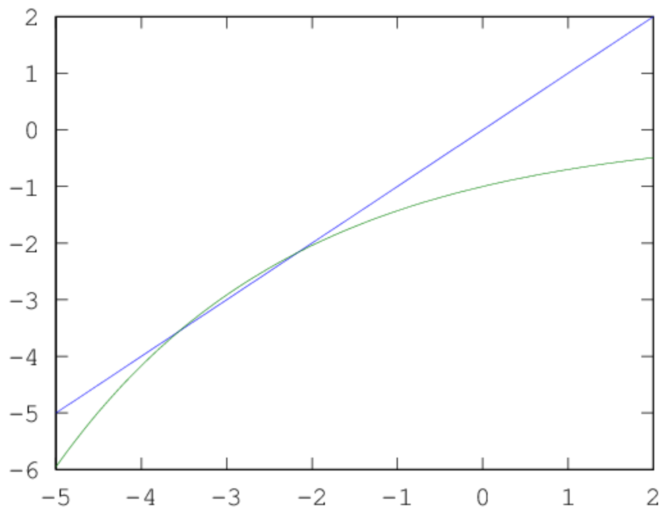
Out[11]:
```
x = -0.53934
it =  4
```

Rob definicijskega območja je pri vrednosti a, pri kateri ima funkcija $x+a^x$ dvojno ničlo. To lepo vidimo, če narišemo grafe x in $-a^x$ za različne vrednosti a.

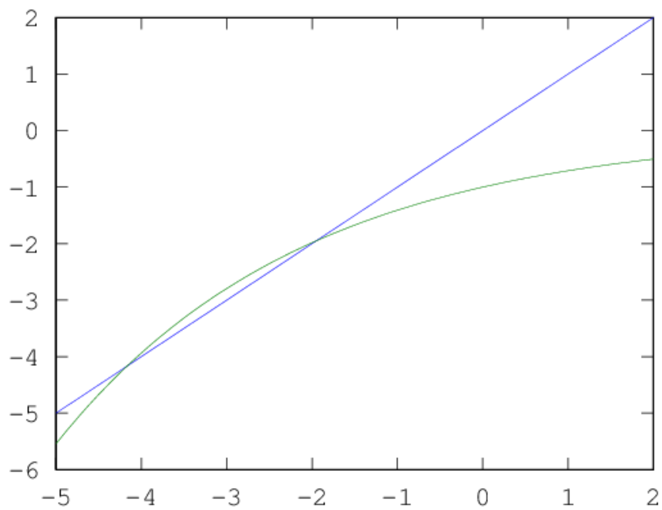
In [13]:
```
x=linspace(-5,2);
plot(x,x,x,-0.5.^x)
```



In [14]:
```
x=linspace(-5,2);
plot(x,x,x,-0.7.^x)
```




```
In [18]: x=linspace(-5,2);
         plot(x,x,x,-0.71.^x)
```



Pogoj za dvojno ničlo je, da je odvod in funkcija enaka 0

$$x + a^x = 0$$

$$1 + \log(a)a^x = 0$$

Če enačbi malce preoblikujemo, lahko rešitev poiščemo z navadno iteracijo:

$$x = -a^x$$

$$1 = -\log(a)a^x = \log(a)x$$

$$a = e^{1/x}$$

Iteracijska formula:

$$x_{n+1} = -a_n^{x_n}$$

$$a_{n+1} = e^{1/x_n}$$

Skranjo vrednost a lahko poiščemo tudi npr. z bisekcijo.

In [100]:
```
x=-0.7;a=0.7;
for i=1:5
    x = -a^x;
    a = exp(1/x);
    printf("x=%.10f\ta=%.10f\n",[x,a])
end
```

Out[100]:
```
x=-1.2836049168        a=0.4588389910
x=-2.7182818285        a=0.6922006276
x=-2.7182818285        a=0.6922006276
x=-2.7182818285        a=0.6922006276
x=-2.7182818285        a=0.6922006276
```

Preverimo, da smo res dobili dvojno ničlo:

In [23]:
```
F(x,a)
```

Out[23]:
```
ans =   -4.44089209850063e-16
```

In [24]:
```
dF(x,a)
```

Out[24]:
```
ans =    3.33066907387547e-16
```

1.1.1 Navadna iteracija

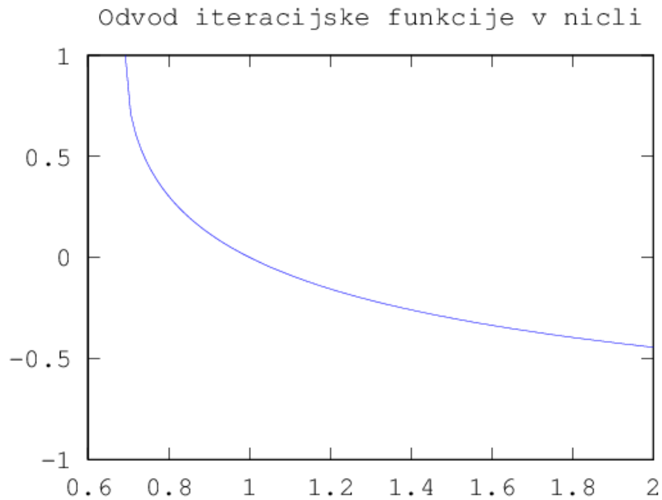
Enačbo $x + a^x = 0$ lahko preprosto preoblikujemo v navadno izeracijo

$$x_{n+1} = -a^{x_n}.$$

Vprašanje je le, ali rekurzivno zaporedja konvergira. To je odvisno od odvoda iteracijske funkcije

$$g'(x_0) = -\log(a)a^{x_0} = x_0 \log(a).$$

In [35]:
```
t = linspace(a,2);
y = [];
for i=t
  y = [y log(i)*f(i)];
end
plot(t,y)
title("Odvod iteracijske funkcije v nicli")
```



Iz grafa vidimo, da je odvod iteracijske funkcije v ničli vedno manjši od 1, vendar se proti robu definicijskega območja priližuje k 1. Konvergenca navadne iteracije bo torej vedno počasnejša, bolj kot smo blizu $a = 0.69$.

