

Osnove matematične analize

Vaje, 3. teden

1. Število $z = \frac{1+3i}{1-i}$ zapiši v obliki $x + iy$ in izračunaj $|z|$ ter $\arg(z)$.

Rešitev: $z = -1 + 2i$, $|z| = \sqrt{5}$, $\arg(z) = 2.03$.

2. * Nariši množico točk:

- (a) $|\bar{z} + 2 - i| \leq 2$,
(b) $\operatorname{Re}(\bar{z} + 2 - i) \leq 2$,
(c) $\operatorname{Im}(\bar{z} + 2 - i) \leq 2$.

Rešitev: prva množica je krog z radijem 2 in središčem $(-2, -1)$, druga je polravnina $\{x \leq 0\}$, tretja je polravnina $\{y \geq -3\}$.

3. * Reši naslednje enačbe (brez pomoči zapisa $z = x + iy$):

- (a) $z^2 + z = 1$,
(b) $(2 + i)z + 2z - 3 = 4 + 6i$.

Rešitev: (a) $z_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $z_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, (b) $z = 2 + i$.

4. * Reši naslednje enačbe:

- (a) $2z^2 - 3\bar{z}^2 = 10i$,
(b) $\bar{z} - iz^2 = 0$.

Rešitev: (a) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 - i$, (b) $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

5. Z uporabo polarne oblike in de Moivreove formule izračunaj

- (a) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^8$,
(b) $\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^{20}$,
(c) $(1 - i)^{5000}$,
(d) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Rešitev: (a) $\frac{1}{16}$, (b) $2^{19}(-1 + i\sqrt{3})$, (c) 2^{2500} , (d) $2^9(1 - i\sqrt{3})$.

6. * Nariši naslednjo podmnožico v \mathbb{C} :

$$A = \{z \in \mathbb{C} ; 1 \leq |z| \leq 4, 0 \leq \arg(z) < \pi/4\}$$

Z območjem A naredimo naslednjo transformacijo:

- (a) prezrcalimo ga preko osi $\operatorname{Re}(z)$ (dobimo območje B),
(b) zavrtimo ga okoli števila 0 za kot π (dobimo območje C),
(c) premaknemo ga za 2 v desno in 3 navzdol (dobimo območje D).

Zapiši predpis $z \mapsto f(z)$, ki opravi kompleksno transformacijo območja A v območje D .
Nariši tudi $f(A) = D$ in ugotovi, kam se s predpisom f preslika število $1 + i$.

Rešitev: $z \mapsto -\bar{z} + 2 - 3i$, $1 + i \mapsto 1 - 2i$.

7. * Nariši naslednjo podmnožico v \mathbb{C} :

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 1, \operatorname{Im}(z) < \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

Z območjem A naredimo naslednjo transformacijo:

- (a) zavrtimo ga okoli števila 1 za kot $-\pi/2$;
- (b) zavrtimo ga okoli števila $-i$ za kot $\pi/2$.

Zapiši predpis $z \mapsto f(z)$, ki opravi to kompleksno transformacijo. Nariši tudi $f(A)$ ter ugotovi, kam se preslika število $1 + i \notin A$, če f razširimo na celo kompleksno ravnino.

Rešitev: $z \mapsto z - 2$, $1 + i \mapsto -1 + i$.

8. Nariši naslednje podmnožice v \mathbb{C} :

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} ; 1 \leq |z| \leq 3, 0 \leq \arg(z) < \frac{\pi}{2} \right\},$$

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} ; \frac{1}{3} \leq |z| \leq 3, 0 \leq \arg(z) < \pi \right\},$$

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} ; 1 \leq |z| \leq 3, \pi < \arg(z) \leq \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

Nato poišči kompleksne transformacije, ki transformirajo A v B , A v C in C v A .

Rešitev: $f_{AB}: z \mapsto \frac{1}{3}z^2$, $f_{CA}: z \mapsto -i\bar{z}$, $f_{AC}: z \mapsto -i\bar{z}$.