# Osnove matematične analize
## Vaje 3

1. Nariši naslednjo podmnožico v $\mathbb{C}$:

$$A = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ 1 \leq |z| \leq 4, 0 \leq \arg(z) < \pi/4\}$$

Z območjem $A$ naredimo naslednjo transformacijo:

(a) prezrcalimo ga preko osi $\mathrm{Re}(z)$ (dobimo območje $B$),

(b) zavrtimo ga okoli števila 0 za kot $\pi$ (dobimo območje $C$),

(c) premaknemo ga za 2 v desno in 3 navzdol (dobimo območje $D$).

Zapiši predpis $z \mapsto f(z)$, ki opravi kompleksno transformacijo območja $A$ v območje $D$. Nariši tudi $f(A) = D$ in ugotovi, kam se s predpisom $f$ preslika število $1 + i$.

Rešitev: $z \mapsto -\overline{z} + 2 - 3i$, $1 + i \mapsto 1 - 2i$.

2. Nariši naslednjo podmnožico v $\mathbb{C}$:

$$A = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| \leq 1,\ \mathrm{Im}(z) < \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\}$$

Z območjem $A$ naredimo naslednjo transformacijo:

(a) zavrtimo ga okoli števila 1 za kot $-\pi/2$;

(b) zavrtimo ga okoli števila $-i$ za kot $\pi/2$.

Zapiši predpis $z \mapsto f(z)$, ki opravi to kompleksno transformacijo. Nariši tudi $f(A)$ ter ugotovi, kam se preslika število $1 + i \notin A$, če $f$ razširimo na celo kompleksno ravnino.

Rešitev: $z \mapsto z - 2$, $1 + i \mapsto -1 + i$.

3. * Nariši naslednje podmnožice v $\mathbb{C}$:

$$A = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ 1 \leq |z| \leq 3,\ 0 \leq \arg(z) < \frac{\pi}{2}\},$$

$$B = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \frac{1}{3} \leq |z| \leq 3,\ 0 \leq \arg(z) < \pi\},$$

$$C = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ 1 \leq |z| \leq 3,\ \pi < \arg(z) \leq \frac{3\pi}{2}\}.$$

Nato poišči kompleksne transformacije, ki transformirajo $A$ v $B$, $A$ v $C$ in $C$ v $A$.

Rešitev: $f_{AB} \colon z \mapsto \frac{1}{3}z^2$, $f_{CA} \colon z \mapsto -i\overline{z}$, $f_{AC} \colon z \mapsto -i\overline{z}$.

4. Reši naslednje enačbe in rešitve nariši v kompleksni ravnini:

(a) $z^2 = 1 + i$,

(b) * $z^3 = -\frac{27}{\sqrt{2}} + \frac{27}{\sqrt{2}}i$,

(c) $z^6 = -64i$,

(d) * $z^4 = -1 + i\sqrt{3}$.

Rešitve: (a) $r = \sqrt[4]{2}$, $\varphi_k = \frac{\pi}{8} + \pi k$, $k = 0, 1$, (b) $r = 3$, $\varphi_k = \frac{3\pi}{12} + \frac{8\pi k}{12}$, $k = 0, 1, 2$, (c) $r = 2$, $\varphi_k = \frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi k}{12}$, $k = 0, 1, \ldots, 5$, (d) $r = \sqrt[4]{2}$, $\varphi_k = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi k}{6}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

5. * Poišči algebraično enačbo stopnje 3 z realnimi koeficienti, ki ima eno od rešitev $1 + i$, vsoto rešitev pa 4.

   Rešitev: $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$.

6. * Poišči vsaj eno enačbo, ki ima za rešitev števila $2 + i$, $2 - i$ ter 3 in nima drugih rešitev.

   Rešitev:$x^3 - 7x^2 + 17x - 15$.

7. Poišči vsaj eno enačbo, ki ima za rešitev števila $2 + i$, $2 - i$, $-1 + 2i$ ter $-1 - 2i$ in nima drugih rešitev.

   Rešitev:$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 10x + 25$.

8. Kaj naj velja za število $a \in \mathbb{R}$, da bo imela enačba $z^2 + 2z - 3 + a = 0$ vsaj eno rešitev v $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

   Rešitev: $a \leq 4$.

9. Za vsako izmed spodnjih zaporedij razišči monotonost, omejenost in konvergenco. Če imajo limito določi tudi prvi člen zaporedja, ki je od nje oddaljen za manj kot $\frac{1}{10}$.

   (a) * $a_n = \frac{n}{3n-1}$

   (b) $a_n = \frac{2^n-4}{2^n+4}$

   (c) $a_n = -\frac{n^2+n}{n^2+1}$

   Rešitve:

   (a) padajoče od $n = 1$ naprej, navzdol omejeno z 0, limita je $\frac{1}{3}$, $n_0 = 2$,

   (b) naraščajoče, navzgor omejeno z 1, limita je 1, $n_0 = 7$,

   (c) naraščajoče od $n = 2$ naprej, navzgor omejeno z 0, limita je $-1$, $n_0 = 1$.

10. Izračunaj naslednje limite zaporedij:

$$a) \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n + 1}{-2n^2 + n - 3} \qquad b) * \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$$

$$c) \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad d) \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n^2+1} - n + 3}{\sqrt{n^4 + n - 1} + n - 6}$$

Rešitve: (a) $-\frac{1}{2}$, (b) 3, (c) 0, (d) 1.