Diskretne strukture UNI
Vaje 10

1. Na množici naravnih števil definiramo relacijo R:
$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad 5 \text{ deli } x + 4y.$$
Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija in določi ekvivalenčne razrede R.

2. Naj bo $\mathbb{P}$ množica praštevil. Relacija R na $\mathbb{N}$ je podana s predpisom
$$aRb \;\Leftrightarrow\; \forall p \in \mathbb{P} : (p|a \Leftrightarrow p|b).$$
   (a) Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija.
   (b) Poišči [2] in [2021].
   (c) Ali obstaja ekvivalenčni razred z enim samim elementom?

3. Na $A = \{1, 2, \ldots, 100\}$ je podana relacija R s predpisom
$$aRb \;\Leftrightarrow\; \forall k \in \mathbb{N}_0 : (2^k|a \Leftrightarrow 2^k|b).$$
   (a) Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija.
   (b) Zapiši $[4]_R$. Koliko je vseh ekvivalenčnih razredov?

4. V množici celih števil $\mathbb{Z}$ je dana relacija
$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad 7 \text{ deli } x^2 - y^2.$$
   (a) Dokaži, da je relacija R ekvivalenčna.
   (b) Določi ekvivalenčni razred $[1]_R$ števila 1.
   (c) Določi moč faktorske množice $\mathbb{Z}/R$.

5. Imejmo množico izjavnih veznikov $N = \{0, 1, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \veebar, \downarrow, \uparrow\}$. Na $\mathcal{P}(N)$ definiramo relacijo $\leq$ tako: nabora $A, B \subseteq N$ sta v relaciji, $A \leq B$, natanko tedaj, ko lahko vsak izjavni izraz z vezniki iz A zapišemo v enakovredni obliki z vezniki iz B.
   (a) Utemelji, da je relacija $\leq$ refleksivna in tranzitivna.
   (b) Utemelji, da iz $A \subseteq B$ sledi $A \leq B$ (za vse $A, B \in \mathcal{P}(N)$).
   (c) Oglejmo si $A = \{0, \Leftrightarrow\}$ in $B = \{0, \neg, \Leftrightarrow\}$. Ali velja $A \leq B$? Ali velja $B \leq A$?
   (d) Je relacija $\leq$ simetrična? Je relacije $\leq$ antisimetrična?

6. Naj bo B_n množica naravnih števil od 0 do $2^n - 1$. Ta števila predstavimo v dvojiškem zapisu; število $b \in B_n$ zapišemo kot $b = \mathsf{b}_n \cdots \mathsf{b}_2 \mathsf{b}_1$, kjer so števke b_i enake 0 ali 1. Na B_n definiramo relacijo $\leq$ z
$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \, (\mathsf{a}_i \leq \mathsf{b}_i).$$
   (a) Ali velja: $2 \leq 3$, $5 \leq 8$, $4 \leq 5$?
   (b) Prepričaj se, da je $\leq$ relacija delne urejenosti.
   (c) Skiciraj Hassejev diagram te delne urejenosti v primeru $n = 3$.
   (d) Ali je $\leq$ relacija linearne urejenosti? Za kateri n oziroma zakaj ne? Kako to sledi iz Hassejevega diagrama?

7. Funkcija $\sigma_0\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je dana s $\sigma_0(0) = 0$, za $n > 0$ pa z opisom

$$\sigma_0(n) = \text{število vseh deliteljev } n.$$

Ali je σ_0 injektivna? Ali je σ_0 surjektivna?

8. Funkcija $\sigma_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je dana s $\sigma_1(0) = 0$, za $n > 0$ pa z opisom

$$\sigma_1(n) = \text{vsota vseh deliteljev } n.$$

   (a) Izračunaj $\sigma_1(n)$ za $n \in \{1, 2, \ldots, 11\}$.
   (b) Poišči vse n, za katere je $\sigma_1(n) = 12$.
   (c) Ali obstaja n, da je $\sigma_1(n) = 2n$? Ali ima enačba $\sigma_1(n) = 2n$ neskončno rešitev?
   (d) Ali je σ_1 injektivna? Ali je σ_1 surjektivna?

9. Naj bo $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Eulerjeva funkcija, tj.

$$\varphi(n) = \text{število naravnih števil med 1 in } n, \text{ ki so tuja } n.$$

   (a) Poišči $\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \varphi(4), \varphi(5), \varphi(6)$.
   (b) Ali je φ injektivna? Surjektivna?
   (c) Dokaži, da za vse sode n velja
$$\varphi(n) \leq n/2.$$
   (d) Ali za vse $n \geq 3$ velja
$$\varphi(\varphi(n)) < n/2?$$