

FIZIKA

Učno gradivo za študente
Fakultete za računalništvo in informatiko
Univerze v Ljubljani

Milan AMBROŽIČ
Irena DREVENŠEK OLENIK
Mojca VILFAN

Recenzenta: Radko Osredkar, Aleksander Zidanšek

Lektor: Jože Gasperič

Risbe in diagrami: Milan Ambrožič, Mojca Vilfan, Irena Drevenšek Olenik

Fotografije poskusov: Slavko Sraka in Irena Drevenšek Olenik

Naslovne fotografije poglavij: Mojca Vilfan, Stojan Rančič

© *Kopiranje in razmnoževanje besedila ali njegovih delov ter slik je dovoljeno samo z odobritvijo avtorjev knjige.*

LJUBLJANA, SEPTEMBER 2015

Kazalo

1	Predgovor	7
2	Priporočena dodatna literatura	8
3	Uporaba vektorjev ter odvoda in integrala	9
3.1	Vektorji	9
3.2	Odvod in integral v fiziki	12
4	Fizikalne količine	21
4.1	Fizikalne količine in enote	21
4.2	Dimenzijska analiza	23
4.3	Merske napake	24
4.4	Fizikalne konstante	26
5	Gibanje točkastega telesa	27
5.1	Osnovne definicije	27
5.2	Premo gibanje	27
5.3	Premo enakomerno gibanje	30
5.4	Premo enakomerno pospešeno gibanje	31
5.5	Krivo gibanje v dveh dimenzijah	36
5.6	Vodoravni met	36
5.7	Poševni met	38
5.8	Kroženje	40
5.9	Enakomerno kroženje	41
5.10	Enakomerno pospešeno kroženje	43
6	Dinamika točkastega telesa	45
6.1	Newtonovi zakoni	45
6.2	Sila podlage	46
6.3	Vleka po vodoravni podlagi	46
6.4	Gibanje telesa na klancu	47
6.5	Ravnovesje sil	49

6.6	Centripetalna sila	50
7	Delo, moč in energija	53
7.1	Mehansko delo in moč sile	53
7.2	Kinetična energija in težnostna potencialna energija	54
7.3	Nekaj primerov uporabe energije	55
7.4	Gravitacijska sila in energija	58
8	Gibalna količina	61
8.1	Sunek sile in gibalna količina	61
8.2	Trki in odrivi	62
9	Dinamika togih razsežnih teles	67
9.1	Masno središče in težišče	67
9.2	Gibanje težišča sistema teles	69
9.3	Navor	69
9.4	Vztrajnostni moment in rotacijska energija	71
9.5	Navor dvojice nasprotno enakih sil	76
9.6	Vrtilna količina	77
9.7	Ravnovesje togega telesa	83
9.8	Zgledi za ravnovesje togega telesa	84
10	Mehansko nihanje in valovanje	87
10.1	Sinusno nihanje	87
10.2	Nekaj značilnih nihaj	89
10.3	Mehanska energija nedušenih nihaj	96
10.4	Valovanje	98
11	Elektrostatika	101
11.1	Električni naboj in električna sila	101
11.2	Električno polje	104
11.3	Električna potencialna energija	106
11.4	Električni potencial	108
11.5	Ekvipotencialne ploskve	116
11.6	Električna napetost	118
12	Snov v električnem polju	119
12.1	Električni kondenzator	119

12.2	Energija kondenzatorja in električnega polja	123
12.3	Gibanje električnega naboja v kondenzatorju	126
12.4	Dielektričnost in polarizacija	130
13	Električni tok	133
13.1	Električni tok	133
13.2	Električna upornost in električna moč	135
13.3	Kirchhoffova zakona	137
13.4	Praznjenje in polnjenje kondenzatorja	139
14	Magnetnostatika	143
14.1	Magnetni dipoli	143
14.2	Magnetno polje	145
14.3	Izvori magnetnega polja	146
14.4	Magnetna sila	151
14.5	Magnetni navor in magnetna potencialna energija	154
15	Snov v magnetnem polju	159
15.1	Tuljava	159
15.2	Magnetizacija	160
15.3	Feromagnetne snovi	161
16	Indukcija	163
16.1	Magnetni pretok	163
16.2	Indukcija	164
16.3	Sunek inducirane napetosti	167
17	Izmenični tok	169
17.1	Izmenična napetost, tok in električna moč	169
17.2	Impedanca pri izmeničnem (sinusnem) toku	171
17.3	Induktivna sklopitev tokokrogov	176
17.4	Transformator	178
17.5	Električni nihajni krog	181
18	Elektromagnetno valovanje	183
18.1	Razširjanje elektromagnetnega valovanja	183
18.2	Valovna enačba	184
18.3	Energija elektromagnetnega valovanja	186

18.4	Vrste elektromagnetnega valovanja	187
19	Valovna optika	189
19.1	Svetloba kot elektromagnetno valovanje	189
19.2	Interferenca	190
19.3	Uklon	192
19.4	Hitrost svetlobe	196
19.5	Odboj in lom svetlobe	197
19.6	Intenziteta odbite in prepuščene svetlobe	198
19.7	Odboj na tanki plasti	204
19.8	Optično vlakno	205
20	Sklepne misli	207
21	Dodatek: Matematični zgledi	209
22	Dodatek: Vztrajnostni momenti	217
23	Dodatek: Silnice in ekvipotencialne ploskve	221
24	Dodatek: Kinetična teorija idealnih plinov	223
25	Dodatek: Električna prevodnost kovin	233
26	Dodatek: Prevodniki, polprevodniki, izolatorji	235
27	Dodatek: Maxwellove enačbe	239

1. Predgovor

Fizika je izrazito kvantitativna veda, zato so kvalitativna (opisna) razmišljanja in teoretični modeli naravnih pojavov vedno podprti s poskusi in matematičnimi izračuni. Prvi del učbenika obravnava mehanske pojave, v drugem delu so opisani električni in magnetni pojavi, v zadnjem delu pa je obravnavana optika. Poglavja povežemo z uporabo osnovnih fizikalnih principov, med najpomembnejšimi koncepti je ohranitev energije. V pričujoči knjigi je poleg teoretičnih osnov in definicij precej poudarka tudi na računanju. Podanih je veliko računskih zgledov, ki nakazujejo sistematiko reševanja fizikalnih problemov. Sem sodijo tudi na primer oznake in zapis podatkov, saj že ti spodbujajo študenta, da razmišlja o nadaljnjem reševanju naloge. Učbenik vsebuje tudi opise in fotografije veliko pestrih poskusov. Najpomembnejše se nam zdi razumevanje snovi in logično sklepanje namesto mehničnega učenja definicij, zakonov in množice formul. Kljub temu naj bi se študent(ka) naučil(a) vsaj nekaj zakonitosti. **Ključne enačbe so v besedilu označene z zelenim okvirčkom. Poleg tega smo s krepko pisavo označili tudi glavne misli odstavkov, v katerih so povzeta osnovna dejstva, ki naj bi jih študenti ob koncu znali.** V učbeniku je tudi nekaj odstavkov ali podpoglavij, ki presegajo okvir učnega načrta. Ta so posebej označena z zvezdico in so namenjena bolj radovednim bralcem. Pričujoča knjiga je študentom v veliko pomoč pri pripravi na pisni in ustni del izpitov iz fizike, seveda pa marljivemu študentu priporočamo tudi branje drugih virov.

Avtorji

2. Priporočena dodatna literatura

- J. Strnad: Fizika, 1. del, DMFA, Ljubljana 2007.
- J. Strnad: Fizika, 2. del, DMFA, Ljubljana 1995.
- R. Kladnik, C. Kovačič: Visokošolska fizika, 1. in 2. del, DZS, Ljubljana 1991.
- J. Žitnik: Univerzitetne fizikalne naloge, 1. in 2. del, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana 2009.
- D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: Fundamentals of Physics, John Wiley & Sons, Inc., New York, ZDA 2013.
- I. Drevenšek Olenik, B. Golob, I. Serša: Naloge iz fizike za študente tehniških fakultet, DMFA, Ljubljana 2013. [Spletna povezava](#)
- R. Osredkar: Fizika: izpitne naloge, Fakulteta za računalništvo in informatiko, Ljubljana 2003.
- D. Horvat, J. Možina: Računske vaje iz fizike, UL, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana 1999.
- [Khan Academy](#)

3. Uporaba vektorjev ter odvoda in integrala

V tem poglavju bomo ponovili osnovne operacije z vektorji, ki jih v fiziki pogosto uporabljamo. Hkrati je to poglavje priprava na nekoliko težje fizikalne probleme, pri katerih se ne moremo izogniti uporabi odvoda in integrala. Čeprav naj bi se osnovni tehniki odvajanja in integriranja naučili že pri matematiki v srednji šoli, izkušnje kažejo, da imajo mnogi študentje strah pred uporabo teh dveh operacij pri fizikalnih zgledih. Prikazali bomo njuno uporabo na nekaj poučnih primerih, več primerov najdete v dodatku (poglavje 21).

3.1 Vektorji

V fiziki pogosto srečamo količine, pri katerih ni pomembna zgolj njihova velikost, ampak tudi njihova smer. Taka primera sta premik (saj ni vseeno, v katero smer se premaknemo) in hitrost (saj je pomembna smer, v katero se premikamo). **Za opis količin, pri katerih je poleg velikosti pomembna tudi smer, uporabimo vektorje.** Najpogosteje uporabljamo vektorje s tremi komponentami, ki se nanašajo na tridimenzionalni (3D) evklidski prostor z ortogonalnimi (vzajemno pravokotnimi) baznimi vektorji v smereh x , y in z . V fiziki pogosto uporabljamo vektorje z le dvema komponentama, npr. pri opisu ravninskega gibanja, ali pa z več kot tremi komponentami, npr. vektorje četverce (ki imajo štiri komponente) v posebni teoriji relativnosti, pa tudi bolj abstraktne vektorje z mnogo več (lahko tudi neskončno) komponentami v statistični termodinamiki in kvantni mehaniki.

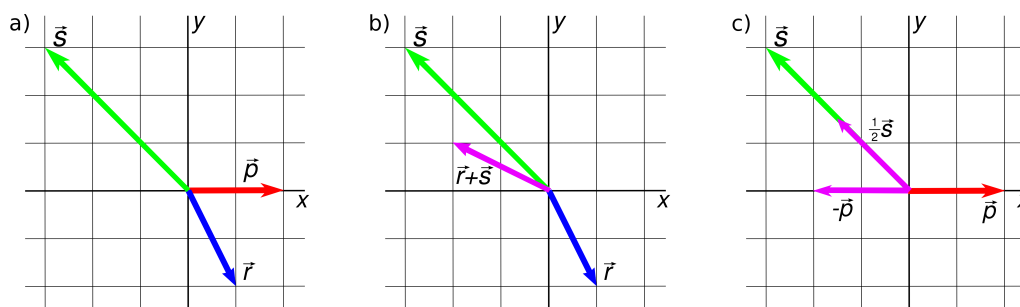
Posebnost fizikalnih vektorjev je, da imajo poleg velikosti in smeri tudi fizikalno enoto. Enota je lahko poljubna, vednar **mora biti enota vseh komponent vektorja enaka.** Po dogovoru bomo vektorje oziroma vektorske fizikalne količine označili tako, da nad izbrano oznako postavimo puščico. Zapišimo nekaj tridimenzionalnih vektorjev po komponentah: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (2 \text{ m}, 0, -0,5 \text{ m})$, $\vec{b} = (1 \text{ m}, 2 \text{ m}, 1 \text{ m})$ in $\vec{F} = (5 \text{ N}, -1 \text{ N}, 5 \text{ N})$. Še nekaj primerov dvo-dimenzionalnih: $\vec{p} = (2 \text{ m}, 0)$, $\vec{r} = (1 \text{ m}, -2 \text{ m})$ in $\vec{s} = (-3 \text{ m}, 3 \text{ m})$.

Strogo matematično gledano bi morali vektorje zapisati v obliki stolpcev, npr.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \text{ m} \\ 0 \\ -0,5 \text{ m} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

vendar jih zaradi jednatosti zapišemo v vrstici kot pare oziroma trojčke števil, med seboj ločene z vejico. Tudi enote bi lahko zapisali drugače, npr. $\vec{a} = (2, 0, -0,5) \text{ m}$, a bomo zaradi nazornosti pisali enoto pri vsaki komponenti vektorja posebej. Če je neka komponenta vektorja enaka nič, potem zapišemo samo 0 brez fizikalne enote.

Za lažjo predstavo vektorje pogosto ponazorimo grafično. Vektor $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ narišemo s puščico, ki se začne v izhodišču in konča v točki (a_x, a_y, a_z) . Narišimo za primer dvodimenzionalne (ravninske) vektorje \vec{p} , \vec{r} in \vec{s} (slika 3.1a).



Slika 3.1: (a) Grafični prikaz vektorjev \vec{p} , \vec{r} in \vec{s} v ravnini. (b) Vsota vektorjev $\vec{r} + \vec{s}$. (c) Produkt vektorjev \vec{p} in \vec{s} s skalarjem.

Navedimo nekaj vektorskih operacij in za zgled uporabimo zgoraj podane vektorje. Pri tem pazimo, da **vedno seštevamo in množimo vektorje, ki so enakih dimenzij**.

Seštevanje in odštevanje vektorjev. Vsoto ali razliko vektorjev izračunamo tako, da seštejemo ali odštejemo ustrezne komponente: $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$. Zgled: $\vec{r} + \vec{s} = (r_x + s_x, r_y + s_y) = (1 \text{ m} - 3 \text{ m}, -2 \text{ m} + 3 \text{ m}) = (-2 \text{ m}, 1 \text{ m})$ (slika 3.1b). Pravilo posplošimo na vsoto ali razliko treh ali več vektorjev. Enote vseh vektorjev se morajo pri tem ujemati.

Množenje vektorja s skalarjem. S skalarjem pomnožimo vsako komponento vektorja, pri tem pa je skalar lahko matematična konstanta ali pa fizikalna količina z enoto (npr. prostornina ali masa telesa, gostota, čas, energija). Zgled: $(-1)\vec{p} = (-1p_x, -1p_y) = (-1 \cdot 2 \text{ m}, -1 \cdot 0) = (-2 \text{ m}, 0)$ ali $0,5\vec{s} = (0,5s_x, 0,5s_y) = (0,5 \cdot (-3) \text{ m}, 0,5 \cdot 3 \text{ m}) = (-1,5 \text{ m}, 1,5 \text{ m})$ (slika 3.1c). Drugi vektor, naj bo tridimenzionalen, pomnožimo s fizikalno količino t z vrednostjo $t = 2 \text{ s}$. Dobimo $t\vec{F} = (tF_x, tF_y, tF_z) = (2 \text{ s} \cdot 5 \text{ N}, 2 \text{ s} \cdot (-1 \text{ N}), 2 \text{ s} \cdot 5 \text{ N}) = (10 \text{ Ns}, -2 \text{ Ns}, 10 \text{ Ns})$. Vektor, pomnožen s skalarjem, je vedno vzporeden prvotnemu vektorju.

Linearna kombinacija vektorjev. To je kombinacija množenja vektorjev s skalarji in njihovega seštevanja. Zgled: $2\vec{a} - 3\vec{b} = 2 \cdot (2 \text{ m}, 0, -0,5 \text{ m}) - 3 \cdot (1 \text{ m}, 2 \text{ m}, 1 \text{ m}) = (2 \cdot 2 \text{ m} - 3 \cdot 1 \text{ m}, 0 - 3 \cdot 2 \text{ m}, 2 \cdot (-0,5 \text{ m}) - 3 \cdot 1 \text{ m}) = (1 \text{ m}, -6 \text{ m}, -4 \text{ m})$.

