Osnove matematične analize
Vaje 2

1. * Število $z = \frac{1+3i}{1-i}$ zapiši v obliki $x + iy$ in izračunaj $|z|$ ter $\arg(z)$.

   Rešitev: $z = -1 + 2i$, $|z| = \sqrt{5}$, $\arg(z) = 2.03$.

2. Nariši naslednje množice točk v kompleksni ravnini:

   (a) * $|\overline{z} + 2 - i| \leq 2$,
   (b) * $\mathrm{Re}(\overline{z} + 2 - i) \leq 2$,
   (c) $\mathrm{Im}(\overline{z} + 2 - i) \leq 2$,
   (d) * $|z + i| < |z - i|$,
   (e) * $|z + i| < |z - 1|$,
   (f) * $|z - 1| + |z + 1| = 4$.

   Rešitve: krog z radijem 2 in središčem $(-2, -1)$, polravnina $\{x \leq 0\}$, polravnina $\{y \geq -3\}$, polravnina $\{x < 0\}$, polravnina $\{y < -x\}$, elipsa s polosema 2 in $\sqrt{3}$.

3. Reši naslednje enačbe (brez pomoči zapisa $z = x + iy$):

   (a) $z^2 + z = 1$,
   (b) $(2 + i)z + 2z - 3 = 4 + 6i$.

   Rešitve: (a) $z_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $z_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, (b) $z = 2 + i$.

4. * Reši naslednje enačbe:

   (a) $2z^2 - 3\overline{z}^2 = 10i$,
   (b) $\overline{z} - iz^2 = 0$.

   Rešitve: (a) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 - i$, (b) $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

5. Z uporabo polarne oblike in de Moivrove formule izračunaj

   (a) * $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^8$,
   (b) * $\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^{20}$,
   (c) $(1 - i)^{5000}$,
   (d) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

   Rešitve: (a) $\frac{1}{16}$, (b) $2^{19}(-1 + i\sqrt{3})$, (c) 2^{2500}, (d) $2^9(1 - i\sqrt{3})$.