

# Osnove matematične analize

## Vaje, 7. teden

1. \* Določi definijsko območje naslednjih funkcij in ugotovi, ali so injektivne. Če niso, definijsko območje smiselno zmanjšaj in nato določi inverzno funkcijo.

(a)  $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 3e^x + 2}$ ,

(b)  $f(x) = \log(2 \sin x - \sqrt{3})$ .

Rešitve:

(a)  $\mathcal{D}_f = (-\infty, 0] \cup [\log 2, \infty)$ ,  $\mathcal{Z}_f = [0, \infty)$ , niti liha niti soda, ni injektivna na  $\mathcal{D}_f$ , je injektivna na  $[\log 2, \infty)$ ,

(b)  $\mathcal{D}_f = \dots \cup (-\frac{5\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) \cup (\frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}) \dots$ ,  $\mathcal{Z}_f = (-\infty, \log(2 - \sqrt{3})]$ , niti liha niti soda, ni injektivna na  $\mathcal{D}_f$ , je injektivna, če se omejimo npr. na  $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ .

2. Izračunaj

$$\lim_{x \nearrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{in} \quad \lim_{x \searrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Rešitev: Obe limiti sta enaki  $e$ .

3. Skiciraj graf funkcije  $f$  za  $a = -1$  in  $b = 1$ . Nato določi taki konstanti  $a$  in  $b$  (če obstajata), da bo  $f$  zvezna funkcija.

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2, & x \leq 0, \\ \sin(4x), & 0 < x \leq \frac{8\pi}{3}, \\ \frac{b\sqrt{3}}{x}, & x > \frac{8\pi}{3}. \end{cases}$$

Rešitev:  $a = 0$ ,  $b = \frac{4\pi}{3}$ .

4. \* Določi konstanto  $a$  (če obstaja), da bo  $f$  zvezna funkcija.

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(1 + \frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

Rešitev: Tak  $a$  ne obstaja, ker sta leva in desna limita v točki  $x = 0$  različni.

5. \* Določi konstanti  $a$  in  $b$ , da bo  $f$  zvezna funkcija.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)(x-2)}{x}, & x < 0, \\ ax + b, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2e^{x-1} - \cos(\pi x), & x > 1. \end{cases}$$

Rešitev:  $a = 9$ ,  $b = -6$ .

6. \* Prepričaj se, da je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+1}, & x \geq 0, \\ x-1, & x < 0. \end{cases}$$

zvezna na intervalu  $[-2, 2]$ . Poišči največjo vrednost  $M$  in najmanjšo vrednost  $m$ , ki ju zavzame na tem intervalu. Ali ima enačba  $f(x) = 0$  rešitev na tem intervalu? Kaj pa enačba  $f(x) = 3$ ? Poišči vse rešitve, če obstajajo!

Rešitev:  $m = -3$ ,  $M = \frac{1}{3}$ . Enačba  $f(x) = 0$  ima rešitev  $x = 1$ . Enačba  $f(x) = 3$  ni rešljiva, ker  $3 \notin [m, M]$ .

7. Prepričaj se, da je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ (x - 2)^2, & x \geq 1. \end{cases}$$

zvezna na intervalu  $[-1, 4]$ . Poišči največjo vrednost  $M$  in najmanjšo vrednost  $m$ , ki ju zavzame na tem intervalu. Ali ima enačba  $f(x) = 0$  rešitev na tem intervalu? Kaj pa enačba  $f(x) = 5$ ? Poišči vse rešitve, če obstajajo!

Rešitev:  $M = 4$ ,  $m = -1$ . Enačba  $f(x) = 0$  ima rešitvi  $x = 0$  in  $x = 2$ . Enačba  $f(x) = 5$  ni rešljiva, ker  $5 \notin [m, M]$ .