Skalarni produkt dveh vektorjev. To je množenje, ki dvema vektorjema priredi skalar. Produkt izračunamo kot vsoto produktov enako ležečih komponent obeh vektorjev. Zgled: $\vec{F} \cdot \vec{b} = F_x b_x + F_y b_y + F_z b_z = 5 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} + (-1 \text{ N}) \cdot 2 \text{ m} + 5 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 8 \text{ Nm}$. Ali: $\vec{p} \cdot \vec{s} = p_x s_x + p_y s_y = 2 \text{ m} \cdot (-3 \text{ m}) + 0 \cdot 3 \text{ m} = -6 \text{ m}^2$. Skalarni produkt dveh vektorjev se ne spremeni, če zamenjamo vrstni red vektorjev: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Velikost ali absolutna vrednost vektorja. Izračunamo jo kot kvadratni koren iz skalarnega produkta vektorja samega s seboj. Zapišemo jo z isto oznako kot vektor, le da izpustimo puščico nad oznako: $b \equiv |\vec{b}| = \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$. Zgled: velikost vektorja je $b = \sqrt{(1 \text{ m})^2 + (2 \text{ m})^2 + (1 \text{ m})^2} = \sqrt{6} \text{ m} \approx 2,45 \text{ m}$. Podobno izračunamo $a = \sqrt{4,25} \text{ m} \approx 2,06 \text{ m}$ ali $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{(2 \text{ m})^2 + 0} = 2 \text{ m}$.

Kot, ki ga oklepata vektorja (na kratko: kot med vektorjema). Izračunamo ga z uporabo skalarnega produkta. Naj bo npr. φ kot med vektorjema \vec{p} in \vec{r} . Skalarni produkt teh vektorjev je $\vec{p} \cdot \vec{r} = p_x r_x + p_y r_y = 2 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} + 0 = 2 \text{ m}^2$. Kot med vektorjema je:

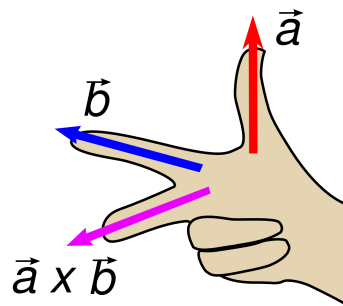
$$\varphi = \arccos \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{pr}. \quad (3.2)$$

Če vstavimo v enačbo izračunane vrednosti, dobimo $\varphi = 63,4^\circ$. Vektorja pravzaprav oklepata dva kota; pri računu vzamemo tistega, ki je manjši od 180° . Razvidno je še nekaj: če je $\vec{p} \cdot \vec{r} > 0$, je kot manjši od 90° , če pa je skalarni produkt negativen (npr. $\vec{p} \cdot \vec{s} = -6 \text{ m}^2 < 0$), leži kot med vektorjema na intervalu med 90° in 180° . **Skalarni produkt dveh medsebojno pravokotnih vektorjev je enak nič.** In obratno - če je skalarni produkt dveh vektorjev enak nič, sta vektorja medsebojno pravokotna.

Vektorski produkt dveh vektorjev. V nasprotju s skalarnim produktom, kjer smo dva vektorja zmnožili v skalar (številko), dobimo pri vektorskem produktu nov vektor. Naj bo \vec{e} vektorski produkt vektorjev $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ in $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$: $\vec{e} = \vec{a} \times \vec{b}$. Tedaj komponente vektorskega produkta zapišemo takole: $e_x = a_y b_z - a_z b_y$, $e_y = a_z b_x - a_x b_z$, $e_z = a_x b_y - a_y b_x$. Poglejmo vektorsko množenje na primeru ravninskih vektorjev \vec{p} in \vec{r} . Ravninske vektorje vedno lahko zapišemo kot tridimenzionalne, pri čemer je tretja komponenta (z) enaka nič. Vektorja $\vec{p} = (2 \text{ m}, 0, 0)$ in $\vec{r} = (1 \text{ m}, -2 \text{ m}, 0)$ zmnožimo in dobimo

$$\vec{p} \times \vec{r} = (p_y r_z - p_z r_y, p_z r_x - p_x r_z, p_x r_y - p_y r_x) = (0, 0, -4 \text{ m}^2). \quad (3.3)$$

Hitro opazimo, da je vektorski produkt kaže v smeri os z , je torej pravokoten na ravnino xy , v kateri ležita prvotna vektorja. To pravilo velja v splošnem: **vektorski produkt vektorjev \vec{a} in \vec{b} je vedno pravokoten na vektorja \vec{a} in \vec{b} .** Njegovo smer določimo s pravilom desne roke¹: če palec desne roke usmerimo v smeri vektorja \vec{a} , kazalec v smeri vektorja \vec{b} , potem kaže vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ v smeri sredinca (slika 3.2). Bralec naj za vajo pokaže, da produkt $\vec{p} \times \vec{r}$ kaže v list. Vektorsko množenje ni komutativno, velja namreč $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.



Slika 3.2: Pravilo desne roke uporabimo za določanje smeri vektorskega produkta.

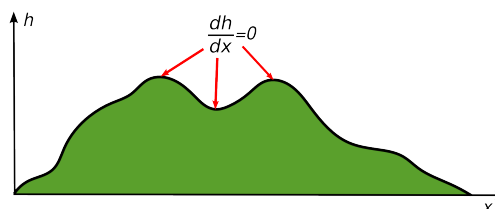
V fiziki pogosto srečamo skalarni in vektorski produkt, npr. pri definiciji dela in vrtilne količine. Oba produkta imata celo vrsto matematičnih zakonitosti. Omenimo le eno: za kot med vektorjema \vec{a} in \vec{b} veljata enačbi $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi$ in $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab |\sin \varphi|$. Zakaj potrebujemo pri drugi enačbi na obeh straneh absolutno vrednost, naj premisli bralec sam. Velja tudi naslednja zveza med obema produktoma: $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = a^2 b^2$, kar lahko bralec sam dokaže ali preveri za zgoraj izbrane vrednosti vektorjev.

¹ Pravilo imenujemo tudi pravilo desnega vijaka. Če se premaknemo iz vektorja \vec{a} do vektorja \vec{b} v smeri urinega kazalca (kot bi zavijali vijak), potem kaže vektorski produkt v smeri premikanja vijaka.

3.2 Odvod in integral v fiziki

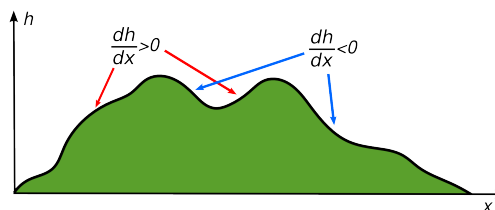
Odvajanje in integriranje sta dve matematični operaciji, ki se ju v fiziki zelo pogosto uporablja. Opustimo zaenkrat strogi matematični zapis in se na nekaj primerih naučimo prepoznati, kdaj se odvajanja in integriranja sploh poslužimo.

Z odvajanjem iščemo ekstremne vrednosti funkcij. V točki, kjer zavzame funkcija ekstremno vrednost, je njen odvod enak nič. Če na primer vemo, kako se s krajem x spreminja višina hriba h , lahko z odvajanjem poiščemo lego vrha. To naredimo tako, da funkcijo $h(x)$ odvajamo po kraju x in njen odvod postavimo na nič $dh/dx = 0$. Iz enačbe, ki jo dobimo, izračunamo lego vrha $x = x_0$, iz vrednotimo $h(x_0)$ in dobimo lego vrha in njegovo višino.



Slika 3.3: Odvod dh/dx je enak nič v vseh vrhovih in dolinah ter na sedlih, zato moramo za vsak dobljen rezultat preveriti, ali gre res za najvišji vrh.

Z odvodom opišemo spreminjanje količine. Odvod funkcije y po parametru x pomeni, da se na majhni spremembi dx vrednost funkcije y spremeni za majhno vrednost dy . Velika (absolutna) vrednost odvoda pomeni hitro spreminjanje, majhna velikost odvoda počasno, odvod nič pa pomeni, da se tam vrednost funkcije ne spreminja. Primer: odvod dh/dx pove, kako hitro se spreminja višina hriba z lego. Odvod je enak naklonu (strmini) hriba.



Slika 3.4: Odvod dh/dx je enak strmini krivulje. Je pozitiven, ko vrednost h narašča, in negativen, ko se vrednost h zmanjšuje.

Z integriranjem seštevamo posamezne prispevke. Uporabimo ga, kadar znamo zapisati majhno spremembo neke fizikalne količine, nas pa zanima sprememba v večjem območju. Primer: čez omenjeni hrib se peljemo s kolesom, števec na njem pa kaže trenutno hitrost $v(t)$. Imamo podatke, koliko energije porabimo na časovno enoto pri dani hitrosti. Kako izračunamo celotno porabljeno energijo? Čas razdelimo na kratke intervale dt . Zapišemo delček energije dE , ki smo jo porabili v vsakem od časovnih intervalov. Ti delčki so seveda različno veliki, ker smo se peljali z različno hitrostjo. Nato vse te prispevke k celotni energiji seštejemo. Ker so intervali časa kratki, lahko namesto vsote zapišemo integral: $E = \int dE = \int \frac{dE}{dt}(v)dt$. Ne smemo pa pozabiti na meje integriranja. K porabljeni energiji doprinejo vsi prispevki med časom $t = 0$, ko smo začeli voziti, in $t = t_k$, ko smo prispeli na cilj.

Če je torej količina z , ki jo želimo izračunati, zapisana kot produkt dveh drugih količin (x, y) , pri tem pa je ena količina odvisna od druge $y = y(x)$, izračuna količine $z = y(x)x$ ne moremo preprosto narediti. Če bi kar vstavili neko vrednost za x in $y = y(x)$, bi za vsako vrednost x dobili drugačen rezultat. Zato moramo integrirati in sešteti po kratkih intervalih dx spremenljivke x . Zapišemo $z = \int y(x)dx$. Oglejmo si uporabo odvoda in integrala na dveh primerih.

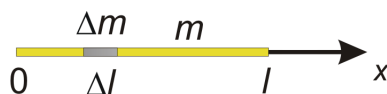
Gostota

Zamislimo si homogeno telo, ki je povsod iz enake snovi, tako da imajo vsi njegovi deli enake fizikalne lastnosti. Za lažjo geometrijsko interpretacijo problema naj bo to telo dolga tanka palica z maso m , okroglim prerezom ploščine S in dolžino l . Gostoto vpeljemo kot količnik mase in prostornine:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{Sl}. \quad (3.4)$$

Lahko pa vzamemo samo del palice z dolžino $\Delta l < l$, ki ima maso $\Delta m < m$ (glej sliko 3.5). Ker je telo homogeno, dobimo z novim količnikom enako gostoto kot za celo palico:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\Delta m}{S\Delta l}. \quad (3.5)$$



Slika 3.5: Delitev palice na krajše odseke

Nato delimo palico (v mislih) na še manjše odseke, matematično gledano na poljubno kratke odseke, njihovo dolžino pa namesto z Δl označimo z dl . Tudi masa takšnih koščkov postane zelo majhna in jo označimo z dm . Gostota ostane tolikšna kot prej:

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{dm}{Sdl} = \frac{1}{S} \frac{dm}{dl} = \frac{1}{S} \frac{dm}{dx}. \quad (3.6)$$

Namesto majhnega deleža dl smo v skladu s sliko (3.5) zapisali dx . V zadnjem koraku tako dobimo kvocient majhne spremembe mase dm na majhnem intervalu dolžine dx , ki je ravno odvod mase po dolžini palice dm/dx . Če je palica homogena, je ta odvod konstanten. Izkaže se, da je enačba (3.6) veljavna, tudi če se gostota spreminja po dolžini ($\rho = \rho(x)$) in odvod ni konstanten. Takrat moramo pri gostoti označiti, v kateri točki jo izračunamo, saj se z lego spreminja. Tako zapišemo

$$\rho(x = x_0) = \frac{dm}{dx}(x = x_0), \quad (3.7)$$

kar pomeni, da smo odvod mase po dolžini iz vrednotili pri vrednosti $x = x_0$.

V fiziki pogosto naredimo takšen limitni prehod k odvajanju in pri tem preskočimo bolj zapletena matematična dokazovanja upravičenosti prehoda. **Odvod ene fizikalne količine po drugi si lahko nazorno zamislimo kot deljenje majhnih sprememb teh dveh količin.** Nova količina ima takšno fizikalno enoto, kot če količini kar delimo. Torej je enota gostote kg/m^3 . Pri odvajanju fizikalnih količin moramo seveda upoštevati matematična pravila za odvajanje.

Vrnimo se k zgledu. Vzemimo drugo palico iz zmesi, ki smo ji neenakomerno dodajali snov z večjo gostoto, tako da se gostota gotove palice postopno povečuje od levega do desnega konca. Naj bo levi konec palice v izhodišču pri $x = 0$, desni pa pri $x = l$ (slika 3.5). Denimo, da nismo povsem prepričani, kako se gostota spreminja s koordinato x . Za fizikalno meritev gostote imamo veliko načinov, ampak zamislimo si najbolj nazornega za našo razlago odvoda.

Najprej izmerimo maso celotne palice in jo označimo z $m(l) = m$. Potem odžagajmo od desnega konca palice čim krajši košček dolžine Δl . Stehtajmo ga in stehtajmo še preostali del palice. Maso preostalega dela palice označimo z $m(l - \Delta l)$. Ta postopek ponavljamo, dokler nam ne

ostane samo še čisto kratek konec palice. Meritve dajo približno odvisnost mase še nerazrezanega dela palice, ki sega od izhodišča do izbrane koordinate x . Velja tudi $m(0) = 0$ in $m(l) = m$. Nato skiciramo graf $m(x)$ in ugotovimo, da se kar dobro prilega kvadratni funkciji $m(x) = kx^2$. Gostoto palice v odvisnosti od koordinate x potem izračunamo z odvodom (enačba 3.6):

$$\rho(x) = \frac{1}{S} \frac{dm}{dx} = \frac{1}{S} \frac{d}{dx}(kx^2) = \frac{2kx}{S}. \quad (3.8)$$

Torej se gostota palice linearno povečuje s koordinato x od levega proti desnemu koncu. Izračunamo lahko tudi koeficient k , saj poznamo maso celotne palice: $m(l) = kl^2 = m$, iz česar sledi $k = m/l^2$. Gostota palice pri danem x je potem

$$\rho(x) = \frac{2mx}{Sl^2}. \quad (3.9)$$

Gostoto lahko približno izračunamo tudi na preprostejši način: izmerimo posamezne dolžine in mase odrezanih koščkov in uporabimo enačbo (3.5). Tako izračunana gostota je le povprečna gostota za vsak košček, saj niti v njem gostota ni povsod enaka. Tako izmerjene gostote primerjamo s tisto, ki smo jo izračunali z odvajanjem mase po dolžini: za koordinato x vzamemo lege sredin vseh koščkov palice, ko jih spet zložimo skupaj. Kateri način merjenja gostote je natančnejši, naj razmisli bralec sam.

