

Osnove matematične analize

Vaje, 12. teden

1. Izračunaj določene integrale

- (a) $\int_0^\pi x \sin(3x) dx$
- (b) $\int_{-\pi}^\pi \cos(x) \sin^2(x) dx$
- (c) $\int_e^{e^2} \frac{(\log x)^2 - 2 \log x}{x} dx$
- (d) $\int_0^2 \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$
- (e) $\int_0^{\sqrt{\log 2}} x e^{-x^2} dx$
- (f) $\int_0^2 x e^{-x} dx$
- (g) $\int_{-1}^2 \frac{x}{x^2 - x - 6} dx$

Rešitve: (a) $\frac{\pi}{3}$, (b) 0, (c) $-\frac{2}{3}$, (d) $\arctan(e^2) - \frac{\pi}{4}$, (e) $\frac{1}{4}$, (f) $1 - \frac{3}{e^2}$, (g) $-\frac{2 \log 2}{5}$.

2. * Izračunaj ploščine likov, ki jih omejujejo dane krivulje

- (a) $y = x^2 + 2x$ in $y = x + 2$.
- (b) $y = x^3 - x^2 + x$ in $y = 3x$.
- (c) $y^2 = 2x + 1$ in $y = x - 1$.
- (d) $y = \sin(x)$ in $y = \cos(2x)$ na intervalu $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$.

Rešitve: (a) $\frac{9}{2}$ (b) $\frac{37}{12}$ (c) $\frac{16}{3}$ (d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

3. Izračunaj dolžino loka krivulje $y = f(x)$:

- (a) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ na intervalu $[0, 1]$,
- (b) $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\log(x)}{2}$ na $[1, e]$.

Rešitve: (a) $l = \sinh(1) = \frac{e^2 - 1}{2e}$, (b) $l = \frac{e^2 + 1}{4}$.

4. * Izračunaj obseg astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

Rešitev: $o = 6$.

5. * Izračunaj prostornino vrtenine, ki jo dobimo, če graf funkcije

$$f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$$

zavrtimo okrog abscisne osi na intervalu $[1, \infty]$.

Rešitev: $V = 3\pi$.