Osnove matematične analize
Vaje, 9.teden

1. Z uporabo linearne aproksimacije približno izračunaj naslednje vrednosti:

   (a) * $\sqrt[3]{28}$,
   (b) $\sqrt[4]{260}$,
   (c) $\sin(\frac{2\pi}{9})$,
   (d) $\log 0.9$,
   (e) $\log\sqrt{\sin(-0.05)+0.95}$.

   Rešitve: (a) 3.037 (3.036555...), (b) 4.016 (4.01553...), (c) 0.645 (0.6427876...), (d) -0.1 (-0.10536...), (e) -0.05 (-0.05267...).

2. Poišči točko T na premici $y = x$ za katero je vsota kvadratov razdalj do točk $(-1, 4)$ in $(3, 6)$ najmanjša možna.

   Rešitev: $T(3, 3)$.

3. * Med vsemi enakokrakimi trikotniki z danim obsegom o poišči tistega, ki ima največjo ploščino.

   Rešitev: Ploščina bo največja, ko bo trikotnik enakostraničen.

4. S pomočjo logaritmiranja poišči odvode naslednjih funkcij:

   (a) $f(x) = x^x$,
   (b) $f(x) = x^{1/x}$.

   Rešitvi: (a) $x^x(\log x + 1)$, (b) $x^{(-2+1/x)}(1 - \log x)$.

5. * Določi in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije

$$g(x) = 12x^5 + 15x^4 - 40x^3 + 5.$$

   Rešitev: Lokalni maksimum je 181 pri $x = -2$, lokalni minimum je -8 pri $x = 1$.

6. * Z L'Hospitalovim pravilom izračunaj naslednje limite:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+\sin(2x)}{x-\sin(3x)}$,
   (b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x)\cdot\tan(x)$,
   (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-x^2+e^x}{2x^3}$,
   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$,
   (e) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$,
   (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2+x}\right)^{x^2}$,
   (g) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$.

   Rešitve: (a) $-\frac{3}{2}$, (b) 1, (c) ∞, (d) $\frac{1}{2}$, (e) 0, (f) e, (g) 1.

7. * Določi intervale konveksnosti in konkavnosti za spodnji funkciji in skiciraj grafa.

   (a) $f(x) = xe^{-x}$,
   (b) $g(x) = x\log(x)$.

8. Natančno nariši graf spodnjih funkcij (določi definicijsko območje, ničle, simetrijo, limite na robu definicijskega območja, intervale naraščanja in padanja, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti in konkavnosti ter prevoje).

(a) $f(x) = \frac{-2x}{x^2+4}$

(b) * $f(x) = x \log(x)$

Rešitve:

(a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, ničla pri $x = 0$, lokalni maksimum pri $x = -2$, $f(-2) = \frac{1}{2}$, lokalni minimum pri $x = 2$, $f(2) = -\frac{1}{2}$, konveksna na $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (0, 2\sqrt{3})$, konkavna na $(-2\sqrt{3}, 0) \cup (2\sqrt{3}, \infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} = 0$, $f(\pm 2\sqrt{3}) = \mp\frac{\sqrt{3}}{4} \approx \mp 0.4$, $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$.

(b) $\mathcal{D}_f = (0, \infty)$, ničla pri $x = 1$, lokalni minimum pri $x = \frac{1}{e}$, $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e} \approx -0.37$, je konveksna, $\lim_{x\searrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\searrow 0} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$.