Sklepanje, ki smo ga naredili za izračun gostote palice, lahko zdaj obrnemo in pridemo do integrala. Zanj se spomnimo, da je na neki način povezan z odvodom. Najprej si spet zamislimo homogeno jekleno palico z znano gostoto. Iz enačbe (3.4) izračunamo njeno maso

$$m = \rho V = \rho Sl. \quad (3.10)$$

Lahko pa palico v mislih razdelimo (ali pa dejansko razrežemo) na N odsekov z dolžinami $\Delta l_i < l$ in masami $\Delta m_i < m$, kjer indeks i teče od 1 do N . Skupna masa palice je

$$m = \sum_{i=1}^N \Delta m_i = S \sum_{i=1}^N \rho \Delta l_i. \quad (3.11)$$

Čeprav je gostota palice povsod enaka in bi jo lahko izpostavili pred vsoto, jo tu namenoma puščamo v vsoti. Zdaj pa si mislimo, da so razrezani koščki vse krajši. V limiti njihovo dolžino označimo z $dl = dx$ (brez indeksa i). Vsota v enačbi (3.11) tako preide v določeni integral

$$m = S \int_0^l \rho dx. \quad (3.12)$$

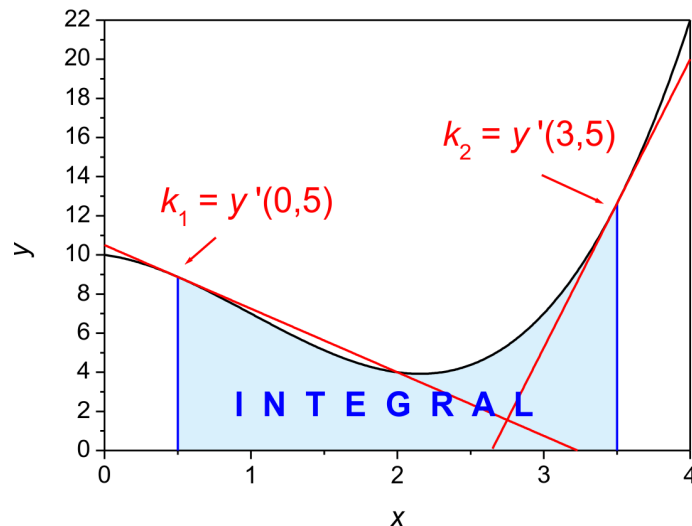
Določeni integral si mislimo kot vsoto neskončnega števila zelo majhnih členov, vsak člen pa je produkt dveh fizikalnih količin: ena je v navadni obliki (v našem primeru gostota), druga pa v diferencialni (v našem primeru dolžina ali pa kar koordinata x). Enačbo (3.12) smo sicer predstavili za homogeno palico, vendar prav tako velja, če se gostota spreminja po njeni dolžini. Za palico z linearno naraščajočo gostoto dobimo

$$m = S \int_0^l \rho(x) dx = S \int_0^l \frac{2mx}{Sl^2} dx = \frac{2m}{l^2} \frac{x^2}{2} \Big|_0^l = \frac{m}{l^2} l^2 = m, \quad (3.13)$$

kar je pravilno. Za izračun določenega integrala smo uporabili nedoločen integral, ki je inverzen odvodu. V splošnejšem primeru potenčne funkcije velja (če ne pišemo dodatne nedoločene konstante)

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \quad \text{in} \quad \int nx^{n-1} dx = x^n. \quad (3.14)$$

Poglejmo še geometrijski pomen odvoda in določenega integrala. Zamislimo si funkcijo $y(x)$. **Odvod $dy/dx \equiv k$ določa smerni koeficient tangente na krivuljo $y = kx + n$ v izbrani točki.** V splošnem se koeficient k spreminja od točke do točke (slika 3.6) in podaja naklonski kot premice glede na abscisno os, ne glede na to, ali je krivulja konveksna ali konkavna. **Določeni integral $\int_a^b y(x)dx$ med mejama a in b ustreza ploščini lika, ki ga omejujeta abscisna os in krivulja na danem intervalu.** Velja, da je ploščina lika negativna, če je $b < a$ ali če leži krivulja pod abscisno osjo.



Slika 3.6: Geometrijski pomen odvoda in določenega integrala za črno krivuljo; z rdečo barvo sta prikazani tangenti pri $x = 0,5$ in $3,5$. Njuna smerna koeficienta sta določena z ustreznima odvodoma. V našem primeru velja $k_1 < 0$ in $k_2 > 0$. Določeni integral med $0,5$ in $3,5$ je enak ploščini lika pod grafom črne krivulje, označenega z modro.

Oglejmo si sliko 3.6 še natančneje. Narisana črna krivulja ponazarja polinom

$$y(x) = x^3 - 3x^2 - x + 10 \quad (3.15)$$

na intervalu $[0, 4]$. Pri poljubnem x je odvod te funkcije enak

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 1. \quad (3.16)$$

Za izbran par točk velja: $k_1 = dy/dx(x = 0,5) = -3,25$ in $k_2 = dy/dx(x = 3,5) = 14,75$. Določeni integral ali ploščina pod grafom v omenjenem območju je

$$S = \int_{0,5}^{3,5} (x^3 - 3x^2 - x + 10)dx = \left(\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 10x \right) \Big|_{0,5}^{3,5} = 18,75. \quad (3.17)$$

Za konec še nekaj o zapisu odvodov. Odvod količine $y(x)$ po x zapišemo kot dy/dx . Poleg tega sta v uporabi tudi zapisa y' ali \dot{y} . Tak zapis lahko uporabljamo, če je y funkcija samo ene spremenljivke x in je povsem nedvoumno, po čem odvajamo. Zapis \dot{y} v fiziki najpogosteje uporabljamo za odvod po času. Seveda pa oznaka y' ne pomeni vedno odvoda - lahko označuje tudi drugo količino.

Hitrost

Drugi zglede je namenoma takšen, da je matematična obravnava povsem enaka kot pri obravnavi gostote, v fizikalnem smislu pa nekaj povsem drugega. Opazujemo najprej premo enakomerno gibanje telesa, to je gibanje s konstantno hitrostjo po premici. Hitrost definiramo kot količnik premika telesa x in časa t

$$v = \frac{x}{t}. \quad (3.18)$$

Lahko vzamemo samo del celotnega opazovanega časa $\Delta t < t$, v katerem telo opravi del premika $\Delta x < x$. Z novim količnikom dobimo enako hitrost kot prej

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (3.19)$$

V mislih lahko delimo čas gibanja na še manjše intervale, matematično gledano na poljubno kratke čase, ki jih namesto z Δt označimo z dt . Tudi premik postane v takšnih kratkih časih zelo majhen in ga označimo z dx . Hitrost ostane nespremenjena

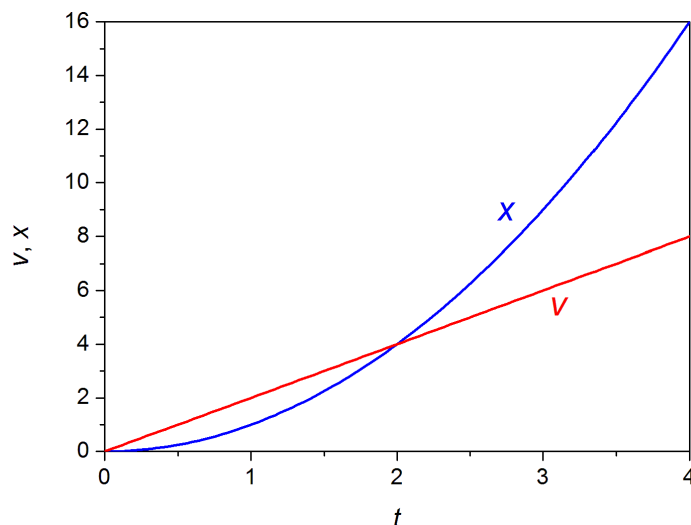
$$v = \frac{dx}{dt}. \quad (3.20)$$

V zadnjem koraku smo prišli do odvoda premika po času dx/dt . Doslej smo imeli v mislih enakomerno gibanje, vendar enačba (3.20) velja, tudi če se hitrost telesa s časom spreminja.

Zdaj si oglejmo še primer, pri katerem se hitrost telesa spreminja s časom. Z uro in kilometrskimi kamni merimo časovno odvisnost premika $x(t)$. Skiciramo približni graf $x(t)$ in ugotovimo, da se kar dobro prilega kvadratni funkciji $x(t) = kt^2$ (slika 3.7). Hitrost v odvisnosti od časa t lahko izračunamo z odvodom (enačba 3.20)

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(kt^2) = 2kt. \quad (3.21)$$

Hitrost telesa se torej linearno povečuje s časom t (slika 3.7). V poglavju o gibanju bomo spoznali, da faktor $2k$ ustreza pospešku a pri enakomerno pospešenem gibanju telesa.



Slika 3.7: Hitrost in premik kot funkciji časa v matematičnem brezdimenzijskem prikazu ($k = 1$). Krivulji $\rho(x)$ in $m(x)$ iz prejšnjega zglede sta kvalitativno enaki kot $v(t)$ in $x(t)$.

Sklepanje lahko tudi obrnemo. Mislimo si enakomerno gibanje in iz enačbe (3.18) izračunamo premik telesa $x = vt$. Lahko pa v mislih razdelimo čas na N intervalov z dolžinami $\Delta t_i < t$. Ustrezni premiki so $\Delta x_i < x$, kjer teče indeks i od 1 do N . Skupni premik je potem

$$x = \sum_{i=1}^N \Delta x_i = \sum_{i=1}^N v \Delta t_i. \quad (3.22)$$

Čeprav je hitrost konstantna in bi jo lahko izpostavili pred vsoto, jo tu namenoma puščamo v vsoti. Zdaj si mislimo, da so vsi časovni intervali enako dolgi, vendar vse krajši. V limiti jih označimo z dt (brez indeksa i). Vsota v enačbi (3.22) preide v določeni integral

$$x = \int_0^t v dt. \quad (3.23)$$

Enačbo (3.23) smo sicer vpeljali za enakomerno gibanje, vendar prav tako velja, če se hitrost spreminja s časom. Če se vrnemo h gibanju z linearno naraščajočo hitrostjo, dobimo

$$x = \int_0^t v(t') dt' = \int_0^t 2kt' dt' = 2k \frac{t'^2}{2} \Big|_0^t = kt^2 = x, \quad (3.24)$$

kot mora biti. Tu t' seveda ne pomeni odvoda, ampak smo zaradi matematične doslednosti s t' označili integracijsko spremenljivko, da jo razlikujemo od zgornje meje integrala t . Ko smo integriranja bolj veščji, nismo vedno tako dosledni. Pozoren bralec je opazil, da sta opisana zgleđa matematično povsem enaka, le zamenjavo $m(x) \leftrightarrow x(t)$ moramo narediti in odmisлити dodatno konstanto S pri palici.

Najpomembnejši odvodi in integrali funkcij

V fiziki imamo velikokrat opravka z odvajanjem ali integriranjem, zato podajamo tabelico odvodov in nedoločenih integralov nekaterih funkcij, ki se v fiziki najpogosteje pojavljajo.

$y(x)$	$y'(x) = dy/dx$	$\int y(x) dx$
x^k	kx^{k-1}	$x^{k+1}/(k+1); k \neq -1$
x^{-1}	$-1/x^2$	$\ln(x)$
e^{kx}	ke^{kx}	$(1/k)e^{kx}$
$\ln(kx)$	$1/x$	$x \ln(kx) - x$
$\sin(kx)$	$k \cos(kx)$	$-(1/k) \cos(kx)$
$\cos(kx)$	$-k \sin(kx)$	$(1/k) \sin(kx)$
$\tan(kx)$	$k/\cos^2(kx)$	$-(1/k) \ln(\cos(kx))$
$1/(1+k^2x^2)$	$(-2k^2x)/(1+k^2x^2)^2$	$(1/k) \arctan(kx)$

Tabela 3.1: Nekaj odvodov in nedoločenih integralov

Ker je integriranje inverzna operacija odvodu (če gledamo samo nedoločeni integral in ne poljubne integracijske konstante), lahko preberemo integrale nekaterih funkcij kar iz odvodov. Na primer:

$$\frac{de^{kx}}{dx} = ke^{kx} \Leftrightarrow \int e^{kx} dx = e^{kx}/k \quad (3.25)$$

ali

$$\frac{dx^k}{dx} = kx^{k-1} \Leftrightarrow \int x^k dx = x^{k+1}/(k+1). \quad (3.26)$$

Nekateri integrali niso preprosti in pogosto je treba za izračun uporabiti različne integracijske metode, npr. uvedbo nove integracijske spremenljivke ali integracijo po delih (*per partes*). Lahko pa se zgodi, da integrala ne moremo analitično izračunati. V tem primeru določeni integral, če sploh obstaja, izračunamo numerično.

Zapišimo še dve pravili odvajanja. Odvajajmo najprej produkt dveh funkcij

$$y(x) = f(x) \cdot g(x) \rightarrow y'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \quad (3.27)$$

nato pa še posredno funkcijo

$$y(x) = f(g(x)) \rightarrow y'(x) = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx} = \frac{df}{dg}(g(x)) \cdot g'(x). \quad (3.28)$$

Dodatne zglede v zvezi z odvajanjem in integriranjem najdete v dodatku (poglavje 21), nazorni zglede z integralom pa so tudi pri izpeljavi vztrajnostnih momentov (poglavje 22).

Nekaj povezav na spletne vire za obnovitev in utrjevanje odvajanja in integriranja:

[Tabela odvodov na Wikipediji](#)

[Nauk - vaje iz odvajanja](#)

[Nauk - vaje iz integriranja](#)

[Wolfram integrator](#)

Odvajanje in integriranje vektorjev

Poglejmo na kratko še vektorje, katerih komponente so funkcije ene ali več neodvisnih spremenljivk – govorimo o vektorskih funkcijah. Omejimo se na obravnavo vektorjev s tremi komponentami. Za zgled vzemimo vektorske funkcije ene same neodvisne spremenljivke, ki naj bo, kot v mnogih fizikalnih problemih, kar čas. Naj bo to npr. funkcija $\vec{f}(t)$, ki jo zapišemo po komponentah $\vec{f}(t) = (f_x(t), f_y(t), f_z(t))$. Zaradi jedrnatosti odslej ne bomo posebej poudarjali odvisnosti od časa, ampak bomo zapisali na kratko $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$.

