

# Osnove matematične analize

## Vaje, 3. teden

1. Število  $z = \frac{1+3i}{1-i}$  zapiši v obliki  $x + iy$  in izračunaj  $|z|$  ter  $\arg(z)$ .

Rešitev:  $z = -1 + 2i$ ,  $|z| = \sqrt{5}$ ,  $\arg(z) = 2.03$ .

2. \* Nariši množico točk:

- (a)  $|\bar{z} + 2 - i| \leq 2$ ,
- (b)  $\operatorname{Re}(\bar{z} + 2 - i) \leq 2$ ,
- (c)  $\operatorname{Im}(\bar{z} + 2 - i) \leq 2$ .

Rešitev: prva množica je krog z radijem 2 in središčem  $(-2, -1)$ , druga je polravnina  $\{x \leq 0\}$ , tretja je polravnina  $\{y \geq -3\}$ .

3. \* Reši naslednje enačbe (brez pomoči zapisa  $z = x + iy$ ):

- (a)  $z^2 + z = 1$ ,
- (b)  $(2 + i)z + 2z - 3 = 4 + 6i$ .

Rešitev: (a)  $z_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $z_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ , (b)  $z = 2 + i$ .

4. \* Reši naslednje enačbe:

- (a)  $2z^2 - 3\bar{z}^2 = 10i$ ,
- (b)  $\bar{z} - iz^2 = 0$ .

Rešitev: (a)  $z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = -1 - i$ , (b)  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = i$ ,  $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ,  $z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ .

5. Z uporabo polarne oblike in de Moivreove formule izračunaj

- (a) \*  $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^8$ ,
- (b) \*  $\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^{20}$ ,
- (c)  $(1 - i)^{5000}$ ,
- (d)  $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ .

Rešitev: (a)  $\frac{1}{16}$ , (b)  $2^{19}(-1 + i\sqrt{3})$ , (c)  $2^{2500}$ , (d)  $2^9(1 - i\sqrt{3})$ .

6. \* Nariši naslednjo podmnožico v  $\mathbb{C}$ :

$$A = \{z \in \mathbb{C} ; 1 \leq |z| \leq 4, 0 \leq \arg(z) < \pi/4\}$$

Z območjem  $A$  naredimo naslednjo transformacijo:

- (a) prezrcalimo ga preko osi  $\operatorname{Re}(z)$  (dobimo območje  $B$ ),
- (b) zavrtimo ga okoli števila 0 za kot  $\pi$  (dobimo območje  $C$ ),
- (c) premaknemo ga za 2 v desno in 3 navzdol (dobimo območje  $D$ ).

Zapiši predpis  $z \mapsto f(z)$ , ki opravi kompleksno transformacijo območja  $A$  v območje  $D$ .  
Nariši tudi  $f(A) = D$  in ugotovi, kam se s predpisom  $f$  preslika število  $1 + i$ .

Rešitev:  $z \mapsto -\bar{z} + 2 - 3i$ ,  $1 + i \mapsto 1 - 2i$ .

7. \* Nariši naslednjo podmnožico v  $\mathbb{C}$ :

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 1, \operatorname{Im}(z) < \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

Z območjem  $A$  naredimo naslednjo transformacijo:

- (a) zavrtimo ga okoli števila 1 za kot  $-\pi/2$ ;
- (b) zavrtimo ga okoli števila  $-i$  za kot  $\pi/2$ .

Zapiši predpis  $z \mapsto f(z)$ , ki opravi to kompleksno transformacijo. Nariši tudi  $f(A)$  ter ugotovi, kam se preslika število  $1 + i \notin A$ , če  $f$  razširimo na celo kompleksno ravnino.

Rešitev:  $z \mapsto z - 2$ ,  $1 + i \mapsto -1 + i$ .

8. Nariši naslednje podmnožice v  $\mathbb{C}$ :

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} ; 1 \leq |z| \leq 3, 0 \leq \arg(z) < \frac{\pi}{2} \right\},$$

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} ; \frac{1}{3} \leq |z| \leq 3, 0 \leq \arg(z) < \pi \right\},$$

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} ; 1 \leq |z| \leq 3, \pi < \arg(z) \leq \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

Nato poišči kompleksne transformacije, ki transformirajo  $A$  v  $B$ ,  $A$  v  $C$  in  $C$  v  $A$ .

Rešitev:  $f_{AB}: z \mapsto \frac{1}{3}z^2$ ,  $f_{CA}: z \mapsto -i\bar{z}$ ,  $f_{AC}: z \mapsto -i\bar{z}$ .