

Osnove matematične analize

Vaje, 7. teden

1. * Dva vlaka na istem tiru potujeta eden proti drugemu s hitrostjo 100km/h. Supermuha zapusti prvi vlak s hitrostjo 150km/h, odleti proti drugemu, se v trenutku obrne in z enako hitrostjo spet odleti proti prvemu. Tam se spet obrne in odleti proti drugemu vlaku ... Ugotovi kolikšno razdaljo bo preletela Supermuha do trenutka, ko se vlaka zaletita. Na začetku sta bila vlaka oddaljena 200km.

Rešitev: Supermuha prepotuje razdaljo 150km.

2. * Določi definicijsko območje naslednjih funkcij in ugotovi, ali so injektivne. Če niso, definicijsko območje smiselno zmanjšaj in nato določi inverzno funkcijo.

(a) $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 3e^x + 2}$,

(b) $f(x) = \log(2 \sin x - \sqrt{3})$.

Rešitve:

(a) $\mathcal{D}_f = (-\infty, 0] \cup [\log 2, \infty)$, $\mathcal{Z}_f = [0, \infty)$, niti liha niti soda, ni injektivna na \mathcal{D}_f , je injektivna na $[\log 2, \infty)$,

(b) $\mathcal{D}_f = \dots \cup \left(-\frac{5\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right) \dots$, $\mathcal{Z}_f = (-\infty, \log(2 - \sqrt{3})]$, niti liha niti soda, ni injektivna na \mathcal{D}_f , je injektivna, če se omejimo npr. na $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Skiciraj graf funkcije f za $a = -1$ in $b = 1$. Nato določi taki konstanti a in b (če obstajata), da bo f zvezna funkcija.

$$f(x) = \begin{cases} (x - a)^2, & x \leq 0, \\ \sin(4x), & 0 < x \leq \frac{8\pi}{3}, \\ \frac{b\sqrt{3}}{x}, & x > \frac{8\pi}{3}. \end{cases}$$

Rešitev: $a = 0$, $b = \frac{4\pi}{3}$.

4. * Določi konstanto a (če obstaja), da bo f zvezna funkcija.

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(1 + \frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

Rešitev: Tak a ne obstaja, ker sta leva in desna limita v točki $x = 0$ različni.

5. * Določi konstanti a in b , da bo f zvezna funkcija.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)(x - 2)}{x}, & x < 0, \\ ax + b, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2e^{x-1} - \cos(\pi x), & x > 1. \end{cases}$$

Rešitev: $a = 9$, $b = -6$.

6. * Prepričaj se, da je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+1}, & x \geq 0, \\ x-1, & x < 0. \end{cases}$$

zvezna na intervalu $[-2, 2]$. Poišči največjo vrednost M in najmanjšo vrednost m , ki ju zavzame na tem intervalu. Ali ima enačba $f(x) = 0$ rešitev na tem intervalu? Kaj pa enačba $f(x) = 3$? Poišči vse rešitve, če obstajajo!

Rešitev: $m = -3$, $M = \frac{1}{3}$. Enačba $f(x) = 0$ ima rešitev $x = 1$. Enačba $f(x) = 3$ ni rešljiva, ker $3 \notin [m, M]$.

7. Prepričaj se, da je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ (x-2)^2, & x \geq 1. \end{cases}$$

zvezna na intervalu $[-1, 4]$. Poišči največjo vrednost M in najmanjšo vrednost m , ki ju zavzame na tem intervalu. Ali ima enačba $f(x) = 0$ rešitev na tem intervalu? Kaj pa enačba $f(x) = 5$? Poišči vse rešitve, če obstajajo!

Rešitev: $M = 4$, $m = -1$. Enačba $f(x) = 0$ ima rešitvi $x = 0$ in $x = 2$. Enačba $f(x) = 5$ ni rešljiva, ker $5 \notin [m, M]$.