Odvod vektorske funkcije izračunamo z odvajanjem vsake komponente funkcije posebej

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \left(\frac{df_x}{dt}, \frac{df_y}{dt}, \frac{df_z}{dt} \right). \quad (3.29)$$

Podobno **z integracijo posameznih komponent izračunamo določeni integral vektorske funkcije** med trenutkoma t_1 in t_2

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{f} dt = \left(\int_{t_1}^{t_2} f_x dt, \int_{t_1}^{t_2} f_y dt, \int_{t_1}^{t_2} f_z dt \right). \quad (3.30)$$

Zgled:

$$\vec{f} = (at, bt^2, ct) \rightarrow \frac{d\vec{f}}{dt} = (a, 2bt, c) \rightarrow \int_0^\tau \vec{f} dt = \left(\frac{a\tau^2}{2}, \frac{b\tau^3}{3}, \frac{c\tau^2}{2}\right). \quad (3.31)$$

Pri tem so a , b in c konstantni parametri. Omenimo še, da je hitrost, definirana z enačbo (3.20), samo ena od komponent 3D-vektorja hitrosti. V splošnem bi zapisali

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right). \quad (3.32)$$

Posebej pogledjmo še integral skalarnega in vektorskega produkta dveh vektorskih funkcij, ki se v fiziki pogosto pojavita. Matematično to v bistvu ni nič novega, saj pod integralom najprej izračunamo ustrezeni produkt, potem pa integriramo dobljeni skalar ali vektor. Vzemimo poleg časovno odvisne funkcije $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ še funkcijo $\vec{g} = (g_x, g_y, g_z)$ in zapišimo oba integrala po času

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{f} \cdot \vec{g}) dt = \int_{t_1}^{t_2} (f_x g_x + f_y g_y + f_z g_z) dt = \int_{t_1}^{t_2} f_x g_x dt + \int_{t_1}^{t_2} f_y g_y dt + \int_{t_1}^{t_2} f_z g_z dt \quad (3.33)$$

in

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{f} \times \vec{g}) dt = \left(\int_{t_1}^{t_2} (f_y g_z - f_z g_y) dt, \int_{t_1}^{t_2} (f_z g_x - f_x g_z) dt, \int_{t_1}^{t_2} (f_x g_y - f_y g_x) dt \right). \quad (3.34)$$

★ Generator naključnih števil

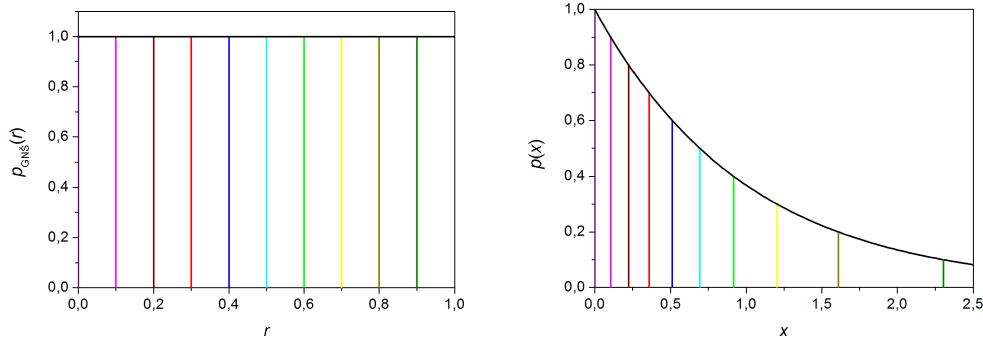
Oglejmo si še en bolj matematičen in računalniški zgled. Gre za v računalniški sistem vgrajen generator naključnih števil (GNŠ; v angleščini *random number generator*). Ta po nekem algoritmu vrača racionalna števila, enakomerno porazdeljena med 0 in 1. Lahko si zamislimo zvezni spekter naključnih števil $0 \leq r \leq 1$ s konstantno porazdelitveno funkcijo: $p_{\text{GNŠ}}(r) = 1$ na intervalu $[0, 1]$, drugod pa je nič (slika 3.8). V povezavi z verjetnostnim računom lahko z GNŠ simuliramo tudi druge porazdelitve, diskretne ali zvezne. Zaradi hitrosti računalnikov so popularne simulacije Monte Carlo (MC) na osnovi GNŠ na različnih področjih znanosti in gospodarstva: v fiziki, biologiji, matematični teoriji iger, socioloških modelih, modeliranju stopnje tveganj v zvezi z različnimi zavarovanji, pri napovedovanju spreminjanja vrednosti delnic itd.

Zaradi nazornosti si najprej oglejmo simulacijo meta kocke. Ta zgled sicer nima nobene povezave z odvodom in integralom, je pa nazoren za prikaz uporabe GNŠ. Ker je pri metu kocke vsaka številka od 1 do 6 enako verjetna z verjetnostjo $1/6$, naredimo takole. GNŠ naj nam zaporedoma daje različna števila r . Če velja $0 \leq r < 1/6$, temu številu priredimo številko 1, $1/6 \leq r < 1/3$ naj ustreza številki 2 in tako do številke 6 za $5/6 \leq r \leq 1$. Dobimo torej enakomerno porazdelitev, točno tako kot pri metu kocke.

Kako pa z GNŠ simuliramo zvezno verjetnostno porazdelitev, npr. eksponentno pojemajočo funkcijo $p(x) = ke^{-kx}$ (slika 3.8), pri kateri lahko količina x zavzema vrednosti v območju $0 \leq x < \infty$? Zaradi enostavnosti bomo obravnavali konstantni parameter k in spremenljivko x kot matematični količini brez fizikalne enote, čeprav sta to lahko tudi fizikalni količini z inverznima enotama, npr. x [m] in k [m^{-1}]. Preden povežemo funkcijo $p(x)$ z GNŠ, izračunajmo in interpretirajmo integral

$$P = \int_0^\infty p(x) dx = k \int_0^\infty e^{-kx} dx = k \left. \frac{e^{-kx}}{-k} \right|_0^\infty = 1. \quad (3.35)$$

Geometrijsko gledano je integral neke funkcije ploščina med grafom in abscisno osjo v določenem območju. V našem primeru je ta ploščina kar verjetnost P . Verjetnost, da bo naključna spremenljivka



Slika 3.8: Porazdelitveni funkciji $p_{\text{GNS}}(r)$ in $p(x)$. Preslikava $r \rightarrow x$ je enolična. Prikazanih je nekaj navpičnih barvnih črt v r , ki ustreza določeni barvi, se preslika v x z enako barvo. Ustrezno se preslikajo tudi celotni intervali, npr. tisti med rdečo in modro črto. Integral funkcije oziroma ploščina lika med črtama pomeni verjetnost za nahajanje naključne spremenljivke na tem intervalu. Izbrali smo $k = 1$.

x med 0 in ∞ , pa je res 1 . Pravimo, da je funkcija $p(x)$ normalizirana. Če namesto integracijskih mej 0 in ∞ vzamemo končni meji $0 < a < b < \infty$, je integral med mejama a in b enak verjetnosti, da leži naključna spremenljivka v območju $a < x < b$.

Kako uporabimo GNS za simulacijo eksponentne porazdelitve, ponazori slika (3.8). Število $r = 0$, ki pomeni levo mejo porazdelitvene funkcije $p_{\text{GNS}}(r)$, naj se preslika v $x = 0$, to je levo mejo porazdelitvene funkcije $p(x)$. Podobno naj bo z desnima mejama: $r = 1$ naj se preslika v $x = \infty$. Kaj pa vmesna števila? Vsa naključna števila na intervalu $(0, r)$ se morajo preslikati v ustrezna števila na intervalu $(0, x)$ za porazdelitev $p(x)$. Torej morata biti enaki tudi ustrezni verjetnosti, ki sta enaki naslednjima integraloma

$$\int_0^r p_{\text{GNS}}(r) dr = \int_0^x p(x) dx. \quad (3.36)$$

Tu smo že nekoliko površno zapisali enake oznake za integracijski spremenljivki in zgornji meji. Vstavimo v integrala obe funkciji in integrirajmo

$$\int_0^r 1 dr = k \int_0^x e^{-kx} dx \quad \rightarrow \quad r = -e^{-kx} \Big|_0^x = 1 - e^{-kx}. \quad (3.37)$$

Zadnjo enačbo obrnemo in iz zveze $r(x)$ izpeljemo funkcijsko odvisnost $x(r) = -(1/k) \ln(1 - r)$. Tako iz vsake številke r , ki nam jo da GNS, dobimo ustrezno vrednost za x . Preverimo, da velja tudi $x(0) = 0$ in $x(1) = \infty$. To pomeni, da se vrednosti naključnega števila blizu 1 »razpotegnejo« v velike vrednosti spremenljivke x . Če je $r = 1$ ali pa zelo blizu 1 , računalnik numeričnega izračuna ne zmore več, saj lahko računa le do določene največje vrednosti. Skrbni programer metode MC mora zato napisati kontrolni stavek, ki v primeru, da je r preblizu 1 , poskrbi, da program ignorira to število in izbere novo. S tem same statistike ne bo znatno spremenil, saj je verjetnost za takšne dogodke izjemno majhna. Podobno kot pojemajočo eksponentno porazdelitev lahko z GNS simuliramo poljubne druge porazdelitve, na primer Gaussovo.

4. Fizikalne količine

V tem poglavju bomo spoznali fizikalne količine in enote in se naučili, kako nam lahko pravilna uporaba enot pomaga pri reševanju fizikalnih problemov. Ker so vse izmerjene fizikalne količine obremenjene z napakami, se bomo seznanili z njimi in opisali, kako obravnavamo napake pri računanju s fizikalnimi količinami. Na koncu bomo spoznali nekaj fizikalnih konstant.

4.1 Fizikalne količine in enote

Fizika opisuje naravne pojave z merljivimi količinami in išče matematične zveze med temi količinami. Zato se v fiziki tesno prepletata poskus (eksperiment) in teorija (v smislu matematičnega modeliranja). **Vrednost fizikalne količine je podana z merskim številom in mersko enoto.** Na primer $a = 2,3 \text{ dm}$, $T = 23 \text{ }^\circ\text{C}$.

V uradnem Mednarodnem sistemu enot¹ je 7 osnovnih fizikalnih enot. Osnovne enote so meter (m), kilogram (kg), sekunda (s), amper (A), kelvin (K), mol in kandela (cd). Izbor osnovnih enot je tak, da nobene osnovne enote ne moremo izraziti z drugimi osnovnimi enotami.

Definicije enot so se skozi zgodovino spreminjale, saj je bila na voljo vedno novejša in natančnejša tehnologija. Podajmo le najnovejše definicije enot:

- **Meter** je dolžina, ki jo svetloba prepotuje v vakuumu v času $1/299\,792\,458$ sekunde.
- **Kilogram** je masa prakilograma iz platine in iridija, ki je shranjen v Uradu za uteži in mere v Sèvresu pri Parizu.
- **Sekunda** je čas trajanja $9\,192\,631\,770$ nihajev valovanja, ki ga odda atom cezija ^{133}Cs pri prehodu med nivojema hiperfino razcepljenega osnovnega stanja.
- **Amper** je jakost električnega toka, določena takole: če teče po vsakem od dveh neskončno dolgih, ravnih in zelo tankih vzporednih vodnikov v razdalji enega metra tok en amper, delujeta vodnika drug na drugega s silo $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ na vsak meter dolžine.
- **Kelvin** je vrednost absolutne (termodinamične) temperature, ki je enaka $1/273,16$ absolutne temperature trojne točke vode.
- **Mol** je množina snovi, ki vsebuje toliko gradnikov snovi, kot je atomov v $0,012 \text{ kg}$ čistega ogljikovega izotopa ^{12}C .
- **Kandela** je svetilnost v fiziološkem merilu, ki jo seva izvor enobarvnega elektromagnetnega valovanja s frekvenco 540 THz ($= 5,4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$, $\lambda \approx 555 \text{ nm}$, rumeno-zelena svetloba), kadar v vsak steradian prostorskega kota oddaja moč $1/683 \text{ W}$ v fizikalnem merilu.

¹Glej na primer [Wikipedijo](#).

Še nekaj pojasnil glede pojmov v definicijah. Prehodi med nivoji pri definiciji sekunde so prehodi med različnimi kvantnimi stanji elektronov v atomu. Osnovno stanje je tisto z najnižjo energijo. Pri hiperfinem razcepu osnovnega stanja gre za dodatne zelo majhne energijske razlike, ki nastanejo zaradi vpliva atomskega jedra na elektrone. Pri trojni točki vode je voda istočasno v vseh treh agregatnih stanjih (plinskem, kapljevinastem in trdnem). To se zgodi pri zračnem tlaku 6,1173 mbar in temperaturi 0,01 °C. Mol snovi je povezan z Avogadrovim številom, $N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$ /mol, ki pove, koliko molekul vsebuje mol snovi. Mol plinastega kisika O₂, na primer, vsebuje okrog $6 \cdot 10^{23}$ molekul O₂. Prostorski kot steradian je definiran tako, da je polni prostorski kot enak 4π . Povedano drugače: če vzamemo površino krogle s polmerom $R = 1$ m, $S = 4\pi R^2$, in jo delimo z R^2 , dobljeno razmerje določa ustrezni prostorski kot $\Omega = S/R^2 = 4\pi$. Pri opredelitvi kandelega govorimo o fiziološkem merilu, to je o učinku, kot ga zaznamo s človeškim očesom. Pri tem upoštevamo dejstvo, da je človeško oko za različne valovne dolžine vidne svetlobe različno občutljivo.

Osnovne enote kombiniramo z množenjem ali deljenjem in dobimo sestavljene enote, ki so bolj priročne za zapis. Take enote so, na primer, N (newton) = kg m/s², J (joule) = N m = kg m²/s² in W (watt) = J/s = kg m²/s³.

Iz enot dobimo povečane ali zmanjšane enote z ustreznimi predponami.

Ime predpone	Oznaka	Vrednost	Ime predpone	Oznaka	Vrednost
femto	f	10 ⁻¹⁵	deka	da	10 ¹
piko	p	10 ⁻¹²	hekto	h	10 ²
nano	n	10 ⁻⁹	kilo	k	10 ³
mikro	μ	10 ⁻⁶	Mega	M	10 ⁶
mili	m	10 ⁻³	Giga	G	10 ⁹
centi	c	10 ⁻²	Tera	T	10 ¹²
deci	d	10 ⁻¹	Peta	P	10 ¹⁵

Tabela 4.1: Najpogostejše desetiške predpone

Omeniti je treba, da so velikostni razponi fizikalnih količin tako široki, da nam pri izjemno majhnih in velikih vrednostih količin niti predpone ne pomagajo. Zato pogosto uporabljamo kar desetiški potenčni zapis v obliki 10ⁿ, kjer število n imenujemo eksponent.

Oglejmo si nekaj primerov potenčnega zapisa. Mejna razdalja, pod katero po napovedih teoretične fizike prostor izgubi svojo kontinuirano (zvezno) naravo, je Planckova dolžina, to je okrog 10⁻³⁵ m. Po drugi strani je značilen premer galaksij okrog sto tisoč svetlobnih let, to je okrog 10²¹ m. Maso elektrona zapišemo kot $9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, masa Zemlje je $6 \cdot 10^{24}$ kg, masa Sonca $2 \cdot 10^{30}$ kg, da ne govorimo o masi Galaksije, za katero ocenjujejo, da vsebuje sto milijard zvezd, podobnih Soncu (poleg ogromne črne luknje v njenem središču, dodatne mase v temni snovi itd.).

Z enotami računamo podobno kot s števili. Množenje in deljenje različnih enot je brez omejitev, pri seštevanju in odštevanju pa je drugače: seštevamo lahko samo istovrstne količine. Seveda pa ni nič hudega, če se predpone enot pri sumandih ne ujemajo, saj jih lahko pretvorimo, npr. $2 \text{ m} + 5 \text{ cm} = 200 \text{ cm} + 5 \text{ cm} = 205 \text{ cm} = 2,05 \text{ m}$.

4.2 Dimenzijska analiza

Pri preprostem opisu pojavov so fizikalne količine pogosto povezane med seboj s preprostimi enačbami. Dostikrat je zveza med dvema količinama kar linearna ali pa se pojavi neka količina v enačbi v obliki potence nizke stopnje, npr. kot kvadrat ali kub te količine. Če nismo prepričani, katera potenca je prava, si lahko pomagamo s preprosto dimenzijsko analizo. Pri tem velja pravilo, da **se morajo enote na obeh straneh enačbe ujemati**. Kako to naredimo, je prikazano pri naslednjih dveh zgledih.

