Osnove matematične analize
Vaje 6

1. Z uporabo korenskega, kvocientnega ali primerjalnega kriterija ugotovi, katere od spodnjih vrst kovergirajo in katere ne.

   (a) * $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+1)!}{(3n)!}$, (e) * $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \cdot 2^{3n}}{n^4+1}$, (g) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

   (b) * $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^5+3}$, (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n+4}$, (f) * $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\pi^n}$,

   Rešitev: (a) kovergira (korenski ali kvocientni kriterij), (b) konvergira (primerjalni kriterij), (c) konvergira (kvocientni kriterij), (d) konvergira (primerjalni kriterij), (e) divergira (korenski kriterij), (f) divergira (kvocientni kriterij), (g) konvergira (kvocientni kriterij).

2. * Določi definicijsko območje naslednjih funkcij in ugotovi, ali so injektivne. Če niso, definicijsko območje smiselno zmanjšaj in nato določi inverzno funkcijo.

   (a) $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 3e^x + 2}$,
   (b) $f(x) = \log(2 \sin x - \sqrt{3})$.

   Rešitve:

   (a) $\mathcal{D}_f = (-\infty, 0] \cup [\log 2, \infty)$, $\mathcal{Z}_f = [0, \infty)$, niti liha niti soda, ni injektivna na $\mathcal{D}_f$, je injektivna na $[\log 2, \infty)$,

   (b) $\mathcal{D}_f = \cdots \cup \left(-\frac{5\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right) \cdots$, $\mathcal{Z}_f = \left(-\infty, \log(2 - \sqrt{3})\right]$, niti liha niti soda, ni injektivna na $\mathcal{D}_f$, je injektivna, če se omejimo npr. na $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Izračunaj

   $$lim_{x \nearrow 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{in} \quad lim_{x \searrow 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

   Rešitev: Obe limiti sta enaki e.

4. * Določi konstanto a (če obstaja), da bo f zvezna funkcija.

   $$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(1 + \dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

   Rešitev: Tak a ne obstaja, ker sta leva in desna limita v točki $x = 0$ različni.

5. * Določi konstanti a in b, da bo f zvezna funkcija.

   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(3x)(x-2)}{x}, & x < 0, \\ ax + b, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2e^{x-1} - \cos(\pi x), & x > 1. \end{cases}$$

   Rešitev: $a = 9$, $b = -6$.

6. Skiciraj graf funkcije f za $a = -1$ in $b = 1$. Nato določi taki konstanti a in b (če obstajata), da bo f zvezna funkcija.

   $$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2, & x \leq 0, \\ \sin(4x), & 0 < x \leq \dfrac{8\pi}{3}, \\ \dfrac{b\sqrt{3}}{x}, & x > \dfrac{8\pi}{3}. \end{cases}$$

   Rešitev: $a = 0$, $b = \frac{4\pi}{3}$.

7. * Prepričaj se, da je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1}, & x \geq 0, \\ x-1, & x < 0. \end{cases}$$

zvezna na intervalu $[-2, 2]$. Poišči največjo vrednost M in najmanjšo vrednost m, ki ju zavzame na tem intervalu. Ali ima enačba $f(x) = 0$ rešitev na tem intervalu? Kaj pa enačba $f(x) = 3$? Poišči vse rešitve, če obstajajo!

Rešitev: $m = -3$, $M = \frac{1}{3}$. Enačba $f(x) = 0$ ima rešitev $x = 1$. Enačba $f(x) = 3$ ni rešljiva, ker $3 \notin [m, M]$.

8. Prepričaj se, da je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ (x-2)^2, & x \geq 1. \end{cases}$$

zvezna na intervalu $[-1, 4]$. Poišči največjo vrednost M in najmanjšo vrednost m, ki ju zavzame na tem intervalu. Ali ima enačba $f(x) = 0$ rešitev na tem intervalu? Kaj pa enačba $f(x) = 5$? Poišči vse rešitve, če obstajajo!

Rešitev: $M = 4$, $m = -1$. Enačba $f(x) = 0$ ima rešitvi $x = 0$ in $x = 2$. Enačba $f(x) = 5$ ni rešljiva, ker $5 \notin [m, M]$.