Osnove matematične analize
Vaje, 10. teden

1. * Natančno nariši graf spodnjih funkcij (določi definicijsko območje, ničle, simetrijo, limite na robu definicijskega območja, intervale naraščanja in padanja, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti in konkavnosti ter prevoje).

   (a) $f(x) = \frac{-2x}{x^2+4}$ (b) $f(x) = x\log(x)$

   Rešitve:

   (a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, ničla pri $x = 0$, lokalni maksimum pri $x = -2$, $f(-2) = \frac{1}{2}$, lokalni minimum pri $x = 2$, $f(2) = -\frac{1}{2}$, konveksna na $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (0, 2\sqrt{3})$, konkavna na $(-2\sqrt{3}, 0) \cup (2\sqrt{3}, \infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} = 0$, $f(\pm 2\sqrt{3}) = \mp\frac{\sqrt{3}}{4} \approx \mp 0.4$, $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$.

   (b) $\mathcal{D}_f = (0, \infty)$, ničla pri $x = 1$, lokalni minimum pri $x = \frac{1}{e}$, $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e} \approx -0.37$, je konveksna, $\lim_{x\searrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\searrow 0} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$.

2. * Z uporabo linearne aproksimacije za funkcijo dveh spremenljivk približno izračunaj vrednost spodnjega izraza.

$$\sqrt{\sin(-0.05) + 0.95}$$

   Rešitev: Točen rezultat: $0.948694\ldots$

3. * S pomočjo Taylorjevih polinomov $T_1(x)$ in $T_2(x)$ približno izračunaj $e^{0.1}$ in oceni napaki $R_1(x)$ ter $R_2(x)$.

   Rešitev: $e^{0.1} = 1.1$ oz. $e^{0.1} = 1.105$. Točen rezultat: $e^{0.1} = 1.1051709\ldots$, $0.005 < R_1 < 0.006$ in $0.000167 < R_2 < 0.000185$.

4. Naj bo $f(x) = \cos(x)$. S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunaj $\cos(0.1)$ na 5 decimalk natančno.

   Rešitev: $\cos(0.1) \approx 0.99500$. Točna vrednost: $\cos(0.1) = 0.995004165\ldots$

5. * Naj bo $f(x) = (x-1)\cos(x)$. S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunaj $f^{(4)}(0)$ in $f^{(5)}(0)$. Rezultat preveri še z odvajanjem!

   Rešitev: $f^{(4)}(0) = -1$, $f^{(5)}(0) = 5$.

6. * Izračunaj gradienta naslednjih funkcij.

   (a) $f(x,y) = \dfrac{1}{2x^2+y^2}$,

   (b) $f(x,y) = (2x-y)e^{x+y}$.

   Rešitvi:

   (a) $\operatorname{grad} f = \left(\frac{-4x}{(2x^2+y^2)^2}, \frac{-2y}{(2x^2+y^2)^2}\right)$,

   (b) $\operatorname{grad} f = \left(e^{x+y}(2+2x-y), e^{x+y}(-1+2x-y)\right)$.

7. * Dana je funkcija dveh spremenljivk $f(x,y) = x^2y$.

   (a) Izračunaj parcialna odvoda $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $\frac{\partial f}{\partial y}$ v točki $(1,1)$.

   (b) Izračunaj smerni odvod funkcije f v poljubni smeri v točki $(1,1)$. V kateri smeri je največji?

   (c) Skiciraj nivojsko krivuljo skozi točko $(1,1)$ in gradient v tej točki. V kakšni smeri kaže gradient glede na nivojsko krivuljo?

Rešitve:

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1$,

(b) $f_{(x,y)}(1,1) = \frac{2x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, največji je v smeri $(x,y) = (2,1)$,

(b) $\mathrm{grad} f(1,1) = (2,1)$, nivojnica ima enačbo $y = \frac{1}{x^2}$. Smerni koeficient tangente na nivojnico je -2, torej je smerni vektor tangente $(1,-2)$.

Ker je $(2,1) \cdot (1,-2) = 0$, je gradient pravokoten na nivojnico.

8. Določi definicijsko območje funkcije

$$f(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4}.$$

Skiciraj nivojnice.

Rešitev: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, nivojnice so elipse s središčem v izhodišču in polosema $\sqrt{a}$, $2\sqrt{a}$.

9. Nariši nivojnice funkcije $f(x,y) = y(x^2-1)$ in nato še pot od točke $(-2,1,3)$ do točke $(2,-1,-3)$, ki se nikjer ne vzpenja.

Rešitev: Nivojnice so krivulje $y = \frac{a}{x^2-1}$ za $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in pa premice $y = 0$, $x = 1$, $x = -1$ pri $a = 0$.