Računski zgled 4.2.1 Pri gibanju vozila z veliko hitrostjo deluje nanj sila zračnega upora F_u , ki jo opišemo z enačbo

$$F_u = \frac{1}{2} C_u S \rho v^n,$$

pri čemer je C_u brezdimenzijski koeficient upora, odvisen od oblike vozila, S največji prerez vozila pravokotno na smer gibanja, ρ gostota zraka, v pa hitrost vozila. Ne poznamo pa še prave potence n . Poiščimo jo!

Namesto količin zapišimo samo njihove enote. Količine in faktorje brez enot izpustimo. Enoto za silo na levi strani enačbe razstavimo na osnovne enote, za količine na desni strani pa zapišimo njihove enote

$$N = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{m}^2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^n.$$

Potenci za kilogram se na levi in desni strani enačbe že ujemata. Če želimo, da se ujemata tudi potenci za sekundo, mora biti $n = 2$, da je sekunda na obeh straneh enačbe v potenci s^2 . Na koncu preverimo, ali se ujemata tudi potenci za meter. Seveda pa nam dimenzijska analiza nič ne pove o številskih koeficientih, ki so brez enot. Koeficient C_u , ki nastopa v našem primeru, moramo dobiti drugače. \square

Računski zgled 4.2.2 Pri pretoku tekočine skozi okroglo cev moramo imeti določeno tlačno razliko v tekočini na dolžinsko enoto cevi, da z njo premagujemo silo viskoznega upora. Prostorninski tok tekočine Φ_V (enota m^3/s) je enak

$$\Phi_V = \frac{\pi \Delta p R^n}{8 \Delta L \eta}.$$

Tlačno razliko na dolžinsko enoto smo označili z $\Delta p/\Delta L$, R je polmer cevi, η pa viskoznost tekočine. Poiščimo eksponent n !

Faktorje brez enot izpustimo. Tlak ima enoto $\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2 = \text{kg}/(\text{m} \text{s}^2)$, tlačna razlika na dolžinsko enoto $\text{kg}/(\text{m}^2 \text{s}^2)$, viskoznost pa enoto $\text{Pa} \text{s} = \text{kg}/(\text{m} \text{s})$. Dobimo

$$\frac{\text{m}^3}{\text{s}} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}^2} \text{m}^n \frac{\text{m} \text{s}}{\text{kg}}.$$

Potenci za kilogram in sekundo se že ujemata. Pri metrih pa dobimo potenčno enačbo $\text{m}^3 = \text{m}^{n-1}$, torej $n = 4$. \square

4.3 Merske napake

Vse meritve v fiziki so obremenjene z merskimi napakami. Najprej omenimo **sistematske napake**, ki nastanejo kot posledica slabosti merilne naprave (npr. neumerjena, deformirana ali pokvarjena naprava), postopka ali interpretacije (npr. napačen ali ne dovolj točen matematični model). Težava sistematskih napak je, da so lahko enostransko pristranske: bodisi vse meritve dajo večjo vrednost neke fizikalne količine od njene resnične vrednosti, ali pa so vse izmerjene vrednosti premajhne. **Sistematskih napak s ponavljanjem meritev ne moremo odpraviti** in praviloma jih je zelo težko prepoznati in odpraviti.

Druga vrsta napak so **slučajne napake**, ki jih naredi opazovalec pri merjenju (npr. nenatančno položen merski trak ali zamuda pri merjenju časa). Pri velikem številu meritev od takšnih napak ne pričakujemo pristranskosti, torej se povprečje številnih meritev dobro ujema s »pravo« vrednostjo fizikalne količine. **Vrednost izmerjene količine ocenimo z aritmetično sredino vseh (N) izmerjenih vrednosti**, če je meritev veliko:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (4.1)$$

Merjeno fizikalno količino smo označili z x , posamezne izmerjene vrednosti pa z x_i . Poleg povprečne vrednosti (enačba 4.1) izračunamo še napako meritve. Najprej izračunamo standardno deviacijo izmerjenih vrednosti, ki nam pove razpršenost merjene količine, kot koren povprečja kvadrata odmikov posameznih meritev od aritmetične sredine vseh meritev

$$\delta x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2}. \quad (4.2)$$

Napako meritve vpeljemo kot

$$\Delta x = \frac{\delta x}{\sqrt{N}} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2}. \quad (4.3)$$

Enačba (4.3) izhaja iz matematične teorije porazdelitvenih funkcij, če privzamemo, da je za zelo veliko število meritev porazdelitev vrednosti x_i normalna (Gaussova)². Tako izračunana napaka je **absolutna napaka**. Pogosto vpeljemo tudi **relativno napako**, ki je definirana kot količnik med absolutno napako in povprečno vrednostjo merjene količine. Če poznamo relativno napako, dobimo absolutno napako z množenjem povprečne količine in relativne napake.

Opišimo preprost način ocene vrednosti merjene količine in ustrezne napake meritve pri šolskih poskusih. Zaradi časovne omejitve navadno izvajamo majhno število meritev, največ nekaj deset. Če je meritev malo, recimo $N < 10$, ocenimo vrednost količine kot povprečje (enačba 4.1), kjer upoštevamo vseh N meritev. Za napako meritve vzamemo večjega od obeh odmikov, $|x_{\min} - \langle x \rangle|$ ali $x_{\max} - \langle x \rangle$, to je večjo od absolutnih razlik med najmanjšo izmerjeno vrednostjo količine in njenim povprečjem ter med največjo izmerjeno vrednostjo in povprečjem.

Pri $N > 10$ pred izračunom povprečja in napake izločimo tretjino najslabših meritev, to je šestino najmanjših in šestino največjih vrednosti. Iz preostalih vrednosti izračunamo povprečje (enačba 4.1) in ocenimo napako meritve enako kot za primer $N < 10$: kot največji odmik preostalih meritev od povprečja.

²Glej na primer [Wikipedijo](#).

Računski zgled 4.3.1 Z majhne višine spuščamo telo, da prosto pade na tla. Čas padanja merimo z elektronsko štoparico in izmerjeni časi, urejeni po velikosti, so: 121 ms, 121 ms, 122 ms, 124 ms, 124 ms, 124 ms, 125 ms, 125 ms, 125 ms, 126 ms, 127 ms in 127 ms. Meritev je $N = 12$, zato izločimo dve najmanjši vrednosti, 121 ms, in dve največji vrednosti, 127 ms. Iz preostalih 8 vrednosti izračunamo povprečno vrednost $\langle t \rangle = 124,375$ ms. Seveda je nesmiselno obdržati vse tri števke za decimalno vejico in rezultat zaokrožimo $\langle t \rangle = 124,4$ ms.

Izračunajmo še napako. Najmanjša še upoštevana izmerjena vrednost 122 ms je za 2,4 ms manjša od povprečne, največja upoštevana izmerjena vrednost 126 ms pa za 1,6 ms večja. Za napako meritve vzamemo večji odmik, to je 2,4 ms. Tako izračunana napaka je absolutna napaka in jo označimo z $\Delta t = 2,4$ ms. Relativna napaka jo potem $\Delta t / \langle t \rangle = 2,4 \text{ ms} / 124,4 \text{ ms} = 0,02 = 2\%$. Rezultat meritev zapišemo kot $t = 124,4 \text{ ms} \pm 2,4 \text{ ms}$ ali z relativno napako $t = 124,4 \cdot (1 \pm 2\%) \text{ ms}$. \square

Računanje z merskimi napakami

Nazadnje pogledjmo še, kako računamo s količinami, ki so obremenjene z mersko napako. Ker fizikalne količine najpogosteje seštevamo (seveda le istovrstne količine z enako fizikalno enoto) in množimo, obravnavajmo le napako pri teh dveh operacijah.

Najprej izračunajmo vsoto izmerjenih količin a in b : $c = a + b$. Zapišimo ju s povprečno vrednostjo in napako $a = \langle a \rangle \pm \Delta a$ in $b = \langle b \rangle \pm \Delta b$ ter ju seštejmo $c = \langle a \rangle + \langle b \rangle \pm \Delta a \pm \Delta b$. Glede povprečij dobimo pričakovani rezultat, saj je $\langle c \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle$. Pri napaki količin a in b pa imamo štiri mogoče kombinacije predznakov: $\Delta a + \Delta b$, $\Delta a - \Delta b$, $-\Delta a + \Delta b$ in $-\Delta a - \Delta b$. Za napako vsote moramo vzeti največji možni razpon vrednosti, ki ga dobimo iz meritev količin a in b : $\langle a \rangle + \langle b \rangle - \Delta a - \Delta b \leq c \leq \langle a \rangle + \langle b \rangle + \Delta a + \Delta b$. **Pri seštevanju količin se seštevajo njihove absolutne napake**

$$c = a + b \rightarrow c = \langle c \rangle \pm \Delta c, \quad \text{kjer } \langle c \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle \quad \text{in} \quad \Delta c = \Delta a + \Delta b. \quad (4.4)$$

Tudi pri odštevanju količin se absolutne napake seštevajo

$$c = a - b \rightarrow c = \langle c \rangle \pm \Delta c, \quad \text{kjer } \langle c \rangle = \langle a \rangle - \langle b \rangle \quad \text{in} \quad \Delta c = \Delta a + \Delta b, \quad (4.5)$$

kar lahko vodi do zelo velike relativne napake. Pravilo seštevanja absolutnih napak velja seveda tudi za odštevanje ali odštevanje več kot dveh členov.

Pri produktu dveh fizikalnih količin je račun napak nekoliko drugačen. Naj bo $c = a \cdot b$ in spet $a = \langle a \rangle \pm \Delta a$ in $b = \langle b \rangle \pm \Delta b$. Množimo oba izraza in dobimo $c = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle \pm \langle a \rangle \cdot \Delta b \pm \langle b \rangle \cdot \Delta a + (\pm \Delta a) \cdot (\pm \Delta b)$. Upoštevajmo, da je v večini vsakdanjih primerov absolutna napaka količine precej manjša od njene povprečne vrednosti, zato je zadnji člen znatno manjši od drugih treh in ga zanemarimo. Povprečna vrednost količine c je $\langle c \rangle = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$. Njeno absolutno napako izračunamo iz največjega razpona vrednosti količine: $\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle - \langle a \rangle \cdot \Delta b - \langle b \rangle \cdot \Delta a \leq c \leq \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle + \langle a \rangle \cdot \Delta b + \langle b \rangle \cdot \Delta a$. Za množenje velja torej:

$$c = a \cdot b \rightarrow c = \langle c \rangle \pm \Delta c, \quad \text{kjer } \langle c \rangle = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle \quad \text{in} \quad \Delta c = \langle a \rangle \cdot \Delta b + \langle b \rangle \cdot \Delta a. \quad (4.6)$$

Bolj nazoren je zapis z relativno napako

$$\Delta c / \langle c \rangle = \Delta a / \langle a \rangle + \Delta b / \langle b \rangle. \quad (4.7)$$

Prišli smo do pomembnega pravila: **pri množenju fizikalnih količin se seštevajo njihove relativne napake. Relativne napake količin se seštevajo tudi pri deljenju.**

Računski zgleđ 4.3.2 Zidarji izmerijo dolžino, širino in višino stanovanjskega bloka z ravno streho. Izmerjeni podatki so $d = 20 \text{ m} \pm 0,1 \text{ m}$, $s = 10 \text{ m} \pm 0,1 \text{ m}$ in $v = 15 \text{ m} \pm 0,2 \text{ m}$. Izračunajmo obseg in ploščino osnovne ploskve bloka ter njegovo prostornino.

Obseg bloka je enak $o = 2(d + s) = 2 \cdot (20 \text{ m} \pm 0,1 \text{ m} + 10 \text{ m} \pm 0,1 \text{ m}) = 60 \text{ m} \pm 0,4 \text{ m}$. Seveda smo morali s faktorjem 2 pomnožiti tudi vsoto absolutnih napak. Ploščino osnovne ploskve lahko računamo neposredno z absolutno napako, ali pa izračunamo obe relativni napaki in ju seštejemo. Izberimo drugo možnost: $\Delta d / \langle d \rangle = 0,1 \text{ m} / 20 \text{ m} = 0,005$ in $\Delta s / \langle s \rangle = 0,1 \text{ m} / 10 \text{ m} = 0,01$. Vsota obeh relativnih napak je 0,015. Povprečna ploščina osnovne ploskve je $\langle S_o \rangle = \langle d \rangle \cdot \langle s \rangle = 20 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} = 200 \text{ m}^2$. Izmerjena ploščina je tako $S_o = 200 \text{ m}^2 \cdot (1 \pm 0,015) = 200 \text{ m}^2 \pm 3 \text{ m}^2$. Prvič smo jo zapisali z relativno napako, drugič pa z absolutno. Prostornina bloka je $V = 3000 \text{ m}^3 \cdot (1 \pm 0,028)$, kar lahko bralec preveri sam z množenjem vseh treh dimenzij, relativno napako 0,028 pa izračuna kot vsoto vseh treh relativnih napak dimenzij. \square

V nadaljevanju merskih napak ne bomo pisali. Držali pa se bomo dogovora, da podajamo količine le na toliko mest, da je zadnje mesto tisto, ki ga določa napaka. Pri relativni napaki 1 % zato zapišemo podatek le s tremi mesti, npr. $m = 2,48 \text{ kg}$, pri relativni napaki 0,1 % pa s štirimi, npr. $m = 2,481 \text{ kg}$. **Natančnost podatkov omejuje natančnost rezultata: če so podatki podani na eno do dve mesti natančno, tudi rezultat ne more biti točen na več kot eno ali dve mesti.** Če nam pri računu kalkulator vrne rezultat na več mest, moramo preostala mesta zavreči.

4.4 Fizikalne konstante

V fiziki pogosto nastopajo konstante, ki povezujejo fizikalne količine in jih ne poskušamo pojasniti z bolj osnovnimi podatki, lahko pa jih izmerimo s poskusom. **Konstante, ki se pojavljajo v osnovnih zvezah, imenujemo osnovne oz. naravne konstante.**

Konstanta	Oznaka	Vrednost
gravitacijska konstanta	κ	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$
hitrost svetlobe v vakuumu	c_0	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
osnovni naboj	e_0	$1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$
influenčna konstanta	ϵ_0	$8,85 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$
indukcijska konstanta	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$

Tabela 4.2: Nekaj osnovnih fizikalnih konstant

Poleg osnovnih konstant pogosto uporabljamo **snovne konstante, ki nam podajajo specifične lastnosti snovi**, npr. gostota, specifična upornost ali toplotna prevodnost. Snovne konstante praviloma niso konstantne, ampak so odvisne od snovi in temperature, tlaka ...

Kako pa je z napakami konstant? Različne fizikalne konstante so izmerjene ali izračunane na različno število decimalnih mest natančno. Pri gravitacijski konstanti so tako zanesljiva samo tri decimalna mesta, osnovni naboj so izmerili na vsaj osem decimalk natančno, meritve nekaterih drugih konstant pa so še precej natančnejše. Zato bi lahko npr. za osnovni naboj zapisali $e_0 = 1,6021765 \cdot 10^{-19} \text{ As}$ in navedli absolutno napako meritve. Vendar bomo zapis konstant poenostavili in uporabljali vrednosti iz tabele.



