Osnove matematične analize
Vaje 5

1. * Izračunaj naslednje limite zaporedij:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{-2n^2+n-3} \qquad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$$

$$c)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \qquad d)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n^2+1}-n+3}{\sqrt{n^4+n-1}+n-6}$$

Rešitve: (a) $-\frac{1}{2}$, (b) 3, (c) 0, (d) 1.

2. * Izračunaj limite naslednjih zaporedij.

$$(a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \qquad (b)\ \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n}{n+1}\right)^{2n-1}$$

$$(c)\ \lim_{n\to\infty} n\left(\log(n+1)-\log n\right) \qquad (d)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\sin(n^2)+n-6}{n^3-n+1}$$

Rešitve: (a) $\frac{1}{e}$, (b) e^2, (c) 1, (d) 0.

3. * Podani sta vrsti

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)} \quad \text{in} \quad b)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n.$$

Za vsako izmed omenjenih vrst ugani in dokaži formulo za $n-$to delno vsoto ter po definiciji izračunaj vsoto vrste, če obstaja.

Rešitve: Prva vrsta konvergira k $\frac{3}{2}$, delne vsote so $s_n=\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$, divergira, ker je alternirajoča, členi pa ne konvergirajo k 0.

4. Izračunaj vsoto naslednjih geometrijskih vrst.

(a) * $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{3^n}$
(b) * $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{3^{2n-1}}$
(c) $3/2+1+2/3+4/9+8/27+\ldots$
(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{3\cdot 2^{3n-2}}$
(e) * $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{2})^{3n}$, za tiste $x\in\mathbb{R}$, za katere vrsta konvergira.

Rešitve: (a) 5, (b) $\frac{4}{21}$, (c) $\frac{9}{2}$, (d) $-\frac{4}{15}$, (e) $\frac{x^3}{8-x^3}$.

5. Z uporabo korenskega, kvocientnega ali primerjalnega kriterija ugotovi, katere od spodnjih vrst kovergirajo in katere ne.

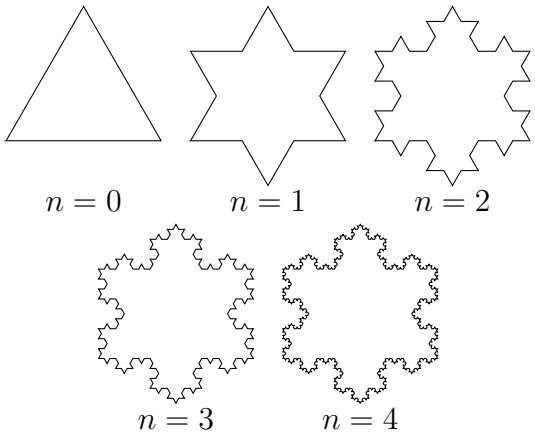
(a) * $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$,
(b) * $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^5+3}$,
(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(n+1)!}{(3n)!}$,
(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{4^n+4}$,
(e) * $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\cdot 2^{3n}}{n^4+1}$,
(f) * $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{\pi^n}$,
(g) $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

Rešitev: (a) kovergira (korenski ali kvocientni kriterij), (b) konvergira (primerjalni kriterij), (c) konvergira (kvocientni kriterij), (d) konvergira (primerjalni kriterij), (e) divergira (korenski kriterij), (f) divergira (kvocientni kriterij), (g) konvergira (kvocientni kriterij).

6. * Dva vlaka na istem tiru potujeta eden proti drugemu s hitrostjo 100km/h. Supermuha zapusti prvi vlak s hitrostjo 150km/h, odleti proti drugemu, se v trenutku obrne in z enako hitrostjo spet odleti proti prvemu. Tam se spet obrne in odleti proti drugemu vlaku ... Ugotovi kolikšno razdaljo bo preletela Supermuha do trenutka, ko se vlaka zaletita. Na začetku sta bila vlaka oddaljena 200km.

Rešitev: Supermuha prepotuje razdaljo 150km.

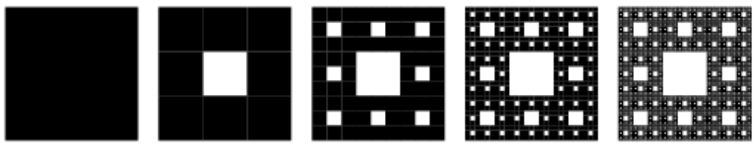
7. Kochova snežinka je fraktal, ki ga dobimo z zaporedjem iteracij kot na spodnji sliki.



Recimo, da pri $n = 0$ začnemo z enakostraničnim trikotnikom s stranico a. Poišči geometrijski vrsti, ki določata ploščino in obseg Kochove snežinke. Seštej jih. Kolikšni sta ploščina in obseg izraženi z a?

Rešitev: Ploščina je $\frac{2a^2\sqrt{3}}{5}$, obseg je neskončen.

8. Izračunaj obseg in ploščino preproge Sierpinskega.



Rešitev: Obseg je neskončen, ploščina pa 0.

9. Izračunaj obseg Hilbertove krivulje.