In [40]:
```
function [x,it] = fit(a)
x = -1;
for it = 1:100
  xn = -a^x;
  if abs(xn - x)<1e-5
    break
  end
  x = xn;
end
endfunction
```

In [43]:
```
[x,it]=fit(0.7)
```

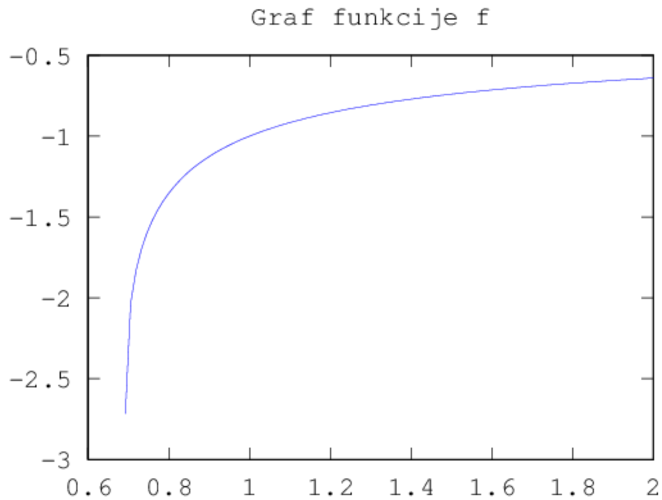
Out[43]:
```
x = -2.16288133213536
it =  38
```

In [44]:
```
[x,it]=fit(pi)
```

Out[44]:
```
x = -0.539337635713692
it =  24
```

1.2 Graf funkcije

In [116]:
```
t = linspace(a,2);
y = [];
for i=t
  y = [y f(i)];
end
plot(t,y)
title("Graf funkcije f")
```



2 Naloga 2

Funkcijo napake

$$g(x) = \mathrm{erf}(x)$$

želimo na intervalu $[-2, 2]$ aproksimirati s polinomom.

1. Izračunajte polinom p_3, ki funkcijo g interpolira v točkah $-2, -4/3, 4/3, 2$. Polinom zapišite v Newtonovi obliki.
2. Funkcijo g aproksimirajte s kubičnim polinomom q_3, ki ga poiščete z metodo najmajših kvadratov za vrednosti g izračunane v ekvidistančnih točkah na $[-2, 2]$ s korakom $h = 0.1$.
3. Izračunajte polinom t_3, ki funkcijo g interpolira v Čebiševih točkah

$$x_i = 2\cos\left(\frac{2k-1}{8}\pi\right) \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

4. Primerjajte napake za vse tri polinome p_3, q_3 in t_3.

```
In [105]: x = [-2,-4/3,4/3,2]'
```

```
Out[105]: x =

            -2.0000
            -1.3333
             1.3333
             2.0000
```

```
In [106]: format short
          % tabela deljenih diferenc
          df = zeros(4);
          df(:,1) = erf(x);
```

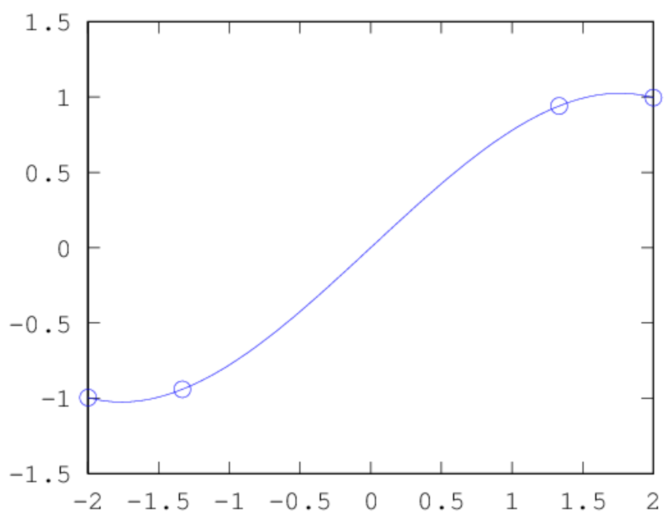
```
df(1:3,2)=(df(2:end,1)-df(1:end-1,1))./(x(2:end)-x(1:end-1));
df(1:2,3)=(df(2:3,2)-df(1:2,2))./(x(3:4)-x(1:2));
df(1,4) = (df(2,3)-df(1,3))/(x(4)-x(1))
```

Out[106]:
```
df =

  -0.99532   0.08200   0.18705  -0.09352
  -0.94065   0.70549  -0.18705   0.00000
   0.94065   0.08200   0.00000   0.00000
   0.99532   0.00000   0.00000   0.00000
```

Polinom v Newtonovi obliki

$$p_3 = -0.99532 + 0.082(x+2) + 0.18705(x+2)(x+4/3) - 0.09352(x+2)(x+4/3)(x-4/3)$$

In [107]:
```
t=linspace(-2,2);
plot(x,erf(x),'o')
hold on
plot(t,df(1,1)+(t+2).*(df(1,2)+(t+4/3).*(df(1,3)+(t-4/3)*df(1,4))))
```

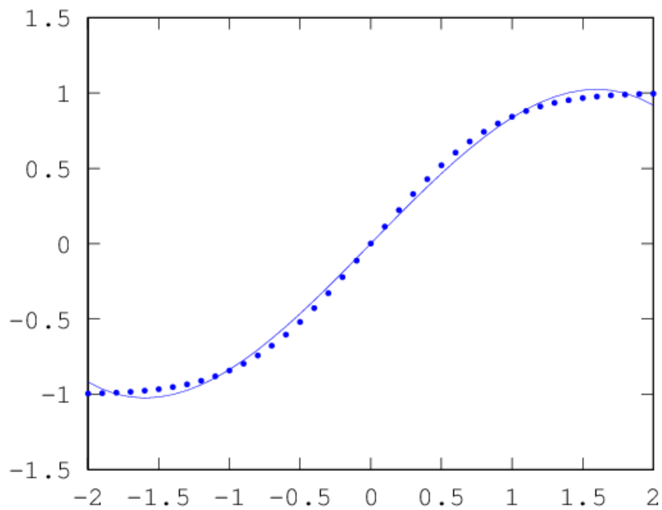


2.0.1 Aproksimacija

In [108]:
```
x = (-2:0.1:2)';
y  = erf(x);
A = [x.^3 x.^2  x  ones(size(x))]; %matrika predoločenega sistema
q3 = A\y % resitev po metodi najmanjših kvadratov
```

Out[108]:
```
q3 =

  -0.12567
   0.00000
   0.96191
   0.00000
```

In [109]:
```
plot(x,y,'.')
hold on
plot(x,polyval(q3,x))
```



2.1 Čebiševe točke

In [110]:
```
k=1:4; x = 2*cos((2*k-1)/8*pi)'
```

Out[110]:
```
x =

   1.84776
   0.76537
  -0.76537
  -1.84776
```

In [111]:
```
# tabela deljenih diferenc
dt = zeros(4);
dt(:,1) = erf(x);
dt(1:3,2)=(dt(2:end,1)-dt(1:end-1,1))./(x(2:end)-x(1:end-1));
dt(1:2,3)=(dt(2:3,2)-dt(1:2,2))./(x(3:4)-x(1:2));
dt(1,4) = (dt(2,3)-dt(1,3))/(x(4)-x(1))
```

