

# Osnove matematične analize

## Vaje, 8. teden

1. Prepričaj se, da je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ (x-2)^2, & x \geq 1. \end{cases}$$

zvezna na intervalu  $[-1, 4]$ . Poišči največjo vrednost  $M$  in najmanjšo vrednost  $m$ , ki ju zavzame na tem intervalu. Ali ima enačba  $f(x) = 0$  rešitev na tem intervalu? Kaj pa enačba  $f(x) = 5$ ? Poišči vse rešitve, če obstajajo!

Rešitev:  $M = 4$ ,  $m = -1$ . Enačba  $f(x) = 0$  ima rešitvi  $x = 0$  in  $x = 2$ . Enačba  $f(x) = 5$  ni rešljiva, ker  $5 \notin [m, M]$ .

2. \* Določi definicijsko območje funkcije

$$f(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{4}$$

in skiciraj nivojnice.

Rešitev:  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , nivojnice so elipse s središčem v izhodišču in polosema  $\sqrt{a}$ ,  $2\sqrt{a}$ .

3. \* Skiciraj definicijska območja in nivojnice danih funkcij.

(a)  $f(x, y) = \log(y - x^2 + 2)$ ,

(b)  $f(x, y) = e^{y/x}$ ,

(c)  $f(x, y) = \sqrt{x^{-1} \sin(y)}$ .

Rešitve:

(a)  $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \mid y > x^2 - 2\}$ , nivojnice so parabole  $y = x^2 + b$ ,  $b \in (-2, \infty)$ ,

(b)  $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \mid x \neq 0\}$ , nivojnice so premice skozi izhodišče brez izhodišča (razen  $y$ -osi),

(c)  $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \mid x \neq 0, x \cdot \sin y > 0\}$ , nivojnice so krivulje  $\sin y = a^2 x$ .

4. \* Izračunaj odvode naslednjih funkcij:

(a)  $f(x) = \sqrt{x}(2 - x^2)$ ,

(b)  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ,

(c)  $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$ ,

(d)  $f(x) = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$ .

Rešitve: (a)  $\frac{1}{2\sqrt{x}}(2-5x^2)$ , (b)  $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ , (c)  $\frac{2}{1-x^2}$ , (d)  $-\frac{x}{|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

5. Poišči presečišče tangent na krivuljo  $y = \frac{1}{1+x^2}$  v točkah  $x = -1$  in  $x = 1$ . Pod kakšnim kotom se sekata?

Rešitev: Krivulji se sekata v točki  $T(0, 1)$  pod kotom  $53.1^\circ$ .

6. \* Poišči tisto normalo na krivuljo  $y = x \log(x)$ , ki je pravokotna na premico z enačbo  $2x - 2y - 3 = 0$ .

Rešitev: Enačba normale je  $y = -x + 1$ .

7. \* Naj bo z enačbo  $5x^2 - 8xy + 5y^2 = 1$  implicitno podana funkcija  $y(x)$ .

- (a) Zapiši enačbi tangent na graf krivulje v obeh točkah, kjer je  $x = 0$ .  
(b) Za katere vrednosti  $x$  je naklon tangente enak  $k = \frac{1}{2}$ ?

Rešitvi: (a)  $y = \frac{4}{5}x + \frac{1}{\sqrt{5}}$  in  $y = \frac{4}{5}x - \frac{1}{\sqrt{5}}$ , (b)  $x = \pm\frac{1}{3}$ .

8. Z uporabo linearne aproksimacije približno izračunaj naslednje vrednosti:

- (a)  $\sqrt[3]{28}$ ,  
(b)  $\sqrt[4]{260}$ ,  
(c)  $\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)$ ,  
(d)  $\log 0.9$ ,  
(e)  $\log \sqrt{\sin(-0.05) + 0.95}$  (s funkcijo ene spremenljivke).

Rešitve: (a) 3.037 (3.036555...), (b) 4.016 (4.01553...), (c) 0.645 (0.6427876...), (d) -0.1 (-0.10536...), (e) -0.05 (-0.05267...).