Osnove matematične analize
Vaje 7

1. * Določi konstanto a (če obstaja), da bo f zvezna funkcija.

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(1 + \dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

Rešitev: Tak a ne obstaja, ker sta leva in desna limita v točki $x = 0$ različni.

2. * Določi konstanti a in b, da bo f zvezna funkcija.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(3x)(x-2)}{x}, & x < 0, \\ ax + b, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2e^{x-1} - \cos(\pi x), & x > 1. \end{cases}$$

Rešitev: $a = 9$, $b = -6$.

3. * Prepričaj se, da je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1}, & x \geq 0, \\ x - 1, & x < 0. \end{cases}$$

zvezna na intervalu $[-2, 2]$. Poišči največjo vrednost M in najmanjšo vrednost m, ki ju zavzame na tem intervalu. Ali ima enačba $f(x) = 0$ rešitev na tem intervalu? Kaj pa enačba $f(x) = 3$? Poišči vse rešitve, če obstajajo!

Rešitev: $m = -3$, $M = \frac{1}{3}$. Enačba $f(x) = 0$ ima rešitev $x = 1$. Enačba $f(x) = 3$ ni rešljiva, ker $3 \notin [m, M]$.

4. * Določi definicijsko območje funkcije

$$f(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{4}$$

in skiciraj nivojnice.

Rešitev: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, nivojnice so elipse s središčem v izhodišču in polosema $\sqrt{a}$, $2\sqrt{a}$.

5. * Skiciraj definicijska območja in nivojnice danih funkcij.

   (a) $f(x, y) = \log(y - x^2 + 2)$,
   (b) $f(x, y) = e^{y/x}$,
   (c) $f(x, y) = \sqrt{x^{-1} \sin(y)}$.

Rešitve:

(a) $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \mid y > x^2 - 2\}$, nivojnice so parabole $y = x^2 + b$, $b \in (-2, \infty)$,

(b) $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \mid x \neq 0\}$, nivojnice so premice skozi izhodišče brez izhodišča (razen y-osi),

(c) $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \mid x \neq 0, x \cdot \sin y > 0\}$, nivojnice so krivulje $\sin y = a^2 x$.

6. * Izračunaj odvode naslednjih funkcij:

(a) $f(x) = \sqrt{x}(2 - x^2)$,

(b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$,

(c) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$,

(d) $f(x) = \arcsin(\sqrt{1 - x^2})$.

Rešitve: (a) $\frac{1}{2\sqrt{x}}(2 - 5x^2)$, (b) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, (c) $\frac{2}{1-x^2}$, (d) $-\frac{x}{|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

7. Poišči presečišče tangent na krivuljo $y = \frac{1}{1+x^2}$ v točkah $x = -1$ in $x = 1$. Pod kakšnim kotom se sekata?

   Rešitev: Krivulji se sekata v točki $T(0, 1)$ pod kotom $53.1°$.

8. * Poišči tisto normalo na krivuljo $y = x \log(x)$, ki je pravokotna na premico z enačbo $2x - 2y - 3 = 0$.

   Rešitev: Enačba normale je $y = -x + 1$.

9. * Naj bo z enačbo $5x^2 - 8xy + 5y^2 = 1$ implicitno podana funkcija $y(x)$.

   (a) Zapiši enačbi tangent na graf krivulje v obeh točkah, kjer je $x = 0$.

   (b) Za katere vrednosti x je naklon tangente enak $k = \frac{1}{2}$?

   Rešitvi: (a) $y = \frac{4}{5}x + \frac{1}{\sqrt{5}}$ in $y = \frac{4}{5}x - \frac{1}{\sqrt{5}}$, (b) $x = \pm\frac{1}{3}$.

10. Z uporabo linearne aproksimacije približno izračunaj naslednje vrednosti:

    (a) $\sqrt[3]{28}$,

    (b) $\sqrt[4]{260}$,

    (c) $\sin(\frac{2\pi}{9})$,

    (d) $\log 0.9$,

    (e) $\log \sqrt{\sin(-0.05) + 0.95}$ (s funkcijo ene spremenljivke).

    Rešitve: (a) 3.037 (3.036555...), (b) 4.016 (4.01553...), (c) 0.645 (0.6427876...), (d) -0.1 (-0.10536...), (e) -0.05 (-0.05267...).