5. Gibanje točkastega telesa

V tem poglavju bomo opisali premo in krivo gibanje točkastega telesa. V ta okvir sodijo tudi opisi prostega pada, poševnega meta in kroženja. Zaenkrat se ne bomo spraševali, zakaj se telo giblje in kaj je tisto, kar povzroči spremembe gibanja.

5.1 Osnovne definicije

Fizikalna veja, ki se ukvarja z opisom gibanja teles brez ugotavljanja vzrokov gibanja, se imenuje kinematika. Omejimo se na gibanje točkastega telesa, katerega velikost je zanemarljiva v primerjavi s premiki pri gibanju. Glede na tir razlikujemo premo in krivo gibanje: pri premem gibanju je tir raven (po premici), pri krivem pa ne. **Pri premem gibanju se smer vektorja hitrosti s časom ne spreminja, pri krivem gibanju pa se.** Če je gibanje premo, lahko usmerimo koordinatno os vzdolž smeri gibanja in gibanje opisujemo le v eni dimenziji. Včasih pa tudi premo gibanje opišemo v večdimenzionalnem koordinatnem sistemu. Na primer takrat, ko opazujemo gibanje več teles, ki se sicer vsa gibljejo premo, a v različnih smereh. Premo gibanje je npr. prosti pad, navpični met ali vožnja avta po ravni cesti. Zgledi krivega gibanja so poševni met, kroženje ali nihanje uteži.

Glede na časovno odvisnost hitrosti ločimo enakomerno in neenakomerno gibanje. **Če se velikost in smer hitrosti s časom ne spreminjata, govorimo o enakomernem gibanju.** V nasprotnem primeru je gibanje neenakomerno. Primer neenakomerne gibanja je tako tudi kroženje.

5.2 Premo gibanje

Za kvantitativni opis premega gibanja zadošča poznavanje odvisnosti lege telesa od časa. Obravnavajmo primer v eni dimenziji, lega telesa pa naj bo $x = x(t)$. Hitrost se v splošnem spreminja s časom, enaka je spremembi lege v časovnem intervalu - torej odvodu koordinate po času

$$v = \frac{dx}{dt}. \quad (5.1)$$

Kako se hitrost spreminja s časom, pove pospešek. Pospešek izračunamo kot odvod hitrosti po času ali drugi odvod koordinate po času

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (5.2)$$

Povprečno hitrost med dvema trenutkoma t_1 in t_2 izračunamo takole: $\langle v \rangle = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$, kjer sta x_1 in x_2 legi telesa ob danih trenutkih. Na podoben način izračunamo tudi povprečni pospešek $\langle a \rangle = (v_2 - v_1)/(t_2 - t_1)$.

Če bi namesto časovne odvisnosti koordinate poznali časovno odvisnost hitrosti $v = v(t)$, bi morali za popoln opis gibanja dodati še en začetni pogoj. Začetni pogoj je podatek, kje se nahaja telo v času $t = 0$. Potem lahko enolično izračunamo $x = x(t)$. Seveda bi bilo prav tako dobro, če bi pri znani odvisnosti $v(t)$ podali trenutno lego telesa pri kakem drugem času $t \neq 0$. Če pa imamo vnaprej podano časovno odvisnost pospeška $a = a(t)$, potrebujemo za enoličen opis gibanja dva začetna podatka. To sta navadno začetna lega $x(0) = x_0$ in začetna hitrost $v(0) = v_0$.

Zakaj lahko dobimo enolično vse tri količine v zaporedju $x(t) \rightarrow v(t) \rightarrow a(t)$ brez dodatnih podatkov, v obratni smeri $a(t) \rightarrow v(t) \rightarrow x(t)$ pa ne? Odgovor je v razliki med odvodom in integralom. Od lege do pospeška pridemo namreč z dvakratnim odvajanjem, odvod funkcije pa je enoličen. V obratno smer prehajamo z dvakratnim integriranjem po času, pri vsakem nedoločnem integralu pa dobimo po eno nedoločeno konstanto. Zapišimo še enkrat **enačbe, ki povezujejo vse tri ključne količine za opis enodimenzionalnega oziroma premega gibanja**

$$x = x(t) \quad (5.3)$$

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \leftrightarrow \quad x = x_0 + \int_0^t v(t) dt \quad (5.4)$$

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \leftrightarrow \quad v = v_0 + \int_0^t a(t) dt. \quad (5.5)$$

Premik Δx pri premem gibanju je enak spremembi koordinate $\Delta x = x_2 - x_1$. Lahko je pozitiven ali negativen. Nasprotno definiramo **pot** telesa kot naraščajočo količino, ne glede na smer gibanja telesa (»naprej« ali »nazaj« oziroma »levo« ali »desno«). Obe količini, premik in pot, med trenutkoma t_1 in t_2 izračunamo z integriranjem hitrosti po času, vendar na nekoliko različen način

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad (5.6)$$

in

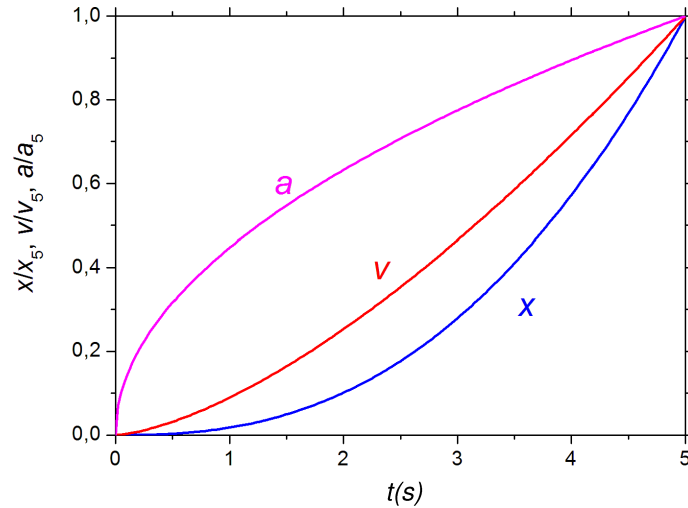
$$s = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt. \quad (5.7)$$

Enačba (5.6) je v bistvu samo drugače zapisana enačba (5.4) za primer $t_2 = t$ in $t_1 = 0$. Če se telo ves čas giblje v pozitivni smeri osi x (pozitivna hitrost), se vrednosti premika in poti ujemata. Razlika nastane, če se telo nekaj časa giblje v eno smer (npr. smer x), nato pa v drugo (npr. smer $-x$). Razlika med potjo in odmikom je dobro znana tudi iz vsakdanjega življenja. Ko se vrnemo s sprehoda, je naš odmik od začetne lege enak 0, saj smo spet doma. Pot, ki smo jo v tem času opravili, pa je različna od 0.

Računski zgled 5.2.1 Naj bo lega telesa potenčno odvisno od časa $x = Ct^k$. Izračunajmo hitrost in pospešek v odvisnosti od časa

$$v = \frac{dx}{dt} = Ckt^{k-1} \quad \text{in} \quad a = \frac{dv}{dt} = Ck(k-1)t^{k-2}.$$

Za $k > 2$ so vse tri funkcije $x(t)$, $v(t)$ in $a(t)$ naraščajoče. Da jih lahko smiselno spravimo na isti diagram, so na sliki (5.1) te funkcije prikazane v brezdimenzijski obliki $x(t)/x_5$, $v(t)/v_5$ in $a(t)/a_5$, kjer indeks 5 označuje vrednost v času $t = 5$ s.



Slika 5.1: Časovna odvisnost lege, hitrosti in pospeška za $x = Ct^k$, če je $k = 5/2$. Grafe smo normirali glede na vrednosti količin pri $t = 5$ s. □

Računski zgljed 5.2.2 Opišimo gibanje telesa, katerega lega se sinusno spreminja s časom

$$x = x_0 \sin(\omega t),$$

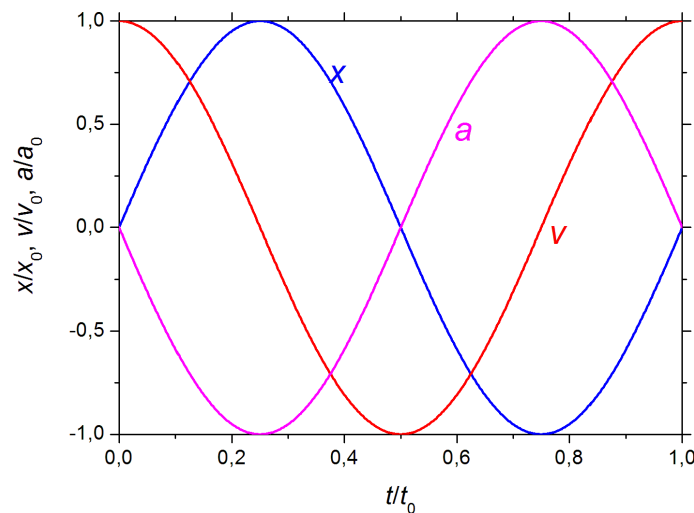
pri čemer je x_0 največji odmik (amplituda), ω pa imenujemo krožna frekvenca nihanja. Izračunajmo hitrost in pospešek

$$v = \frac{dx}{dt} = x_0 \omega \cos(\omega t) = v_0 \cos(\omega t)$$

in

$$a = \frac{dv}{dt} = -x_0 \omega^2 \sin(\omega t) = -a_0 \sin(\omega t).$$

Vpeljali smo še amplitudi hitrosti in pospeška $v_0 = x_0 \omega$ in $a_0 = x_0 \omega^2$. Na sliki (5.2) so prikazani vsi trije grafi v brezdimenzijski obliki: $x(t)/x_0$, $v(t)/v_0$ in $a(t)/a_0$. Vse tri funkcije so periodične, zato so prikazane samo za en nihajni čas $t_0 = 2\pi/\omega$.



Slika 5.2: Časovna odvisnost lege, hitrosti in pospeška pri sinusnem nihanju □

Računski zgleđ 5.2.3 Opišimo gibanje telesa, ki se eksponento približuje izhodišču z desne. Njegovo lego zapišemo kot

$$x = x_0 e^{-kt},$$

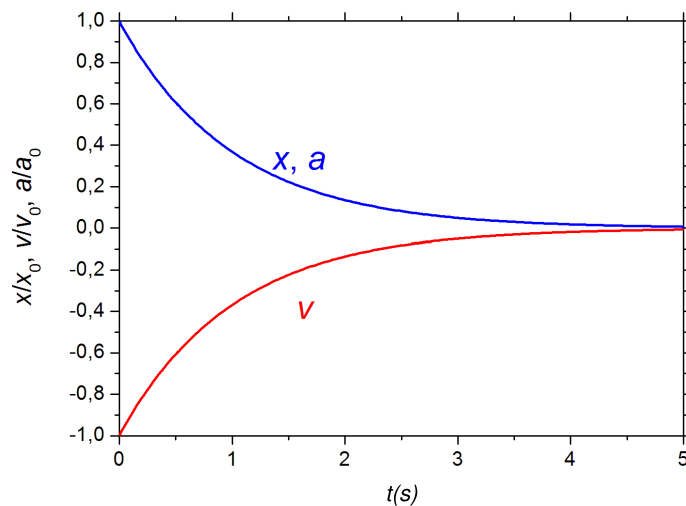
pri čemer je x_0 začetni odmik, $1/k$ pa karakteristični čas približevanja. Izračunajmo hitrost in pospešek

$$v = \frac{dx}{dt} = -x_0 k e^{-kt}$$

in

$$a = \frac{dv}{dt} = x_0 k^2 e^{-kt}.$$

Na graf (slika 5.3) spet narišemo normalizirane količine $x(t)/x_0$, $v(t)/v_0$ in $a(t)/a_0$, pri čemer je $v_0 = x_0 k$ in $a_0 = x_0 k^2$. Opazimo, da je hitrost ves čas negativna. To je pri naši izbiri koordinatnega sistema smiselno, saj se telo približuje izhodišču in se giblje v negativni smeri. Kljub negativni hitrosti je pospešek pozitiven, saj se velikost hitrosti zmanjšuje.



Slika 5.3: Časovna odvisnost lege, hitrosti in pospeška pri eksponentnem približevanju izhodišču. Grafa za x/x_0 in a/a_0 ujemata. Izbrali smo $k = 1 \text{ s}^{-1}$, gibanje pa opazujemo prvih 5 s. \square

5.3 Premo enakomerno gibanje

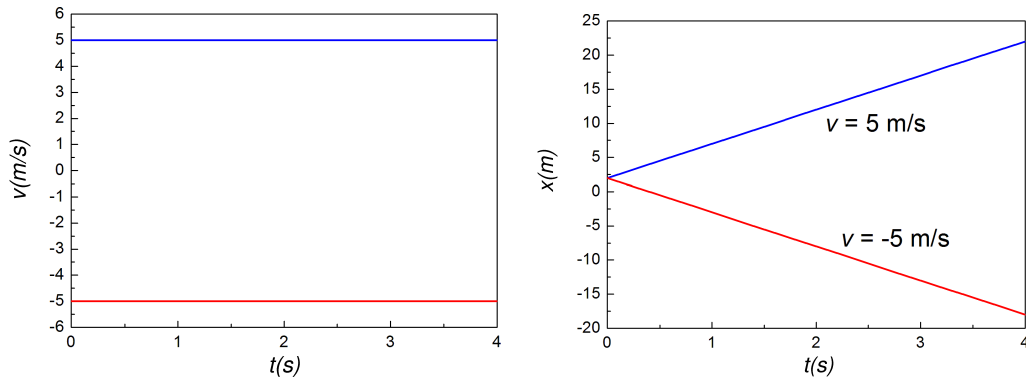
Pri premem enakomernem gibanju je hitrost v konstantna. Pospešek je enak 0, koordinata pa linearna funkcija časa

$$a = 0 \tag{5.8}$$

$$v = \text{konst.} \tag{5.9}$$

$$x = x_0 + vt. \tag{5.10}$$

Vzemimo konkretne podatke. Začetna lega naj bo pri $x_0 = 2 \text{ m}$. Eno telo naj se giblje s hitrostjo $v_1 = 5 \text{ m/s}$ v desno, drugo pa z enako veliko hitrostjo v levo: $v_2 = -5 \text{ m/s}$. Na sliki (5.4) so prikazani grafi hitrosti $v(t)$ in odmika $x(t)$ za čas t od 0 s do 4 s.



Slika 5.4: Odvisnosti $v(t)$ in $x(t)$ pri enakomernem gibanju s hitrostjo $v = 5 \text{ m/s}$ in $v = -5 \text{ m/s}$. Ob času $t = 0$ se telo nahaja v legi $x_0 = 2 \text{ m}$.

