Osnove matematične analize
Vaje 4

1. Za vsako izmed spodnjih zaporedij razišči monotonost, omejenost in konvergenco. Če imajo limito določi tudi prvi člen zaporedja, ki je od nje oddaljen za manj kot $\frac{1}{10}$.

$$a)\ a_n = \frac{n}{3n-1} \qquad b)\ *\, a_n = \frac{2^n-4}{2^n+4} \qquad c)\ *\, a_n = -\frac{n^2+n}{n^2+1}$$

Rešitve: (a) padajoče od $n=1$ naprej, navzdol omejeno z 0, limita je $\frac{1}{3}$, $n_0 = 2$, (b) naraščajoče, navzgor omejeno z 1, limita je 1, $n_0 = 7$, (c) naraščajoče od $n=2$ naprej, navzgor omejeno z 0, limita je -1, $n_0 = 1$.

2. * Izračunaj naslednje limite zaporedij:

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n+1}{-2n^2+n-3} \qquad b)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$$

$$c)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \qquad d)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n^2+1}-n+3}{\sqrt{n^4+n-1}+n-6}$$

Rešitve: (a) $-\frac{1}{2}$, (b) 3, (c) 0, (d) 1.

3. * Dokaži, da je zaporedje, podano kot

$$a_0 = 0,\ a_{n+1} = \frac{-2}{a_n+3},$$

konvergentno in izračunaj njegovo limito.

Rešitev: Zaporedje je padajoče in navzdol omejeno z -1, zato je konvergentno. Limita je -1.

4. Dokaži, da je zaporedje, podano kot

$$a_0 = -3,\ a_{n+1} = e^{a_n} - 1,$$

konvergentno in izračunaj njegovo limito. Kaj pa če vzamemo za prvi člen zaporedja $a_0 = 3$?

Rešitev: Zaporedje je naraščajoče in navzgor omejeno z 0, zato je konvergentno. Limita je 0. Če za prvi člen vzamemo 3, je še vedno naraščajoče, vendar ni navzgor omejeno in zato ne konvergira.

5. * Izračunaj limite naslednjih zaporedij.

$$(a)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \qquad (b)\ \lim_{n\to\infty} \left(2-\frac{n}{n+1}\right)^{2n-1}$$

$$(c)\ \lim_{n\to\infty} n\left(\log(n+1)-\log n\right) \qquad (d)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\sin(n^2)+n-6}{n^3-n+1}$$

Rešitve: (a) $\frac{1}{e}$, (b) e^2, (c) 1, (d) 0.

6. Izračunaj vsoto naslednjih geometrijskih vrst.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{3^n}$
(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{3^{2n-1}}$
(c) $3/2 + 1 + 2/3 + 4/9 + 8/27 + \ldots$
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3\cdot 2^{3n-2}}$
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{x}{2})^{3n}$, za tiste $x \in \mathbb{R}$, za katere vrsta konvergira.

Rešitve: (a) 5, (b) $\frac{4}{21}$, (c) $\frac{9}{2}$, (d) $-\frac{4}{15}$, (e) $\frac{x^3}{8-x^3}$.