Diskretne strukture UNI
Vaje 9

1. Imejmo množico izjavnih veznikov $N = \{0, 1, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \veebar, \downarrow, \uparrow\}$. Na $\mathcal{P}(N)$ definiramo relacijo $\leq$ tako: nabora $A, B \subseteq N$ sta v relaciji, $A \leq B$, natanko tedaj, ko lahko vsak izjavni izraz z vezniki iz A zapišemo v enakovredni obliki z vezniki iz B.

   (a) Utemelji, da je relacija $\leq$ refleksivna in tranzitivna.

   (b) Utemelji, da iz $A \subseteq B$ sledi $A \leq B$ (za vse $A, B \in \mathcal{P}(N)$).

   (c) Oglejmo si $A = \{0, \Leftrightarrow\}$ in $B = \{0, \neg, \Leftrightarrow\}$. Ali velja $A \leq B$? Ali velja $B \leq A$?

   (d) Je relacija $\leq$ simetrična? Je relacije $\leq$ antisimetrična?

   (e) Definirajmo novo relacijo $\simeq$ na $\mathcal{P}(N)$: $A \simeq B$, če $A \leq B \wedge B \leq A$. Utemelji, da je $\simeq$ ekvivalenčna relacija.

   (f) Relacija $\leq$ na $\mathcal{P}(N)$ nam sedaj določa relacijo $\lesssim$ na $\mathcal{P}(N)/\simeq$: $[A] \lesssim [B]$, če $A \leq B$. Premisli, da je ta opis smiseln, in utemelji, da je $\lesssim$ relacija delne urejenosti.

2. Naj bo B_n množica naravnih števil od 0 do $2^n - 1$. Ta števila predstavimo v dvojiškem zapisu; število $b \in B_n$ zapišemo kot $b = \mathsf{b}_n \cdots \mathsf{b}_2 \mathsf{b}_1$, kjer so števke b_i enake 0 ali 1. Na B_n definiramo relacijo $\preceq$ z

$$a \preceq b \quad \Leftrightarrow \quad \forall i\, (\mathsf{a}_i \leq \mathsf{b}_i).$$

   (a) Ali velja: $2 \preceq 3$, $5 \preceq 8$, $4 \preceq 5$?

   (b) Prepričaj se, da je $\preceq$ relacija delne urejenosti.

   (c) Skiciraj Hassejev diagram te delne urejenosti v primeru $n = 3$.

   (d) Ali je $\preceq$ relacija linearne urejenosti? Za kateri n oziroma zakaj ne? Kako to vidiš iz Hassejevega diagrama?

3. Funkcija $\sigma_0 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je dana s $\sigma_0(0) = 0$, za $n > 0$ pa z opisom

$$\sigma_0(n) = \text{število vseh deliteljev } n.$$

   Ali je σ_0 injektivna? Ali je σ_0 surjektivna?

4. Funkcija $\sigma_1 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je dana s $\sigma_1(0) = 0$, za $n > 0$ pa z opisom

$$\sigma_1(n) = \text{vsota vseh deliteljev } n.$$

   (a) Izračunaj $\sigma_1(n)$ za $n \in \{1, 2, \ldots, 11\}$.

   (b) Poišči vse n, za katere je $\sigma_1(n) = 12$.

   (c) Ali obstaja n, da je $\sigma_1(n) = 2n$? Ali ima enačba $\sigma_1(n) = 2n$ neskončno rešitev?

   (d) Ali je σ_1 injektivna? Ali je σ_1 surjektivna?

5. Naj bo $I = (0, 1)$ odprt interval realnih števil med 0 in 1, $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \ldots\}$ pa množica strogo pozitivnih naravnih števil. Vsako število $x \in I$ lahko zapišemo v **neskončnem** decimalnem zapisu

$$0.a_1 a_2 a_3 \ldots$$

   (pri čemer končno decimalno število dopolnimo z neskončnim zaporedjem ničel). Za vsako tako število x nato preštejemo, koliko ničel ima pred prvo neničelno števko v tem

decimalnem zapisu, in, če jih je k, preberemo $f(x)$ kot k nadaljnih števk decimalnega zapisa števila x:

$$x = \underbrace{0.00\ldots0}_{k \text{ ničel}} \underbrace{d_1 d_2 \ldots d_k}_{\text{števke } f(x)} d_{k+1} \ldots$$

Ta opis določa preslikavo $f : I \to \mathbb{N}^+$.

Nekaj primerov: $f(0.012) = 12$, $f(0.0034) = f(0.0034000\ldots) = 340$, $f(\frac{\pi}{10}) = 3$.

(a) Izračunaj $f(0.1234)$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{20}\right)$ in $f\left(\frac{\pi}{1000}\right)$.

(b) Ali je preslikava f injektivna?

(c) Ali je preslikava f surjektivna?