5.4 Premo enakomerno pospešeno gibanje

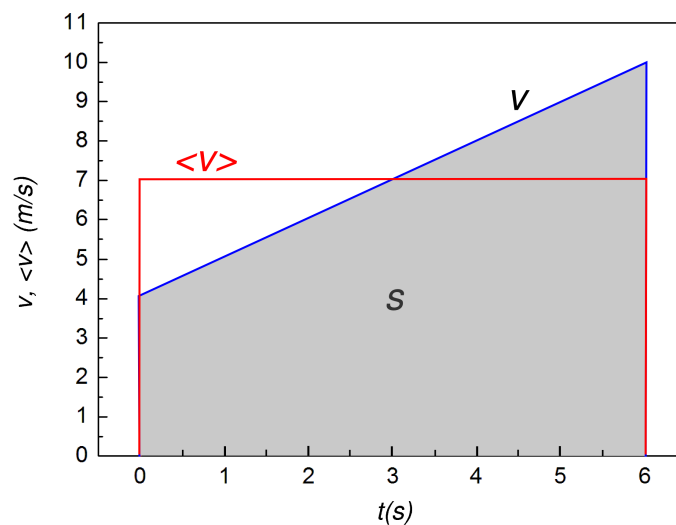
Pri premem enakomerno pospešenem gibanju je tir gibanja premica, pospešek a pa je konstanten. Lahko je pozitiven ali negativen. Trenutna hitrost, koordinata in povprečna hitrost pri premem enakomerno pospešenem gibanju so

$$a = \text{konst.} \quad (5.11)$$

$$v = v_0 + at \quad (5.12)$$

$$x = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}. \quad (5.13)$$

Pri tem je x_0 začetna lega, v_0 pa začetna hitrost. Zapišimo še povprečno hitrost $\langle v \rangle = \frac{v_0+v}{2}$ kot aritmetično sredino začetne in končne hitrosti. To je razvidno s slike (5.5): pot telesa je enaka integralu hitrosti na danem intervalu, to je ploščini lika pod krivuljo $v(t)$, hkrati pa je $s = \langle v \rangle t$. Ploščini označenega pravokotnika in trapeza se res ujemata. Na sliki je zgled z začetno hitrostjo $v_0 = 4 \text{ m/s}$, končno hitrostjo $v = 10 \text{ m/s}$ in povprečno hitrostjo $\langle v \rangle = 7 \text{ m/s}$.



Slika 5.5: Trenutna in povprečna hitrost pri enakomerno pospešenem gibanju. Opravljena pot je enaka ploščini osenčenega trapeza in hkrati ploščini rdečega pravokotnika.

Če iz enačb (5.12) in (5.13) odpravimo čas, dobimo zelo uporabno neposredno zvezo med hitrostjo in premikom pri enakomerno pospešenem gibanju

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) = 2a\Delta x. \quad (5.14)$$

Računski zgled 5.4.1 Avtomobil pospešuje s konstantnim pospeškom, tako da se na poti 200 m njegova hitrost poveča s 50 km/h na 75 km/h. Kolikšen je pospešek? Kolikšno hitrost pridobi v naslednjih 200 m?

Podatki:

$$v_0 = 50 \text{ km/h} = 50/3,6 \text{ m/s} = 13,89 \text{ m/s}$$

$$v_1 = 70 \text{ km/h} = 70/3,6 \text{ m/s} = 19,44 \text{ m/s}$$

$$\Delta x = 200 \text{ m}$$

$$a = ?$$

$$v_2 = ?$$

Iz enačbe (5.14) sledi

$$a = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2\Delta x} = 0,46 \text{ m/s}^2.$$

In naprej

$$a = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2\Delta x} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s}$$

in

$$v_2 = \sqrt{2v_1^2 - v_0^2} = 85,44 \text{ km/h. } \square$$

Prosti pad in navpični met

Značilen primer enakomerno pospešenega gibanja je padanje teles v gravitacijskem polju Zemlje. **Vsa telesa padajo enakomerno pospešeno z enakim težnim pospeškom g^1 .** Na Zemlji znaša težni pospešek $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ in kaže vedno navzdol, proti središču Zemlje.

Pri računanju je predznak pospeška telesa (ki sicer vedno kaže navzdol) odvisen od izbire koordinatnega sistema. Če izberemo koordinatni sistem tako, da kaže izbrana os navzgor, je težni pospešek negativen. Če pa kaže os navzdol, je pospešek pozitiven. **Za račun je vseeno, kako si izberemo koordinatni sistem, pomembno je le, da se izbire dosledno držimo.**

Pri prostem padu, ko telo spustimo z mesta, je najenostavneje, da usmerimo koordinatno os x navzdol. Pri tem vzamemo $x_0 = 0$ in $v_0 = 0$. Pospešek telesa kaže v smeri osi x in je zato pozitiven $a = g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Pri navpičnem metu navzgor z začetno hitrostjo v_0 je bolj priročno, če usmerimo os x navzgor in uporabimo zgornje enačbe s pogoji $x_0 = 0$, $v_0 = v_0$ in $a = -g$. Bralec naj za vajo sam pokaže, da je največja višina, ki jo telo doseže pri navpičnem metu navzgor z začetno hitrostjo v_0 , enaka $x_{\max} = v_0^2/(2g)$. Seveda je tudi stvar »okusa«, kateri simbol uporabimo za koordinato. Pri navpičnem metu navzgor namesto x pogosto uporabimo koordinato y ali z .

¹Model je zelo poenostavljen. Zanimarili smo vpliv drugih sil, npr. zračnega upora. Tudi za telesa, ki padajo v vodi, to ne velja. Poleg tega je težni pospešek odvisen od lege na Zemlji in od nadmorske višine, kar bomo podrobneje spoznali v nadaljevanju.

Računski zgleđ 5.4.2 Alpinist spusti s stene sneženo kepo v prepad. Njegov prijatelj s police 10 m višje pol sekunde pozneje vrže sneženo kepo navpično navzdol z začetno hitrostjo 10 m/s. Čez koliko časa od trenutka spusta prve kepe se kepi srečata in koliko nižje od prvega alpinista?

Podatki:

$$v_0 = 10 \text{ m/s}$$

$$\Delta h = 10 \text{ m}$$

$$\Delta t = 0,5 \text{ s}$$

$$t = ?$$

$$x = ?$$

Najprej nekaj o izbiri besed. Kadar predmet *spustimo*, to pomeni, da je njegova začetna hitrost enaka nič. Kadar pa predmet *vržemo* (navzgor ali navzdol), je njegova začetna hitrost različna od nič. Postavimo izhodišče koordinatnega sistema v prvega alpinista, koordinatno os pa usmerimo navpično navzdol. Zato bomo pri zapisu podatkov dali negativen predznak začetni legi druge kepe. Za prvo kepo velja $x_{10} = 0, v_{10} = 0$ in za drugo $x_{20} = -\Delta h, v_{20} = v_0$. Zapišemo enačbi za prosti pad (prva kepa) oziroma navpični met navzdol (druga kepa)

$$x_1 = \frac{gt^2}{2},$$

$$x_2 = x_{20} + v_{20}(t - \Delta t) + \frac{g(t - \Delta t)^2}{2} = -\Delta h + v_0(t - \Delta t) + \frac{g(t - \Delta t)^2}{2}.$$

Kepe se bosta srečali, ko bosta ob istem času t v isti legi, se pravi, ko bo veljalo $x_1 = x_2$.

Izpišemo kvadratni člen v zadnji enačbi in dobimo

$$\Delta h = v_0(t - \Delta t) - gt\Delta t + \frac{g\Delta t^2}{2}.$$

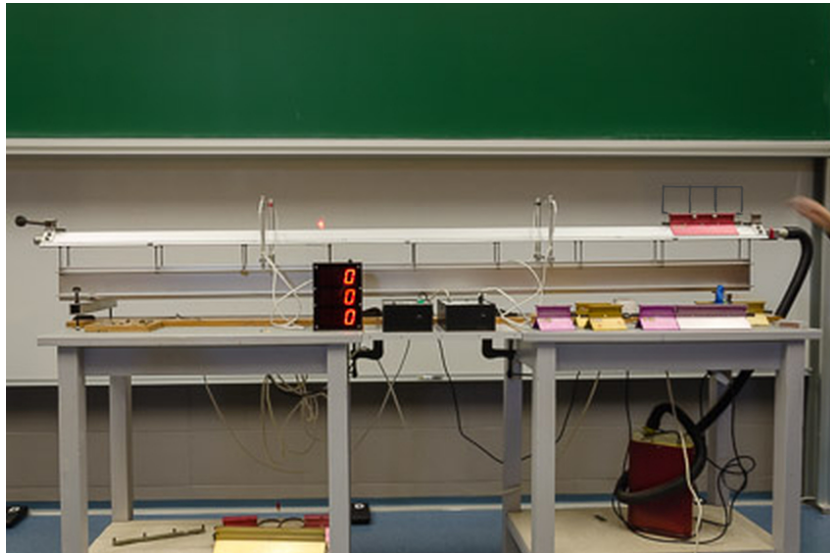
Kvadratna členu v času sta se odštela. Iz dobljene linearne enačbe za čas izračunamo $t = 2,7 \text{ s}$, potem pa še $x = 36 \text{ m}$. Kaj bi pri drugačnih podatkih pomenil morebitni negativni rezultat za čas, naj razmisli bralec sam. \square

Poskus 5.4.1 — Enakomerno in pospešeno gibanje jahača na zračni drči. Izmerili bomo hitrost ter pospešek nastavka (jahača), ki drsi po zračni drči. Bistvo zračne drče je, da skozi vrsto majhnih luknjic na površini drče piha zrak in tako ustvarja »zračno blazino«, po kateri se gibljejo jahači praktično brez trenja.

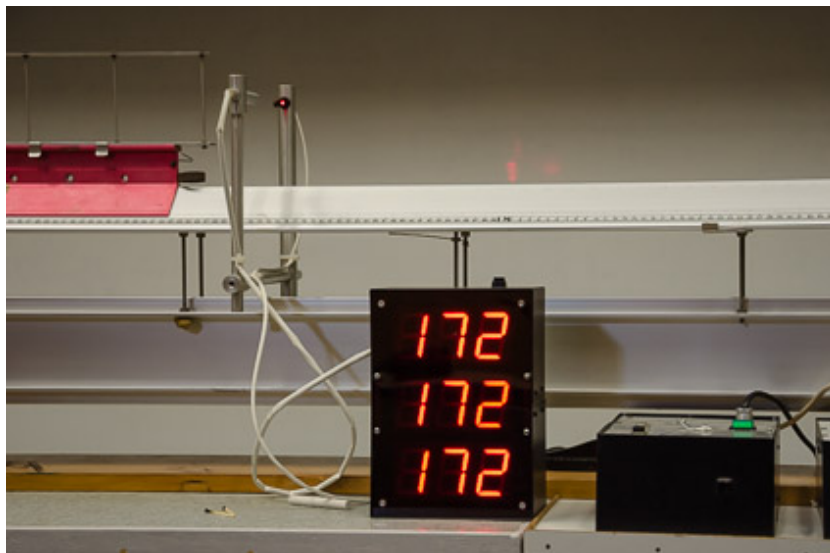
Za meritve hitrosti imamo ob drči svetlobni senzor, na katerega vpada laserski žarek. Ko je laserski žarek prekinjen, se sproži časovnik in meri čas do naslednje prekinitve svetlobe. Na voljo so trije taki časovniki, na jahaču pa je nastavek s štirimi navpičnimi prečkami v medsebojnem razmiku $d = 10 \text{ cm}$. Senzor in elektronika tako dajo tri časovne intervale za prehod vseh štirih prečk mimo sensorja.

V prvem delu poskusa jahača na vodoravni zračni drči rahlo potisnemo naprej, da začne drseti. Vsi trije izmerjeni časovni intervali so enaki $t = 172 \text{ ms}$, kar pomeni, da se jahač giblje enakomerno. Hitrost jahača je $v = d/t = 0,1 \text{ m}/0,172 \text{ s} = 0,581 \text{ m/s}$. Odvisna je od tega, kako jahača sunemo na začetku poskusa.

Za drug del poskusa zračno drčo nekoliko nagnemo in jahača prosto spustimo po nagibu drče. Ko dvignemo eno stran drče za $h_1 = 1,5$ cm, odčitamo na zaslonih časovne intervale $t_1 = 222$ ms, $t_2 = 215$ ms in $t_3 = 208$ ms. Če povečamo nagib drče, tako da eno stran dvignemo za $h_2 = 2,5$ cm, so časovni intervali krajši: $t_1 = 175$ ms, $t_2 = 169$ ms in $t_3 = 163$ ms. Iz izmerjenih časovnih intervalov lahko izračunamo pospešek jahača in ga primerjamo z izračunano vrednostjo pri nagibu drče za kot φ .



Zračna drča z jahačem.
Na jahaču so vidne 4 prečke, ki prekinjajo laserski žarek.



Enakomerno gibanje jahača po vodoravni drči

Pospešek bomo najprej izračunali iz prvih dveh časovnih intervalov, nato pa s tretjim intervalom preverili, ali se pospešek kaj spreminja. Do prvega senzorja pride jahač že z neko začetno hitrostjo v_0 , ki je ne poznamo. Enačba za dela poti, ki ustrežata časoma t_1 in t_2 , sta ob

predpostavki enakomerno pospešenega gibanja kar

$$d = \langle v \rangle_1 t_1 = \frac{v_0 + v_1}{2} t_1, \quad \text{in} \quad d = \langle v \rangle_2 t_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} t_2,$$

kjer sta v_1 in v_2 neznan hitrosti ob koncu prvega in drugega odseka. Torej imamo že tri neznanke: v_0 , v_1 in v_2 . Predpostavimo, da je pospešek na prvem in drugem odseku poti enak in dobimo še tretjo zvezo med hitrostmi

$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1} = \frac{v_2 - v_1}{t_2}.$$

Sistem teh treh enačb naj za vajo reši bralec sam. Tu navedimo le končni izraz in rezultat za pospešek glede na podatke za prva dva odseka poti

$$a = \frac{2d(t_1 - t_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} = 67 \text{ mm/s}^2 \quad \text{in} \quad a = \frac{2d(t_2 - t_3)}{t_2 t_3 (t_2 + t_3)} = 74 \text{ mm/s}^2.$$

Pospešek lahko izračunamo tudi drugače. Ker so omenjeni časovni intervali kratki, lahko računamo kar s povprečnimi hitrostmi v posameznih časovnih intervalih: $\langle v \rangle_1 = d/t_1 = 0,1 \text{ m}/0,222 \text{ s} = 0,450 \text{ m/s}$; $\langle v \rangle_2 = d/t_2 = 0,1 \text{ m}/0,215 \text{ s} = 0,465 \text{ m/s}$ in $\langle v \rangle_3 = d/t_3 = 0,1 \text{ m}/0,208 \text{ s} = 0,481 \text{ m/s}$. Za približni izračun vrednosti pospeška izračunamo povprečje prvih dveh časovnih intervalov in to povprečje naj bo časovna razlika $\Delta t_{12} = (t_1 + t_2)/2 = 218,5 \text{ ms} \rightarrow a_1 = (\langle v \rangle_2 - \langle v \rangle_1)/\Delta t_{12} = 0,015 \text{ m/s}/0,2185 \text{ s} = 69 \text{ mm/s}^2$. Če bralec natančno razmisli, vidi, da sta oba načina izračuna pospeška enaka. Do številske razlike je prišlo zaradi vmesnega zaokrožanja vrednosti povprečnih hitrosti. Pri večjem nagibu drče izračunamo iz danih časov vrednosti pospeška 118 mm/s^2 in 131 mm/s^2 .

Vidimo, da rezultati niso zelo natančni. Vzrokov za to je lahko veliko, najbolj bistven pa je verjetno kratek čas gibanja jahača med senzorjema, tako da so časovne razlike majhne. Meritve pri tem poskusu so zato dober zgled za oceno napake. Določimo jo!