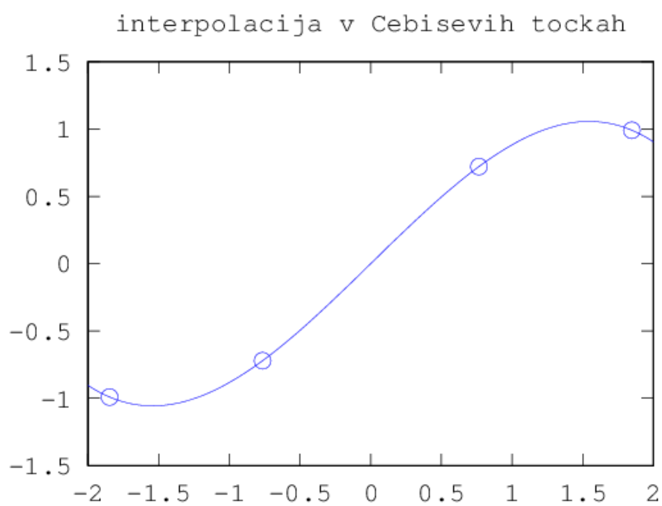
Out[111]:
```
dt =

   0.99103   0.24955  -0.26496  -0.14340
   0.72092   0.94193   0.26496   0.00000
  -0.72092   0.24955   0.00000   0.00000
  -0.99103   0.00000   0.00000   0.00000
```

In [112]:
```
t3 = @(t) dt(1,1)+(t-x(1)).*(dt(1,2)+ (t-x(2)).*(dt(1,3) +(t-x(3))*dt(1,4)))
```

Out[112]: t3 =

```
@(t) dt (1, 1) + (t - x (1)) .* (dt (1, 2) + (t - x (2)) .* (dt (1, 3) + (t - x (3)) * dt (1,
```

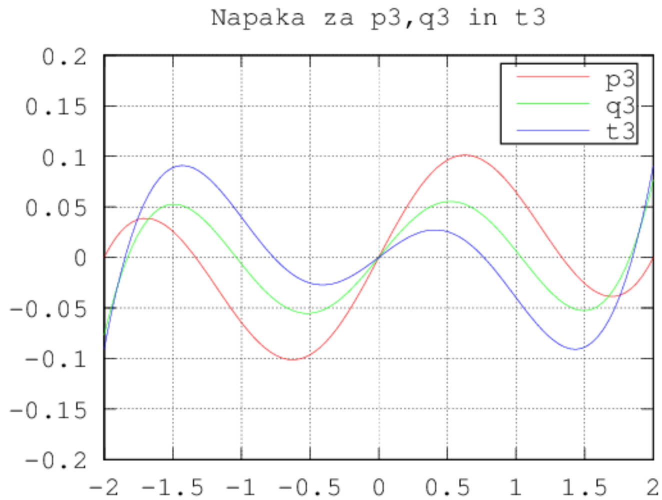
In [114]:
```
t=linspace(-2,2);
plot(x,erf(x),'o')
hold on
plot(t,t3(t))
title("interpolacija v Cebisevih tockah")
```



3 Napaka

Napako je precej težko oceniti analitično (oceniti bi morali neskončno normo 4. odvoda funkcije erf), zato jo približno določimo kar numerično.

In [99]:
```
y = erf(t);
yp3 = df(1,1)+(t+2).*(df(1,2)+(t+4/3).*(df(1,3)+(t-4/3)*df(1,4)));
yq3 = polyval(q3,t);
yt3 = t3(t);
plot(t,y-yp3,'r',t,y-yq3,'g',t,y-yt3,'b')
legend("p3","q3","t3")
grid on
title("Napaka za p3,q3 in t3")
```


Napaka za p3,q3 in t3
p3
q3
t3
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

Izpit iz Numerične matematike

Ljubljana, 9. 9. 2015

1. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta grafa funkcij

$$y = 2^x \text{ in } y = \cos(x^2) \tag{1}$$

   na intervalu $x \in [-3, -2]$. Ploščino izračunajte na 5 decimalk natančno. Ocenite relativno in absolutno napako.

2. Dan je tridiagonalen sistem enačb

$$-x_{i-2} + (i+1)x_i - x_{i+2} = b_i; \quad i = 1, \dots, n \tag{2}$$

   za spremenljivke $x_1, x_2, \dots x_n$. Pri tem predpostavimo, da so manjkajoče vrednosti enake nič $x_{-1} = x_0 = x_{n+1} = x_{n+2} = 0$.

   (a) Zapišite učinkovit algoritem za reševanje zgornjega sistema. Utemeljite, zakaj je algoritem numerično stabilen.

   (b) Z vašim algoritmom rešite sistem za $n = 4$ in $n = 20$ z vrednostmi $b_i = 1$.

   (c) Z inverzno iteracijo poiščite najmanjšo lastno vrednost matrike sistema za $n = 20$.

Izpit iz Numerične matematike

Ljubljana, 16. 6. 2016

1. Funkcijo napake
$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$
računamo s sestavljenim Simpsonovim pravilom.
   (a) Izračunajte $\mathrm{erf}(0.5)$ s korakom $h = 0.25$ in določite napako.
   (b) Ocenite, kako velik je lahko še korak da bo napaka manjša od $5 \cdot 10^{-11}$ za vse $x \in [0, 1]$ [1].
   (c) Izračunajte $\mathrm{erf}(0.5)$ in $\mathrm{erf}^{-1}(0.5)$ na 10 decimalk natančno.

2. Dana je linearna diferencialna enačba
$$y''(t) + ty'(t) + y(t) = t. \tag{1}$$
Označimo z y_1 rešitev enačbe (1), ki zadošča začetnim pogojem $y(0) = 1$ in $y'(0) = 0$ in z y_2 rešitev, ki zadošča pogojem $y_2(0) = 0$ in $y_2'(0) = 1$.
   (a) Izračunajte $y_1(1)$ in $y_2(1)$ s sredinsko metodo
$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)\right)$$
s fiksnim korakom h na 5 decimalk natančno. Koliko korakov potrebujete? Koliko je red sredinske metode? Pibližno skicirajte grafa y_1 in y_2.
   (b) Utemeljite, zakaj je
$$y = \frac{t}{2} + C(y_1 - \frac{t}{2}) + D(y_2 - \frac{t}{2})$$
splošna rešitev diferencialne enačbe (1) in določite konstanti C in D, da bo y rešitev robnega problema za enačbo (1) s homogenimi robnimi pogoji $y(0) = y(1) = 0$. Približno skicirajte graf rešitve robnega problema.

