Osnove matematične analize
Vaje, 11. teden

1. * S pomočjo Taylorjevih polinomov $T_1(x)$ in $T_2(x)$ približno izračunaj $e^{0.1}$ in oceni napaki $R_1(x)$ ter $R_2(x)$.

Rešitev: $e^{0.1} = 1.1$ oz. $e^{0.1} = 1.105$. Točen rezultat: $e^{0.1} = 1.1051709\ldots$, $0.005 < R_1 < 0.006$ in $0.000167 < R_2 < 0.000185$.

2. * Dana je funkcija dveh spremenljivk $f(x, y) = x^2 y$.
   (a) Izračunaj parcialna odvoda $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $\frac{\partial f}{\partial y}$ v točki $(1, 1)$.
   (b) Izračunaj smerni odvod funkcije f v poljubni smeri v točki $(1, 1)$. V kateri smeri je največji?
   (c) Skiciraj nivojsko krivuljo skozi točko $(1, 1)$ in gradient v tej točki. V kakšni smeri kaže gradient glede na nivojsko krivuljo?

Rešitve:

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 1$,

(b) $f_{(x,y)}(1, 1) = \frac{2x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, največji je v smeri $(x, y) = (2, 1)$,

(b) $\mathrm{grad} f(1, 1) = (2, 1)$, nivojnica ima enačbo $y = \frac{1}{x^2}$. Smerni koeficient tangente na nivojnico je -2, torej je smerni vektor tangente $(1, -2)$. Ker je $(2, 1) \cdot (1, -2) = 0$, je gradient pravokoten na nivojnico.

3. Naj bo $f(x, y) = y(x^2 - 1)$.
   (a) Nariši nivojnice in poišči pot od točke $(-2, 1, 3)$ do točke $(2, -1, -3)$, ki se nikjer ne vzpenja.
   (b) V kateri smeri bi morali začeti spust iz točke $(2, 0)$, če bi se želeli spuščati po poti s tretjino maksimalne možne strmine?

Rešitev: (a) Nivojnice so krivulje $y = \frac{a}{x^2-1}$ za $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in pa premice $y = 0$, $x = 1$, $x = -1$ pri $a = 0$. (b) V smeri vektorja $(\pm 2\sqrt{2}, -1)$.

4. * Med točkami (x, y) v ravnini, ki zadoščajo zvezi $y = \frac{1}{x}$, poišči tiste, za katere je $f(x, y) = x^2 + y^2$ najmanjša. Rezultat geometrijsko interpretiraj.

Rešitev: $(1, 1)$ in $(-1, -1)$.

5. Dana je funkcija $f(x, y) = \left(x^2 + \frac{3}{4}\right) \cdot e^{-x^2-y^2}$. Poišči lokalne ekstreme in pri vsakem ugotovi, za katero vrsto ekstrema gre.

Rešitev: $(\frac{1}{2}, 0)$ in $(-\frac{1}{2}, 0)$ sta lokalna maksimuma.

6. Določi vse stacionarne točke funkcije
   (a) * $f(x, y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3y^3 - 150x$,
   (b) * $f(x, y) = x^4 + y^4 - 36xy$,
   (c) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$.

Rešitve:

(a) $(5, 0)$ je lokalni minimum, $(-5, 0)$ lokalni maksimum, $(3, 4)$ in $(-3, -4)$ sta sedli,

(b) $(0, 0)$ je sedlo, $(3, 3)$ in $(-3, -3)$ sta lokalna minimuma,

(c) $(0, 0)$ je lokalni maksimum, $(2, 0)$ je lokalni minimum.

7. Poišči minimum in maksimum funkcije $f(x,y) = xy$ na krogu

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Rešitev: V notranjosti kroga ni ekstremov (točka $(0,0)$ je sedlo). Na krožnici sta minimuma v $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, maksimuma sta v $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

8. * Na voljo imamo l metrov dolgo tanko palico. Iz nje izrežemo 12 krajših palic, iz katerih je mogoče sestaviti ogrodje kvadra. Izračunaj, kako dolge stranice kvadra moramo izrezati, da bomo dobili kvader z največjo možno površino.

Rešitev: Površina bo največja, ko bo kvader kocka.

9. Na kakšne kose moramo razrezati l metrov dolgo palico, da bo ploščina osnovne ploskve dobljenega kvadra enaka A, kvader z izrezanim skeletom pa bo imel največji možni volumen?

Rešitev: Volumen bo največji, ko bo osnovna ploskev kvadrat, tj. $x = y = \sqrt{A}$ in $z = \frac{l}{4} - 2\sqrt{A}$.