

Osnove matematične analize

Vaje, 3. teden

1. * Nariši naslednjo podmnožico v $\mathbb{C}$:

$$A = \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 1, \operatorname{Im}(z) < \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\}$$

Z območjem A naredimo naslednjo transformacijo:

- (a) zavrtimo ga okoli števila 1 za kot $-\pi/2$;
- (b) zavrtimo ga okoli števila $-i$ za kot $\pi/2$.

Zapiši predpis $z \mapsto f(z)$, ki opravi to kompleksno transformacijo. Nariši tudi $f(A)$ ter ugotovi, kam se preslika število $1+i \notin A$, če f razširimo na celo kompleksno ravnino.

Rešitev: $z \mapsto z - 2, 1+i \mapsto -1+i$.

2. * Nariši naslednje podmnožice v $\mathbb{C}$:

$$A = \{z \in \mathbb{C} ; 1 \leq |z| \leq 3, 0 \leq \arg(z) < \frac{\pi}{2}\},$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} ; \frac{1}{3} \leq |z| \leq 3, 0 \leq \arg(z) < \pi\},$$

$$C = \{z \in \mathbb{C} ; 1 \leq |z| \leq 3, \pi < \arg(z) \leq \frac{3\pi}{2}\}.$$

Nato poišči kompleksne transformacije, ki transformirajo A v B , A v C in C v A .

Rešitev: $f_{AB}: z \mapsto \frac{1}{3}z^2, f_{CA}: z \mapsto -i\bar{z}, f_{AC}: z \mapsto -i\bar{z}$.

3. Reši naslednje enačbe in rešitve nariši v kompleksni ravnini:

- (a) $z^2 = 1 + i$,
- (b) * $z^3 = -\frac{27}{\sqrt{2}} + \frac{27}{\sqrt{2}}i$,
- (c) $z^6 = -64i$,
- (d) $z^4 = -1 + i\sqrt{3}$.

Rešitve: (a) $r = \sqrt[4]{2}, \varphi_k = \frac{\pi}{8} + \pi k, k = 0, 1$, (b) $r = 3, \varphi_k = \frac{3\pi}{12} + \frac{8\pi k}{12}, k = 0, 1, 2$, (c) $r = 2, \varphi_k = \frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi k}{12}, k = 0, 1, \dots, 5$, (d) $r = \sqrt[4]{2}, \varphi_k = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi k}{6}, k = 0, 1, 2, 3$.

4. * Poišči algebraično enačbo stopnje 3 z realnimi koeficienti, ki ima eno od rešitev $1+i$, vsoto rešitev pa 4.

Rešitev: $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$.

5. Poišči vsaj eno enačbo, ki ima za rešitev števila $2+i, 2-i$ ter 3 in nima drugih rešitev.

Rešitev: $x^3 - 7x^2 + 17x - 15$.

6. Poišči vsaj eno enačbo, ki ima za rešitev števila $2+i, 2-i, -1+2i$ ter $-1-2i$ in nima drugih rešitev.

Rešitev: $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 10x + 25$.

7. Kaj naj velja za število $a \in \mathbb{R}$, da bo imela enačba $z^2 + 2z - 3 + a = 0$ vsaj eno rešitev v $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Rešitev: $a \leq 4$.

8. Za vsako izmed spodnjih zaporedij razišči monotonost, omejenost in konvergenco. Če imajo limito določi tudi prvi člen zaporedja, ki je od nje oddaljen za manj kot $\frac{1}{10}$.

(a) $a_n = \frac{n}{3n-1}$

(b) $a_n = \frac{2^n-4}{2^n+4}$

(c) $a_n = -\frac{n^2+n}{n^2+1}$

Rešitve:

(a) padajoče od $n = 1$ naprej, navzdol omejeno z 0, limita je $\frac{1}{3}$, $n_0 = 2$,

(b) naraščajoče, navzgor omejeno z 1, limita je 1, $n_0 = 7$,

(c) naraščajoče od $n = 2$ naprej, navzgor omejeno z 0, limita je -1 , $n_0 = 1$.

9. Izračunaj naslednje limite zaporedij:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{-2n^2 + n - 3}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n^2+1} - n + 3}{\sqrt{n^4+n-1} + n - 6}$

Rešitve: (a) $-\frac{1}{2}$, (b) 3, (c) 0, (d) 1.