[1] napaka sestavljenega Simpsonovega pravila za integral f na intervalu $[a, b]$ s korakom h je
$$\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\xi); \quad \xi \in [a, b]$$

Izpit iz numerične matematike

Ljubljana, 1. 7. 2016

1. Dan je sistem $2n$ linearnih enačb z $2n$ neznankami:

$$-2^i x_i + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

in

$$x_{i-n} - 2^{i-n} x_i = b_i, \quad i = n+1, \ldots, 2n.$$

(a) Poiščite rešitev sistema za $n = 2$ in $b_i = i$.

(b) Zapišite učinkovit in numerično stabilen algoritem za reševanje tega sistema. Koliko operacij potrebuje vaš algoritem? Poiščite rešitev sistema za $n = 20$ in $b_i = i$.

(c) Z inverzno potenčno metodo poiščite najmanjšo lastno vrednost matrike sistema za $n = 20$.

2. Funkcijo

$$f(x) = \arctan(x)$$

želimo na intervalu $[0, 1]$ interpolirati s kubičnim polinomom. Naj bo p polinom, ki interpolira podatke

$$f(0), f(1/3), f(2/3) \text{ in } f(1),$$

polinom q pa naj interpolira podatke

$$f(0), f'(0), f(1), f'(1).$$

(a) Oba polinoma zapišite v Newtonovi obliki.

(b) Numerično in analitično ocenite napako[1] za oba polinoma p in q.

(c) Uporabite polinom p ali q in poiščite rešitev enačbe

$$\arctan(x) = 1 - x.$$

Rešitev dobljeno z interpolacijskim polinomom primerjajte s pravo rešitvijo.

[1] Uporabite lahko dejstvo, da je $f^(4)(x) = -\frac{24x(x^2-1)}{(x^2+1)^4}$.

Izpit iz numerične matematike

Ljubljana, 16. 6. 2016

Martin Vuk

23. avgust 2016

Kazalo

1 Prva naloga

V ravnini je krivulja C podana z enačbo

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 1.$$

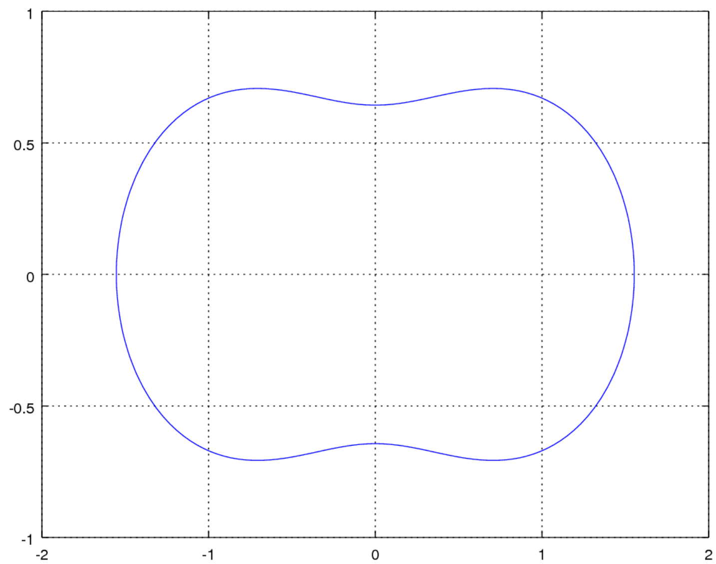
1. Poišči vse točke na krivulji s koordinato $x = 0.5$.
2. Poišči vsa presečišča krivulje C in hiperbole

$$x^2 - xy - y^2 = 1.$$

1.1 Rešitev

Da si lažje predstavljamo, najprej krivuljo narišemo z ukazom ‘contour‘

```
x = linspace(-2,2);
y  = linspace(-1,1);
[X,Y] = meshgrid(x,y);
figure( 1, "visible", "off" );
contour(X,Y, (X.^2+Y.^2).^2-2*(X.^2-Y.^2),[1,1],'b')
grid
print -dpng "krivuljaC.png"
```



Vidimo, da sta točki s koordinato $x = 0.5$ dve. Koordinata y je rešitev enačbe, ki jo dobimo, če $x = 0.5$ vstavimo v enačbo krivulje

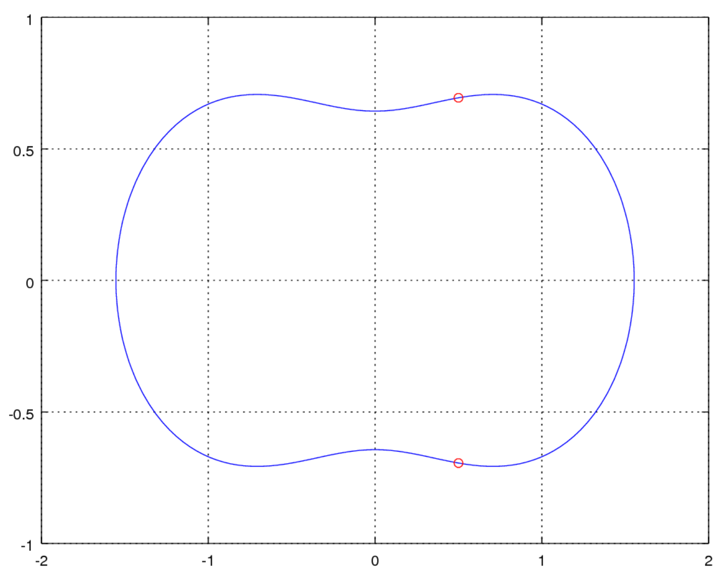
$$
\begin{aligned}
(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) &= 1|_{x=0.5} \\
(0.25 + y^2)^2 - 2(0.25 - y^2) &= 1
\end{aligned}
$$

Obe rešitvi lahko poiščemo z eno od metod za reševanje nelinearnih enačb. Tu bomo uporabili **tangentno metodo**:

```
format long
f = @(y) (0.25 + y^2)^2-2*(0.25-y^2)-1;
df = @(y) 2*(0.25 + y^2)*2*y + 4*y;
y1 = -1;
for i=1:5
  y1 = y1 - f(y1)/df(y1)
end
```

```
> > y1 = -0.770833333333333
y1 = -0.700309552168078
y1 = -0.694338996684583
```

```
y1 = -0.694298790208768
y1 = -0.694298788396521

y2 = 1;
for i=1:5
  y2 = y2 - f(y2)/df(y2)
end


> > y2 =  0.770833333333333
y2 =  0.700309552168078
y2 =  0.694338996684583
y2 =  0.694298790208768
y2 =  0.694298788396521

hold on
plot([0.5,0.5],[y1,y2],'ro')
print -dpng "krivuljaC_tocke.png"
```

