Osnove matematične analize
Vaje, 2. teden

1. Število $z = \frac{1+3i}{1-i}$ zapiši v obliki $x + iy$ in izračunaj $|z|$ ter $\arg(z)$.

Rešitev: $z = -1 + 2i$, $|z| = \sqrt{5}$, $\arg(z) = 2.03$.

2. Nariši naslednje množice točk v kompleksni ravnini:

   (a) $|\overline{z} + 2 - i| \leq 2$,
   (b) * $\mathrm{Re}(\overline{z} + 2 - i) \leq 2$,
   (c) $\mathrm{Im}(\overline{z} + 2 - i) \leq 2$,
   (d) * $|z + i| < |z - i|$,
   (e) * $|z + i| < |z - 1|$,
   (f) * $|z - 1| + |z + 1| = 4$.

Rešitve: krog z radijem 2 in središčem $(-2, -1)$, polravnina $\{x \leq 0\}$, polravnina $\{y \geq -3\}$, polravnina $\{x < 0\}$, polravnina $\{y < -x\}$, elipsa s polosema 2 in $\sqrt{3}$.

3. Reši naslednje enačbe (brez pomoči zapisa $z = x + iy$):

   (a) $z^2 + z = 1$,
   (b) $(2 + i)z + 2z - 3 = 4 + 6i$.

Rešitve: (a) $z_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $z_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, (b) $z = 2 + i$.

4. * Reši naslednje enačbe:

   (a) $2z^2 - 3\overline{z}^2 = 10i$,
   (b) $\overline{z} - iz^2 = 0$.

Rešitve: (a) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 - i$, (b) $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

5. Z uporabo polarne oblike in de Moivrove formule izračunaj

   (a) * $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^8$,
   (b) * $\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^{20}$,
   (c) $(1 - i)^{5000}$,
   (d) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Rešitve: (a) $\frac{1}{16}$, (b) $2^{19}(-1 + i\sqrt{3})$, (c) 2^{2500}, (d) $2^9(1 - i\sqrt{3})$.

6. * Nariši naslednjo podmnožico v $\mathbb{C}$:

$$A = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ 1 \leq |z| \leq 4, 0 \leq \arg(z) < \pi/4\}$$

Z območjem A naredimo naslednjo transformacijo:

   (a) prezrcalimo ga preko osi $\mathrm{Re}(z)$ (dobimo območje B),

(b) zavrtimo ga okoli števila 0 za kot π (dobimo območje C),

(c) premaknemo ga za 2 v desno in 3 navzdol (dobimo območje D).

Zapiši predpis $z \mapsto f(z)$, ki opravi kompleksno transformacijo območja A v območje D. Nariši tudi $f(A) = D$ in ugotovi, kam se s predpisom f preslika število $1 + i$.

Rešitev: $z \mapsto -\overline{z} + 2 - 3i$, $1 + i \mapsto 1 - 2i$.

7. Nariši naslednjo podmnožico v $\mathbb{C}$:

$$A = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| \leq 1,\ \mathrm{Im}(z) < \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\}$$

Z območjem A naredimo naslednjo transformacijo:

(a) zavrtimo ga okoli števila 1 za kot $-\pi/2$;

(b) zavrtimo ga okoli števila $-i$ za kot $\pi/2$.

Zapiši predpis $z \mapsto f(z)$, ki opravi to kompleksno transformacijo. Nariši tudi $f(A)$ ter ugotovi, kam se preslika število $1 + i \notin A$, če f razširimo na celo kompleksno ravnino.

Rešitev: $z \mapsto z - 2$, $1 + i \mapsto -1 + i$.

8. Nariši naslednje podmnožice v $\mathbb{C}$:

$$A = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ 1 \leq |z| \leq 3,\ 0 \leq \arg(z) < \frac{\pi}{2}\},$$

$$B = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \frac{1}{3} \leq |z| \leq 3,\ 0 \leq \arg(z) < \pi\},$$

$$C = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ 1 \leq |z| \leq 3,\ \pi < \arg(z) \leq \frac{3\pi}{2}\}.$$

Nato poišči kompleksne transformacije, ki transformirajo A v B, A v C in C v A.

Rešitev: $f_{AB} : z \mapsto \frac{1}{3}z^2$, $f_{CA} : z \mapsto -i\overline{z}$, $f_{AC} : z \mapsto -i\overline{z}$.