

Diskretne strukture UNI

Vaje 10

1. Na množici $A = \{1, 2, \dots, 20\}$ definiramo relacijo R :

$$xRy \Leftrightarrow y - x \text{ je praštevilo.}$$

- (a) Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti relacije R .
- (b) Določi množico $\{y \in A \mid 10Ry\}$

2. Na množici števil $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ definiramo relacijo R :

$$aRb \Leftrightarrow \gcd(a, b) > 3.$$

- (a) Pokaži, da je $R \subseteq R^2$.
- (b) Ali je relacija R refleksivna, simetrična ali tranzitivna?
- (c) Ali je relacija R^2 refleksivna, simetrična ali tranzitivna?

3. Na množici naravnih števil definiramo relacijo R :

$$xRy \Leftrightarrow 5 \text{ deli } x + 4y.$$

Pokaži, da je R refleksivna, simetrična in tranzitivna relacija.

4. Imejmo množico izjavnih veznikov $N = \{0, 1, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists, \downarrow, \uparrow\}$. Na $\mathcal{P}(N)$ definiramo relacijo \leq tako: nabora $A, B \subseteq N$ sta v relaciji, $A \leq B$, natanko tedaj, ko lahko vsak izjavni izraz z vezniki iz A zapišemo v enakovredni obliki z vezniki iz B .

- (a) Utemelji, da je relacija \leq refleksivna in tranzitivna.
- (b) Utemelji, da iz $A \subseteq B$ sledi $A \leq B$ (za vse $A, B \in \mathcal{P}(N)$).
- (c) Oglejmo si $A = \{0, \Leftrightarrow\}$ in $B = \{0, \neg, \Leftrightarrow\}$. Ali velja $A \leq B$? Ali velja $B \leq A$?
- (d) Je relacija \leq simetrična?

5. Naj bo B_n množica naravnih števil od 0 do $2^n - 1$. Ta števila predstavimo v dvojiškem zapisu; število $b \in B_n$ zapišemo kot $b = b_n \cdots b_2 b_1$, kjer so številke b_i enake 0 ali 1. Na B_n definiramo relacijo \leq

$$a \leq b \Leftrightarrow \forall i (a_i \leq b_i).$$

- (a) Ali velja: $2 \leq 3$, $5 \leq 8$, $4 \leq 5$?
- (b) Prepričaj se, da je \leq relacija delne urejenosti.
- (c) Skiciraj Hassejev diagram te delne urejenosti v primeru $n = 3$.
- (d) Ali je \leq relacija linearne urejenosti? Za kateri n oziroma zakaj ne? Kako to sledi iz Hassejevega diagrama?

6. V množici celih števil \mathbb{Z} je dana relacija

$$xRy \Leftrightarrow 7 \text{ deli } x^2 - y^2.$$

- (a) Dokaži, da je relacija R ekvivalenčna.
- (b) Določi ekvivalenčni razred $[1]_R$ števila 1.
- (c) Določi moč factorske množice \mathbb{Z}/R .

7. Funkcija $\sigma_0: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je dana s $\sigma_0(0) = 0$, za $n > 0$ pa z opisom

$$\sigma_0(n) = \text{število vseh deliteljev } n.$$

Ali je σ_0 injektivna? Ali je σ_0 surjektivna?

8. Funkcija $\sigma_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je dana s $\sigma_1(0) = 0$, za $n > 0$ pa z opisom

$$\sigma_1(n) = \text{vsota vseh deliteljev } n.$$

(a) Izračunaj $\sigma_1(n)$ za $n \in \{1, 2, \dots, 11\}$.

(b) Poišči vse n , za katere je $\sigma_1(n) = 12$.

(c) Ali obstaja n , da je $\sigma_1(n) = 2n$? Ali ima enačba $\sigma_1(n) = 2n$ neskončno rešitev?

(d) Ali je σ_1 injektivna? Ali je σ_1 surjektivna?

9. Naj bo $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ Eulerjeva funkcija, tj.

$$\varphi(n) = \text{število naravnih števil med 1 in } n, \text{ ki so tuja } n.$$

(a) Poišči $\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \varphi(4), \varphi(5), \varphi(6)$.

(b) Ali je φ injektivna? Surjektivna?

(c) Dokaži, da za vse sode n velja

$$\varphi(n) \leq n/2.$$

(d) Ali za vse $n \geq 3$ velja

$$\varphi(\varphi(n)) < n/2?$$