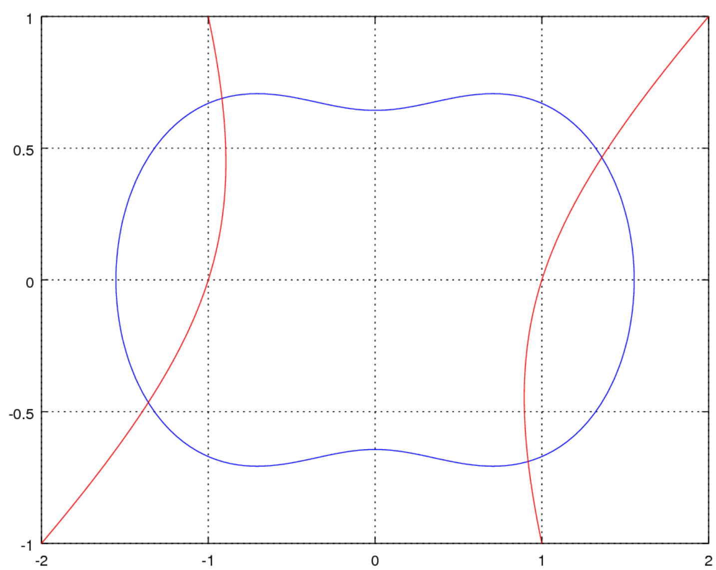


Slika 1: Točke na krivulji c z $x = 0.5$

1.1.1 Presečiše krivulje C in hiperbole

Narišimo še hiperbolo

```
x = linspace(-2,2);
y  = linspace(-1,1);
[X,Y] = meshgrid(x,y);
figure( 2, "visible", "off" );
contour(X,Y, (X.^2+Y.^2).^2-2*(X.^2-Y.^2),[1,1],'b')
grid
hold on
contour(X,Y, X.^2-X.*Y-Y.^2,[1,1],'r')
print -dpng "krivuljaC_in_hiperbola.png"
```



Slika 2: Krivulja C in hiperbola

Krivulji imata 4 presečišča, ki jih lahko poiščemo kot rešitve sistema enačb

$$\begin{aligned} x^2 - xy - y^2 &= 1 \\ (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) &= 1. \end{aligned}$$

Zopet lahko uporabimo tangentno metodo.

```
F = @(x,y)  [x^2-x*y-y^2-1; (x^2+y^2)^2-2*(x^2-y^2)-1];
JF = @(x,y) [2*x-y, -2*y-y; 2*(x^2+y^2)*2*x-4*x, 2*(x^2+y^2)*2*y+4*y];
xy = [1;-1];
XY = xy';
for i=1:10
  xy = xy - JF(xy(1),xy(2))\F(xy(1),xy(2));
  XY = [XY;xy'];
end
XY
```

```
> > > >> XY =

   1.000000000000000  -1.000000000000000
   0.812500000000000  -0.812500000000000
   0.848408340919436  -0.708985263996359
   0.908945644434683  -0.692194309712894
   0.916124464438256  -0.689418440683320
   0.917634241836431  -0.689121815861298
   0.917796981234154  -0.689091012155289
   0.917814022017620  -0.689087891663280
   0.917815749906834  -0.689087576452288
   0.917815924464424  -0.689087544621826
   0.917815942091686  -0.689087541407643
```

Ostala presečišča poiščemo tako, da uporabimo druge začetne približke.

```
# 2. tocka
xy2 = [-1;-1];
XY = xy2';
for i=1:10
   xy2 = xy2 - JF(xy2(1),xy2(2))\F(xy2(1),xy2(2));
   XY = [XY; xy2'];
end
XY((end-3):end,:)
# 3. tocka
xy3 = [-1;1];
for i=1:10
   xy3 = xy3 - JF(xy3(1),xy3(2))\F(xy3(1),xy3(2));
   XY = [XY; xy3'];
end
XY((end-3):end,:)
```

```
# 4. tocka
xy4 = [1;1];
for i=1:10
   xy4 = xy4 - JF(xy4(1),xy4(2))\F(xy4(1),xy4(2));
   XY = [XY; xy4'];
end
XY((end-3):end,:)

> > > >> ans =

  -1.359721054982997  -0.465128678114521
  -1.359707053302619  -0.465142895739003
  -1.359710517071326  -0.465139376740527
  -1.359709659723895  -0.465140247647315
> > > >> ans =

  -0.917814022017620   0.689087891663280
  -0.917815749906834   0.689087576452288
  -0.917815924464424   0.689087544621826
  -0.917815942091686   0.689087541407643
> > > >> ans =

   1.359721054982997   0.465128678114521
   1.359707053302619   0.465142895739003
   1.359710517071326   0.465139376740527
   1.359709659723895   0.465140247647315
```

Vse skupaj predstavimo še grafično:

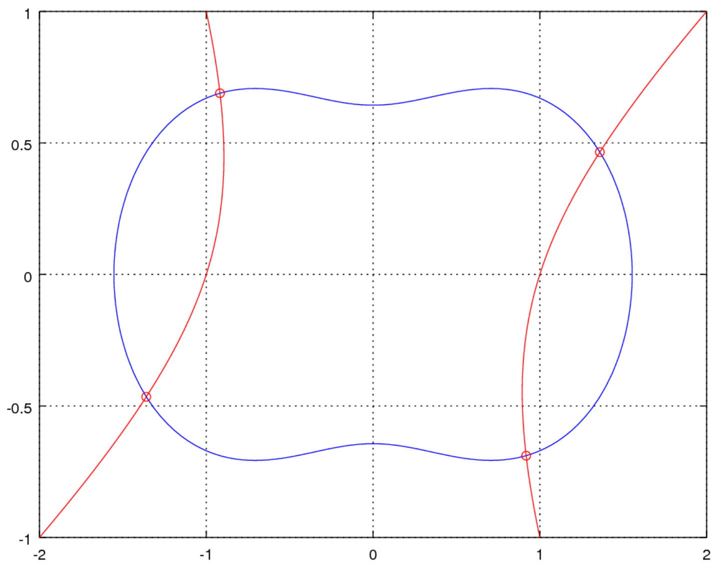
```
plot([xy(1),xy2(1),xy3(1),xy4(1)],[xy(2),xy2(2),xy3(2),xy4(2)],'ro')
print -dpng "krivuljaC_in_hiperbola_presek.png"
```

2 Druga naloga

Funkcija $y(t)$ je podana kot rešitev začetnega problema

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \sin(t), \quad y(0) = 2, y'(0) = 0.$$

1. Z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.5$ poiščite približek za $y(1)$.



Slika 3: Presečišča krivulje C in hiperbole

2. Z metodo po vaši izbiri poiščite približek za $y(3)$ na 5 decimalk natančno.

3. Izračunajte integral
$$\int_0^3 y(t)dt$$
na 5 decimlak natančno.

2.1 Rešitev

Najprej enačbo 2. reda prepišemo v sistem enačb 1. reda, tako da vpeljemo novo spremenljivko $z = y'(t)$. Dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} y'(t) &= z(t) \\ z'(t) &= \sin(t) - 2z(t) - y(t) \end{aligned}$$

z začetnim pogojem $y(0) = 2$ in $z(0) = 0$.

