Osnove matematične analize
Vaje, 8.teden

1. * Izračunaj odvode naslednjih funkcij:

   (a) $f(x) = \sqrt{x}(2 - x^2)$,

   (b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$,

   (c) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$,

   (d) $f(x) = \arcsin(\sqrt{1 - x^2})$.

   Rešitve: (a) $\frac{1}{2\sqrt{x}}(2 - 5x^2)$, (b) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, (c) $\frac{2}{1-x^2}$, (d) $-\frac{x}{|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. * Poišči tisto normalo na krivuljo $y = x \log(x)$, ki je pravokotna na premico z enačbo $2x - 2y - 3 = 0$.

   Rešitev: Enačba normale je $y = -x + 1$.

3. * Naj bo z enačbo $5x^2 - 8xy + 5y^2 = 1$ implicitno podana funkcija $y(x)$.

   (a) Zapiši enačbi tangent na graf krivulje v obeh točkah, kjer je $x = 0$.

   (b) Za katere vrednosti x je naklon tangente enak $k = \frac{1}{2}$?

   Rešitvi: (a) $y = \frac{4}{5}x + \frac{1}{\sqrt{5}}$ in $y = \frac{4}{5}x - \frac{1}{\sqrt{5}}$, (b) $x = \pm\frac{1}{3}$.

4. Z uporabo linearne aproksimacije približno izračunaj naslednje vrednosti:

   (a) * $\sqrt[3]{28}$,

   (b) $\sqrt[4]{260}$,

   (c) * $\sin(\frac{2\pi}{9})$,

   (d) $\log 0.9$,

   (e) $\log \sqrt{\sin(-0.05) + 0.95}$.

   Rešitve: (a) 3.037 (3.036555...), (b) 4.016 (4.01553...), (c) 0.645 (0.6427876...), (d) -0.1 (-0.10536...), (e) -0.05 (-0.05267...).

5. Poišči točko T na premici $y = x$ za katero je vsota kvadratov razdalj do točk $(-1, 4)$ in $(3, 6)$ najmanjša možna.

   Rešitev: $T(3, 3)$.

6. * Določi in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije

$$g(x) = 12x^5 + 15x^4 - 40x^3 + 5.$$

   Rešitev: Lokalni maksimum je 181 pri $x = -2$, lokalni minimum je -8 pri $x = 1$.

7. * Med vsemi enakokrakimi trikotniki z danim obsegom p poišči tistega, ki ima največjo ploščino.

   Rešitev: Ploščina bo največja, ko bo trikotnik enakostraničen.

8. S pomočjo logaritmiranja poišči odvode naslednjih funkcij:

   (a) $f(x) = x^x$,

   (b) $f(x) = x^{1/x}$.

   Rešitvi: (a) $x^x(\log x + 1)$, (b) $x^{(-2+1/x)}(1 - \log x)$.

9. * Z L'Hospitalovim pravilom izračunaj

$$lim_{x\nearrow 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{in} \quad lim_{x\searrow 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Rešitev: Obe limiti sta enaki e.

10. * Z L'Hospitalovim pravilom izračunaj naslednje limite:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sin(2x)}{x-\sin(3x)}$,

(b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)\cdot\tan(x)$,

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2+e^x}{2x^3}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$,

(e) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$,

(f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+x}\right)^{x^2}$,

(g) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$.

Rešitve: (a) $-\frac{3}{2}$, (b) 1, (c) ∞, (d) $\frac{1}{2}$, (e) 0, (f) e, (g) 1.

11. Natančno nariši grafa spodnjih funkcij (določi definicijsko območje, ničle, simetrijo, limite na robu definicijskega območja, intervale naraščanja in padanja, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti in konkavnosti ter prevoje).

(a) $f(x)=\frac{-2x}{x^2+4}$

(b) * $f(x)=x\log(x)$

Rešitve:

(a) $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$, ničla pri $x=0$, lokalni maksimum pri $x=-2$, $f(-2)=\frac{1}{2}$, lokalni minimum pri $x=2$, $f(2)=-\frac{1}{2}$, konveksna na $(-\infty,-2\sqrt{3})\cup(0,2\sqrt{3})$, konkavna na $(-2\sqrt{3},0)\cup(2\sqrt{3},\infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty}=0$, $f(\pm 2\sqrt{3})=\mp\frac{\sqrt{3}}{4}\approx\mp 0.4$, $\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)=0$.

(b) $\mathcal{D}_f=(0,\infty)$, ničla pri $x=1$, lokalni minimum pri $x=\frac{1}{e}$, $f(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}\approx -0.37$, je konveksna, $\lim_{x\searrow 0}f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\searrow 0}f'(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f'(x)=\infty$.