Diskretne strukture UNI
Vaje, 9. teden

1. Na množici $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ definiramo relacijo
$$R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,1),(4,1)\}.$$
   (a) Nariši grafe relacij R, $R^2 = R * R$ in $R^3 = R * R * R$.
   (b) Katere izmed zgornjih relacij so refleksivne, simetrične in/ali tranzitivne?

2. Na množici $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ definiramo relacijo
$$R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,7),(7,1)\}.$$
   (a) Relacijo S definiramo kot $S = R \cup \{(1,3)\}$. Izračunaj relacijo S^{10}.
   (b) Pokaži, da je $S^{2024} = U_A$ (kjer je U_A univerzalna relacija na množici A, tj. $U_A = A \times A$).
   (c) Relacijo T definiramo kot $T = R \cup \{(a,b)\}$, kjer je (a,b) poljuben urejen par, ki *ni* v R. Pokaži, da tudi v tem primeru velja $T^{2024} = U_A$.

3. Na množici $A = \{1,2,\ldots,20\}$ definiramo relacijo R:
$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad y - x \text{ je praštevilo.}$$
   (a) Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti relacije R.
   (b) Določi množico $\{y \in A \mid 10Ry\}$

4. Na množici števil $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ definiramo relacijo R:
$$aRb \quad \Leftrightarrow \quad \gcd(a,b) > 3.$$
   (a) Pokaži, da je $R \subseteq R^2$.
   (b) Ali je relacija R refleksivna, simetrična ali tranzitivna?
   (c) Ali je relacija R^2 refleksivna, simetrična ali tranzitivna?

5. Na množici naravnih števil definiramo relacijo R:
$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad 5 \text{ deli } x + 4y.$$
   Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija in opiši vse ekvivalenčne razrede.

6. Na $A = \{1,2,\ldots,100\}$ je podana relacija R s predpisom
$$aRb \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}_0 : (2^k|a \Leftrightarrow 2^k|b).$$
   (a) Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija.
   (b) Poišči [4].
   (c) Koliko je vseh ekvivalenčnih razredov?

7. V množici celih števil $\mathbb{Z}$ je dana relacija
$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad 7 \text{ deli } x^2 - y^2.$$
   (a) Dokaži, da je relacija R ekvivalenčna.
   (b) Določi ekvivalenčni razred $[1]_R$ števila 1.
   (c) Določi moč faktorske množice $\mathbb{Z}/R$.