2.1.1 Eulerjeva metoda

Narediti moramo dva koraka Eulerjeve metode:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h * f(t_0, y_0) \\ y_2 &= y + h * f(t_0 + h, y_1) \end{aligned}$$

```
f = @(t,y,z) [z; sin(t)-2*z-y];
y0 = [2;0];
t0 = 0;
h = 0.5;
y1 = y0 + h*f(t0,y0(1),y0(2))
y2 = y1 + h*f(t0+h,y1(1),y1(2))


y1 =

   2
  -1
y2 =

   1.500000000000000
  -0.760287230697898
```

Približek za $y(1)$ se skriva v prvi komponenti spremenljivke ‘y2‘ in je enak 1.5.

2.1.2 Izračun $y(3)$

Uporabili bomo metodo Runge-Kutta 4. reda.

```
fun = @(t,y) f(t,y(1),y(2));
function [y,t] = rk4(f,t0,y0,tk,n)
h = (tk-t0)/n;
y = y0;
t = t0;
for i=1:n
  k1 = h*f(t0,y0);
  k2 = h*f(t0+h/2,y0+k1/2);
  k3 = h*f(t0+h/2,y0+k2/2);
  k4 = h*f(t0+h, y0+k3);
  y0 = y0 + (k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
```

```
  t0 = t0+h;
  y = [y y0];
  t = [t t0];
end
endfunction
```

Rešitev poiščemo za dve različni velikosti koraka in ocenimo napako z Richardsonovo ekstrapolacijo.

```
tk = 3;
n = 20;
[y1,t] = rk4(fun,t0,y0,tk,n);
n = 40;
[y2,t] = rk4(fun,t0,y0,tk,n);
# ocena za napako
napaka = (y1(1,end)-y2(1,end))/(2^4-1)


napaka =    2.17186881819783e-07
```

Narišimo še graf rešitve.

```
figure( 1, "visible", "off" );
plot(t,y2(1,:),'b')
grid
print -dpng "resitevDE.png"
```

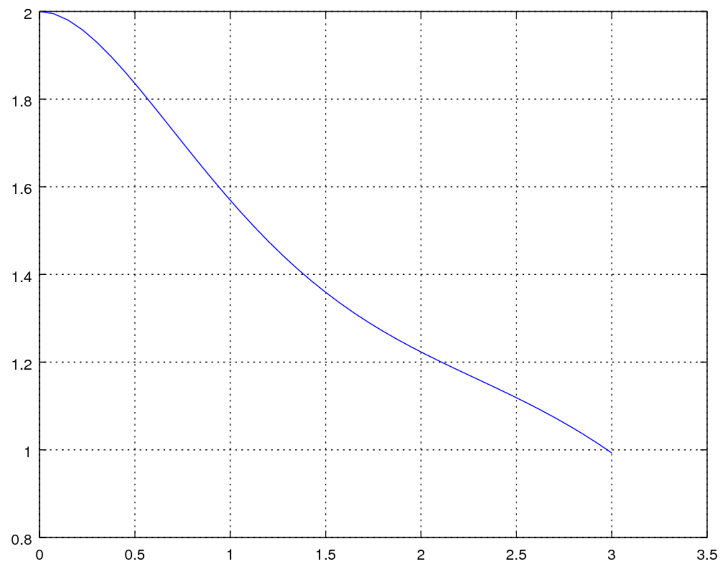
2.1.3 Integral

Integral lahko izračunamo iz že izračunanih približkov za rešitev, tako da uporabimo npr. Simpsonovo sestavljeno pravilo.

```
h=(tk-t0)/n;
utezi = [1 repmat([4 2],1,n/2-1) 4 1];
I = h/3*sum(utezi.*y2(1,:))


I =  4.30709978113080
```

Druga možnost je, da integral enostavno dodamo v diferencialno enačbo. Naj bo

$$w(t) = \int_{t_0}^{t} y(\tau) d\tau$$



Slika 4: Rešitev $y(t)$

Funkcija $w(t)$ zadošča diferencialni enačbi

$$w'(t) = y(t)$$

in začetnemu pogoju $w(t_0) = 0$. Sistem dveh enačb za y in z razširimo s w

$$\begin{aligned} y'(t) &= z(t) \\ z'(t) &= \sin(t) - 2z(t) - y(t) \\ w'(t) &= y(t) \end{aligned}$$

in uporabimo metodo RK.

```
funi = @(t,y) [f(t,y(1),y(2));y(1)];
y0 = [2;0;0];
n = 40;
[yi,t] = rk4(funi,t0,y0,tk,n);
I = yi(3,end)


I =  4.30710150580884
```

Izpit iz numerične matematike

Ljubljana, 23. 6. 2017

1 Prva naloga

Naj bo A diagonalno dominantna matrika z neničelnimi elementi

$$a_{ii} = 3; a_{i+1,i} = -1; a_{i,i+1} = -1; a_{i,2n-i+1} = -1; \quad i = 1, \dots n$$
$$a_{ii} = 3; a_{i,2n-i+1} = -1; a_{i-1,i} = -1; a_{i,i-1} = -1; \quad i = n+1, \dots 2n$$

1. Za $n = 3$ poišči po absolutni vrednosti največjo in najmanjšo lastno vrednost ter pripadajoči lastni vektor matrike A z (inverzno) potenčno metodo. Za reševanje sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ uporabi katero od iterativnih metod (Jacobijevo, Gauss-Seidlovo, SOR).
2. Poišči najmanjšo lastno vrednost in pripadajoči lastni vektor za matriko A za $n = 50$. Ali bi lahko iterativne metode uporabili tudi za iskanje vmesnih lastnih vrednosti (z inverzno potenčno metodo)?

2 Druga naloga

Funkcija $y(t)$ je podana kot rešitev začetnega problema za diferencialno enačbo

$$y''(t) + \frac{1}{2}y'(t) + 3y(t)^3 = 0, \quad y'(0) = 0, y(0) = 1.$$

1. Z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.5$ poiščite približek za $y(1)$.
2. Z metodo po vaši izbiri poiščite približek za $y(2)$ na 5 decimalk natančno.
3. Rešite robni problem za zgornjo diferencialno enačbo

   $$y'(0) = 0, \quad y(2) = 1$$

   in izračunajte $y(0)$ na 5 decimalk natančno.

Izpit iz Numerične matematike

Ljubljana, 10. 7. 2017

1. Gauss-Lobatove kvadrature na 4 vozliščih so podane s formulo:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \frac{1}{6}\left(f(1)+f(-1)\right)+\frac{5}{6}\left(f(x_2)+f(-x_2)\right) \tag{1}$$

   kjer je vozlišče $x_2 = \sqrt{\frac{1}{5}}$.

   (a) Formulo (1) predelaj za poljubnem interval in izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta grafa funkcij

   $$f(x) = 2^{-x} \text{ in } g(x) = \sin(x)$$

   med prvim in drugim presečiščem obeh grafov.

   (b) Izpelji sestavljeno pravilo za integral na poljubnem intervalu, tako da interval razdeliš na podintervale enake dolžine in na vsakem podintervalu uporabiš predelano formulo (1). S sestavljenim pravilom izračunaj ploščino iz prejšnje točke na 10 decimalk natančno.

2. S programom za numerično reševanje diferencialnih enačb, smo prišli do naslednjih približkov za rešitev navadne diferencialne enačbe 2. reda

x	1.56	1.57	1.58
y	1.079612	0.079633	-0.920354
y'	-99.994	-100.000	-99.996

   Poišči čim boljši približek za ničlo rešitve diferencialne enačbe y zgolj s podatki iz tabele.

Izpit iz Numerične matematike

Ljubljana, 12. 9. 2017

1. Triosminske kvadrature so podane s formulo:

$$\int_0^{3h} f(x)dx \simeq \frac{3}{8}\left(f(0) + 3f(h) + 3f(2h) + f(3h)\right). \tag{1}$$

   (a) Formulo (1) predelaj za poljubnem interval in izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta grafa funkcij

   $$f(x) = 2^{-x} \text{ in } g(x) = \sin(x)$$

   med prvim in drugim presečiščem obeh grafov.

   (b) Izpelji sestavljeno pravilo za integral na poljubnem intervalu, tako da interval razdeliš na podintervale enake dolžine in na vsakem podintervalu uporabiš predelano formulo (1). S sestavljenim pravilom izračunaj ploščino iz prejšnje točke na 10 decimalk natančno.

2. Funkcija $y(t)$ je podana kot rešitev začetnega problema za diferencialno enačbo

$$y''(t) + \frac{1}{2}y'(t) + 3y(t)^3 = 0, \quad y'(0) = 0, y(0) = 1.$$

   (a) Z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.5$ poiščite približek za $y(1)$.

   (b) Z metodo po vaši izbiri poiščite približek za $y(2)$ na 5 decimalk natančno.

   (c) Rešite robni problem za zgornjo diferencialno enačbo

   $$y'(0) = 0, \quad y(2) = 1$$

   in izračunajte $y(0)$ na 5 decimalk natančno.

Izpit iz Numerične matematike

Ljubljana, 13. 6. 2018

1. Dana je 3-diagonalna diagonalno dominantna matrika A.

   (a) Izpeljite učinkovit algoritem za LU razcep matrike. Koliko množenj je potrebnih za $n \times n$ matriko? Koliko prostora potrebujemo za faktorja L in U?

   (b) Izračunajte LU razcep za $n \times n$ matriko $A = [a_{ij}]$ z elementi

   $$a_{ij} = \begin{cases} 1; & |i-j| = 1 \\ -2; & i = j \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

   za $n = 4$, $n = 20$ in $n = 100000$ in poiščite rešitev sistema $Ax = b$, kjer je $b = [1, 1, \ldots 1]$. Rešitev predstavite grafično z ukazom `plot(x)`.

2. Poišči kubične polinome p_{00}, p_{01}, p_{10} in p_{11}, za katere velja:

   $$\begin{array}{llll} p_{00}(0) = 1 & p'_{00}(0) = 0 & p_{00}(1) = 0 & p'_{00}(1) = 0 \\ p_{01}(0) = 0 & p'_{01}(0) = 1 & p_{01}(1) = 0 & p'_{01}(1) = 0 \\ p_{10}(0) = 0 & p'_{10}(0) = 0 & p_{10}(1) = 1 & p'_{10}(1) = 0 \\ p_{11}(0) = 0 & p'_{11}(0) = 0 & p_{11}(1) = 0 & p'_{11}(1) = 1 \end{array}$$

   (a) Funkciji $\sin(x)$ in $\cos(x)$ interpolirajte s kubičnim zlepkom na intervalu $[0, \pi]$. Uporabite vrednosti funkcije in njenega odvoda v točkah $0, \pi/2$ in π. Zlepka zapišite s polinomi p_{ij}.

   (b) Določite maksimalno napako interpolacije.

   (c) Uporabite zlepka in določite vrednost x, pri katerem je vrednost sin enaka $\frac{1}{3}$. Kolikšna je napaka?

Izpit iz numerične matematike

Ljubljana, 28. 6. 2018

Prosimo, da računalnike v učilnici pred uporabo

- **ponovno zaženite**
- ob zagonu pritisnite tipko **F12** in izberite zagon z omrežja
- v rdečem meniju izberite **Nummat**

Na voljo boste imeli programska jezika `Octave` in `Python`.

1 Prva naloga

Naj bo A diagonalno dominantna matrika z neničelnimi elementi

$$a_{ii} = -2; a_{i+1,i} = -1; a_{i,i+1} = 1; a_{i,2n-i+1} = 1; \quad i = 1, \dots n$$
$$a_{ii} = -2; a_{i,2n-i+1} = -1; a_{i-1,i} = 1; a_{i,i-1} = 1; \quad i = n+1, \dots 2n$$

1. Za $n = 3$ poiščite po absolutni vrednosti največjo in najmanjšo lastno vrednost ter pripadajoči lastni vektor matrike A z (inverzno) potenčno metodo. Za reševanje sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ uporabite LU-razcep.
2. Kolikšna je časovna in prostorska zahtevnost enega koraka inverzne iteracije za matriko A.
3. Poišči najmanjšo lastno vrednost in pripadajoči lastni vektor za matriko A za $n = 50000$. Komponente enotskega narišite na graf z ukazom `plot`.

2 Druga naloga

Funkcija $F(\phi)$ je podana z eliptičnim integralom 1. vrste

$$F(x) = \int_0^x \frac{d\phi}{\sqrt{1 - m\sin(\phi)^2}}.$$

za $m = 0.99$.

1. Poiščite približek za $F(1)$ z Gauss-Legendrovimi kvadraturami s 1, 2, 3, 4 in 5 vozlišči. Ocenite napako vsakega od približkov.

2. Skicirajte graf funkcije F na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$.

3. Poiščite vrednost x, pri kateri $K(x)$ doseže vrednost 1. Vse približke izračunajte na toliko mest, kot jih omogoča Gauss-Legendrova kvadratura najvišjega reda.

n	vozlišča x_i	uteži w_i
1	0	2
2	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	$0, \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{8}{9}, \frac{5}{9}$
4	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}, \pm\sqrt{\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}, \frac{18-\sqrt{30}}{36}$
5	$0, \pm\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\frac{10}{7}}}, \pm\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{128}{225}, \frac{322+13\sqrt{70}}{900}, \frac{322-13\sqrt{70}}{900}$

Tabela 1: Vozlišča in uteži za Gauss-Legendrove kvadrature $\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \sum_i w_i f(x_i)$.

Izpit iz Numerične matematike

Ljubljana, 22. 8. 2018

1. Poišči približne koordinate presečišč parametrično podanih krivulj

$$\begin{aligned}(x_1(t), y_1(t)) &= (\sin(t), 2\cos(t)) \\ (x_2(s), y_2(s)) &= (s^2, e^s)\end{aligned}$$

   Namig: Reši enačbe za parametra t in s.

   Bonus: Približno izračunaj ploščino območja, ki ga omenjeni krivulji omejujeta. Uporabiš lahko formulo za ploščino območja med krivuljo in y-osjo

$$p = \int_{y_1}^{y_2} x dy.$$

2. Naj bo $y(t)$ rešitev začetnega problema za diferencialno enačbo

$$y''(t) - \sin(t)y'(t) + y(t) = 0 \quad y(0) = 1; y'(0) = 0.$$

   (a) Poišči približek za $y(1)$ z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.5$.

   (b) Poišči približek za $y(1)$ na 5 decimalnih mest z metodo po lastni izbiri. Razloži, kako si ocenil napako.

   (c) Poišči vsaj eno ničlo funkcije $y(x)$.

Izpit iz Numerične matematike

Ljubljana, 11. 6. 2019

1. Vrednost funkcije $y = f(x)$ v točki x je dana kot rešitev enačbe
$$\tan y = xy$$
na intervalu $y \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.
   (a) Izračunaj vrednost $f(1)$.
   (b) Izračunaj
   $$\int_0^1 f(x)dx.$$

2. Dani sta matrika A dimenzij $n \times m$ in matrika B dimenzij $n \times k$, kjer je $k < n$. Iščemo matriko X za katero je
$$\|A - B \cdot X\|^2_{frobenius} = \sum_{ij} \left(a_{ij} - \sum_k (b_{ik} x_{kj}) \right)^2$$
minimalna.
   (a) Zapiši učinkovit algoritem, ki poišče X po metodi najmanjših kvadratov in uporabi QR razcep matrik A in/ali B.
   (b) Algoritem uporabi za matriki
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$
   (c) *Dodatna naloga* Aproksimacija ranga k matrike A dimenzij $n \times m$ je produkt matrik X in Y, dimenzij $n \times k$ in $k \times m$, za katere je
   $$\|A - Y \cdot X\|^2_{frobenius}$$
   minimalna. Poišči aproksimacijo ranga 2 za matriko A iz prejšnje točke. Izmenično spreminjaj faktorja X in Y pri čemer je en od faktorjev fiksen, drugega pa poiščeš z metodo najmanjših kvadratov. Začneš lahko z $Y = B$ ali z naključno izbrano matriko.

Izpit iz Numerične matematike

Ljubljana, 5. 7. 2019

1. Rešujemo sistem linearnih enačb $Ax = b$ dimenzije $2n \times 2n$, kjer so A, x in b podani bločno

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & B^T \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \text{ in } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Pri tem sta B in C matriki dimenzij $n \times n$, x_1, x_2, b_1, b_2 pa so vektorji dimenzije n.

   (a) Zapiši učinkovit algoritem za reševanje sistema $Ax = b$ z LU razcepom.

   (b) Naj bo B matrika z elementi $b_{ij} = 2^{-|i-j|}$, $C = I$ identična matrika in $b = [1, 1, \ldots 1]^T$ vektor samih enic. Poišči rešitev za $n = 3$ in $n = 20$.

   (c) S potenčno in inverzno potenčno metodo poišči po absolutni vrednosti največjo in najmanjšo lastno vrednost matrike A.

2. Naj bo $y(t)$ rešitev začetnega problema

$$y''(t) + y(t) = \sin(3t); \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

   (a) Izračunaj približek za $y(1)$ z Eulerjevo metodo s korakom 0.5.

   (b) Z metodo RK2

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(y(t), t) \\ k_2 &= hf(y(t) + k_1, t + h) \\ y(t+h) &\approx y(t) + \frac{k_1 + k_2}{2} \end{aligned}$$

   poišči približek za $y(1)$ na 5 decimalnih mest natančno. Koliko korakov potrebuješ za zahtevano natančnost?

   (c) *Dodatna naloga* Nariši rešitev v fazni ravnini (y, y') in preveri, da je rešitev periodična. Čim bolj natančno določi maksimalno vrednost $y(t)$!

Izpit iz Numerične matematike

Ljubljana, 27. 8. 2019

Računalnike ponovno zaženite in na začetku izberite ***Matematika****. Uporabniško ime je* ***student****, geslo pa* ***matematika****.*

1. Za neznano funkcijo je dana tabela

x	-1	0	1
y	0	1	0
y'	0	1	-1

   Poišči Hermitov kubični zlepek, ki interpolira zgornje podatke. Uporabi zlepek in

   (a) oceni maksimalno vrednost funkcije na $[-1, 1]$,

   (b) poišči približke za vrednosti $x \in [-1, 1]$, pri katerih je vrednost funkcije enaka $2/3$.

2. Gaussova kvadraturna formula s tremi vozlišči je dana kot

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9}\left(f(-x_1) + f(x_1)\right) + \frac{8}{9}f(0), \quad x_1 = \sqrt{\frac{3}{5}}. \tag{1}$$

   (a) S formulo (1) izračunaj integral

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \sin(x^2).dx$$

   (b) Formulo (1) priredi za poljuben interval in izračunaj

$$I_2 = \int_{0}^{3} \sin(x^2)dx.$$

   (c) Izpelji sestavljeno pravilo za (1). S sestavljenim pravilom izračunaj vrednost integrala I_2 na 5 mest.