V enačbi za pospešek je 5 faktorjev, ki so obremenjeni z mersko napako: razmik d , razlika časov $t_1 - t_2$, časa t_1 in t_2 ter vsota časov $t_1 + t_2$. Ocenimo (delno tudi po občutku!) njihove absolutne in relativne napake. Napako pri nastavitvi razmika d ocenimo na $\Delta d = 2 \text{ mm}$, torej je relativna napaka $\Delta d/\langle d \rangle = 0,2 \text{ cm}/10 \text{ cm} = 2 \%$. Ker naprava zaokroža čas na 1 ms (vsaj pri izpisu na zaslonu), lahko računamo z napako $\Delta t = 0,5 \text{ ms}$. Izmerjena časa t_1 in t_2 sta okrog 200 ms in ocenimo ustrezni relativni napaki: $\Delta t_1/\langle t_1 \rangle = \Delta t_2/\langle t_2 \rangle = 0,5 \text{ ms}/200 \text{ ms} = 0,25 \%$. Enako velja za vsoto obeh časov, saj se seštejeta tako absolutni napaki kot povprečna (izmerjena) časa: $\Delta(t_1 + t_2)/(\langle t_1 \rangle + \langle t_2 \rangle) = 1 \text{ ms}/400 \text{ ms} \approx 0,25 \%$. Drugače je z razliko časov. Ta prinese največjo relativno napako, saj se absolutni napaki seštejeta, izmerjena časa pa odštejeta: $\Delta(t_1 - t_2)/(\langle t_1 \rangle - \langle t_2 \rangle) = 1 \text{ ms}/7 \text{ ms} = 14 \%$. Skupna relativna napaka pri računu pospeška je zato kar velika

$$\Delta a/\langle a \rangle = \Delta d/\langle d \rangle + 3\Delta t_1/\langle t_1 \rangle + \Delta(t_1 - t_2)/(\langle t_1 \rangle - \langle t_2 \rangle) \approx 17 \%.$$

V prihodnjem poglavju se bomo naučili pospešek telesa, drsečega po klancu, tudi izračunati (enačba 6.12). Zaenkrat zapišimo samo izraz za pospešek telesa, ki drsi po klancu z naklonom $\varphi = h/L$ brez trenja: $a = g \sin \varphi = g(h/L)$. Za prvi primer dobimo vrednost $a = 73 \text{ mm/s}^2$, za drugi pa $a = 122 \text{ mm/s}^2$. Vse izmerjene vrednosti se z izračunanimi ujemajo v okviru napake.

5.5 Krivo gibanje v dveh dimenzijah

Če je gibanje ravninsko, za njegov opis potrebujemo dve koordinati: x in y . Pri tem si izberemo primeren dvodimenzionalni koordinatni sistem s pravokotnima osema, ki se sekata v izhodišču. Navadno vzamemo desnosučni kartezični koordinatni sistem, pri katerem x narašča proti »desni«, y pa narašča »navzgor«. Gibanje telesa opišemo s časovnimi odvisnostmi obeh koordinat $x(t)$ in $y(t)$, ki ju strnjeno zapišemo s krivuljo $(x(t), y(t))$. Iz obeh enačb lahko eliminiramo čas in dobimo odvisnost $y(x)$. **Če poznamo samo odvisnost $y(x)$, še ne vemo vsega o gibanju, saj se lahko telo po isti krivulji giblje različno hitro.**

Enačbe, ki povezujejo koordinate s komponentami hitrosti in pospeška, so enake kot pri premem gibanju, le da jih zapišemo za vsako koordinato posebej

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} & v_y &= \frac{dy}{dt} \\ a_x &= \frac{dv_x}{dt} & a_y &= \frac{dv_y}{dt}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Vektorje lahko seveda pišemo tudi v strnjeni obliki

$$\vec{r} = (x, y), \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (v_x, v_y), \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (a_x, a_y). \quad (5.16)$$

Račun za pot s pri gibanju po ukrivljenem tiru ni preprost. Poznati moramo časovno spreminjanje obeh komponent hitrosti. Pot v času od 0 do t je potem enaka

$$s = \int_0^t |\vec{v}| dt = \int_0^t \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} dt. \quad (5.17)$$

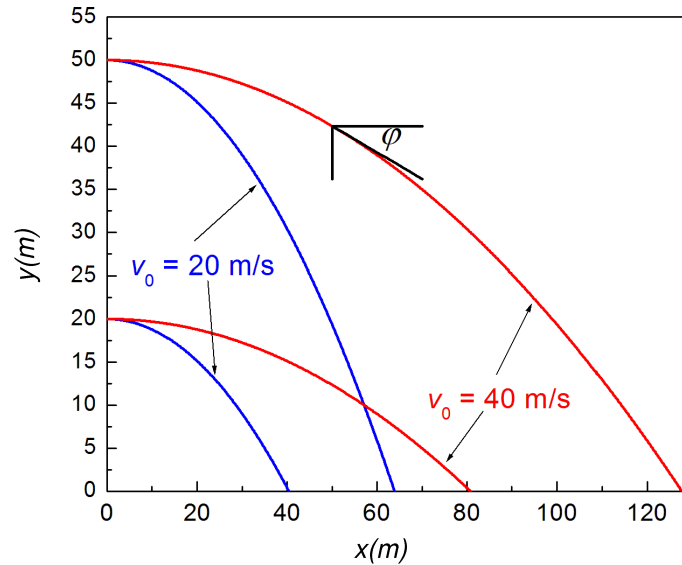
Izračun se poenostavi za gibanje po krožnici, saj lahko integral preprosto izračunamo.

5.6 Vodoravni met

Pri opisu prostega pada in vodoravnega meta smo spoznali, da se vsa padajoča telesa pospešujejo s konstantnim pospeškom, ki vedno kaže navzdol. To velja za kamen, ki ga spustimo, ali za kepo, ki jo vržemo navpično navzgor ali navzdol. Isto pa velja tudi za predmete, ki jih vržemo v poljubni smeri. Najprej si oglejmo met v vodoravni smeri, v naslednjem razdelku pa bomo obravnavali še poševni met.

Vodoravni met opisuje gibanje predmeta, ki smo mu ob začetku dali neko hitrost v vodoravni smeri. Čim ga spustimo, se začne pospešeno gibati proti tlom. Zato leti v vodoravni smeri samo v začetnem trenutku, nato pa se začne njegov tir ukrivljati in ima, kot bomo videli, parabolično obliko (slika 5.6).

Najprej izberemo koordinatni sistem. Os x usmerimo vodoravno v smeri vektorja začetne hitrosti, os y pa navzgor. Izhodišče naj bo na tleh pod začetno lego telesa. Gibanje je dvodimenzionalno, zato moramo gibanje obravnavati ločeno po komponentah. **Gibanje razdelimo na enakomerno gibanje v vodoravni smeri in enakomerno pospešeno v navpični smeri.** V vodoravni smeri telesa med letom namreč nič ne pospešuje ali zavira, zato je v tej smeri gibanje enakomerno in poteka s stalno hitrostjo v_0 , ki smo jo dali telesu na začetku.



Slika 5.6: Tiri gibanja pri vodoravnem metu pri dveh različnih višinah in začetnih hitrostih (enačba 5.19). V tej predstavitvi smo usmerili os y navzgor in postavili tla na višino nič.

Pospešek, ki deluje smeri negativne osi y , je ravno težni pospešek. Ustrezne enačbe so

$$\begin{aligned} a_x &= 0 & v_x &= v_{x0} + a_x t = v_0 + 0 = v_0 & x &= x_0 + v_{x0} t + \frac{a_x t^2}{2} = v_0 t \\ a_y &= -g & v_y &= v_{y0} + a_y t = 0 - gt = -gt & y &= y_0 + v_{y0} t + \frac{a_y t^2}{2} = y_0 - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Iz gornjih izrazov za koordinato x in y eliminiramo čas in dobimo zvezo med koordinatama, ki opisuje tir gibanja (slika 5.6)

$$y = y_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \quad (5.19)$$

Telo se torej giblje po paraboli. V začetku je gibanje telesa vodoravno, nato pa postaja vse bolj strmo. To razberemo tudi iz naklonskega kota tira gibanja

$$\varphi = \arctan\left(\frac{|v_y|}{v_x}\right) = \arctan\left(\frac{gt}{v_0}\right), \quad (5.20)$$

ki se s časom povečuje. Absolutna vrednost $|v_y|$ ustreza izbiri kota φ , od vodoravnice navzdol.

Računski zgled 5.6.1 Otrok vrže v vodoravni smeri frnikolo z začetno hitrostjo 6 m/s z višine 1 m nad tlemi. Kako daleč od njega pade frnikola na tla?

Podatka:

$$v_0 = 6 \text{ m/s}$$

$$h = 1 \text{ m}$$

$$x = ?$$

V enačbi (5.19) pišemo $y_0 = h$ in iz pogoja za padec na tla ($y = 0$) izračunamo premik frnikole v smeri x

$$x = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2,7 \text{ m. } \square$$

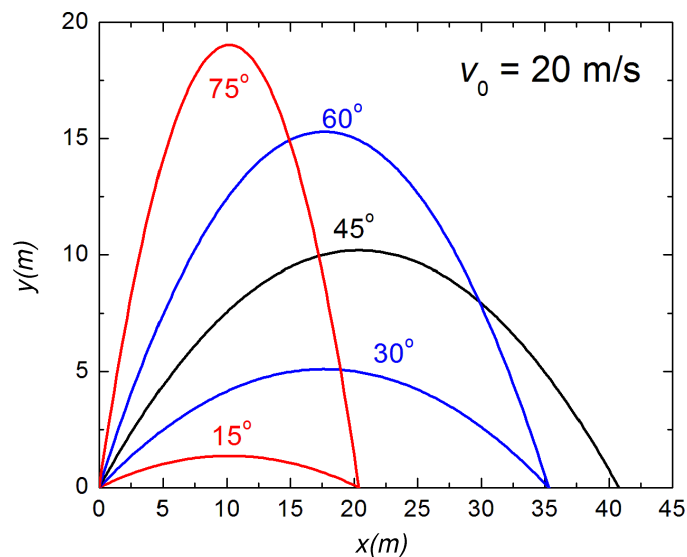
5.7 Poševni met

Pri poševnem metu vržemo telo z začetno hitrostjo v_0 v poševni smeri pod začetnim kotom α glede na vodoravnico. Izkazuje se, da je tudi v tem primeru tir paraboličen, le teme ni več v začetni legi telesa. Usmerimo os x vodoravno, os y pa navzgor. Izhodišče naj bo v začetni legi telesa (pri $t = 0$). Tudi pri poševnem metu **gibanje razstavimo na enakomerno gibanje v vodoravni smeri in pospešeno gibanje v navpični smeri**. V navpični smeri ga opišemo kot navpičen met. Ustrezne enačbe so

$$\begin{aligned} a_x &= 0 & v_x &= v_0 \cos \alpha & x &= (v_0 \cos \alpha) t \\ a_y &= -g & v_y &= v_0 \sin \alpha - gt & y &= (v_0 \sin \alpha) t - gt^2/2. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Iz enačb za koordinati x in y lahko eliminiramo čas in dobimo direktno parabolično zvezo med koordinatama (slika 5.7)

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (5.22)$$



Slika 5.7: Tiri gibanja pri poševnem metu pri različnih začetnih kotih α . Pri dveh komplementarnih kotih, npr. 15° in 75° , dobimo enak domet. Največji domet je pri kotu 45° .

Izračunajmo še domet, če pade telo na tla pri isti višini, s katere ga vržemo. Vstavimo $y = 0$ v enačbo (5.22) in dobimo

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}. \quad (5.23)$$

Najvišjo lego na paraboli dobimo podobno kot pri navpičnem metu. Upoštevamo, da je v vrhnji točki $v_y = 0$ in zapišemo

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (5.24)$$

Razmerje med največjo koordinato y in x pri danem kotu α pa je

$$\frac{y_{\max}}{x_{\max}} = \frac{\tan \alpha}{4}. \quad (5.25)$$

Računski zglede 5.7.1 Predmet odleti s hitrostjo v_0 iz koordinatnega izhodišča. Kolikšen mora biti kot meta α glede na vodoravnico, da objekt zadane tarčo s koordinatama x in y ?

V enačbi (5.22) uporabimo pri drugem členu zvezo $1/\cos^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$, da dobimo kvadratno enačbo za spremenljivko $z = \tan \alpha$

$$z^2 - \frac{2v_0^2}{gx}z + \left(\frac{2v_0^2y}{gx^2} + 1\right) = 0.$$

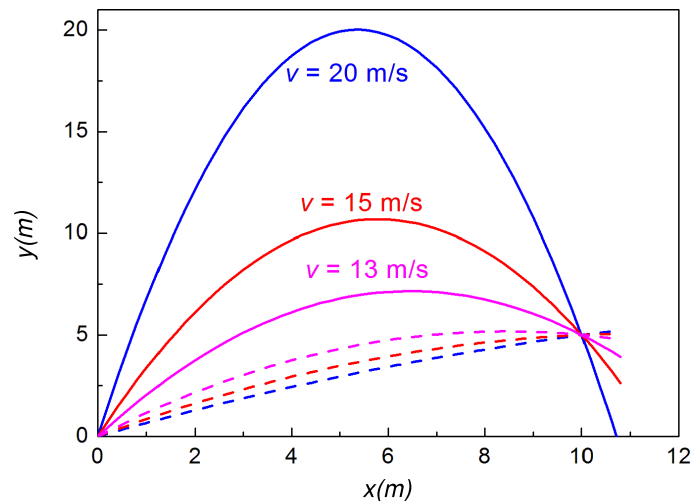
Spomnimo se, da ima kvadratna enačba $Az^2 + Bz + C = 0$ dve realni rešitvi

$$z_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A},$$

če je diskriminanta pozitivna $D = B^2 - 4AC > 0$. V našem primeru zapišemo končno rešitev

$$\alpha = \arctan\left(\frac{v_0^2}{gx} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx}\right)^2 - \left(\frac{2v_0^2y}{gx^2} + 1\right)}\right).$$

Rešitev s pozitivnim predznakom pred korenem pomeni, da vržemo objekt pod velikim kotom (blizu 90°) glede na vodoravnico. Objekt zleti visoko in zadane tarčo v padajočem delu parabole. Rešitev z negativnim predznakom pred korenem pa pomeni, da vržemo objekt pod kotom samo malo nad direktno zveznico med izhodiščem in tarčo (slika 5.8).



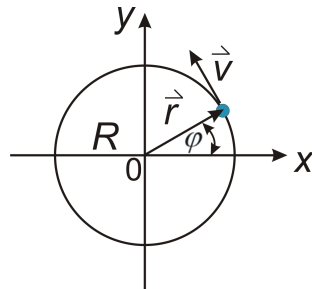
Slika 5.8: Zadetek tarče pri različnih začetnih hitrostih in kotih

V primeru, ko je hitrost v_0 glede na koordinati tarče x in y ravno tolikšna, da velja $D = 0$, imamo samo eno rešitev za začetni kot. Tudi za ta limitni primer imamo nazorno geometrijsko predstavbo. Vzemimo $D > 0$ in diskriminanto postopno zmanjšujemo proti vrednosti nič. Pri večji rešitvi za α velja ob tarči $dy/dx < 0$, ker leti objekt že poševno navzdol, pri manjši rešitvi za α pa velja ob tarči $dy/dx > 0$, saj leti objekt še poševno navzgor. Ko gre D proti 0, se strmina parabole ob tarči zmanjšuje za oba začetna kota, saj se zmanjšuje tudi razlika med samima kotoma. Ko je $D = 0$, je torej tudi $dy/dx = 0$. To pomeni, da je v primeru, ko imamo samo eno rešitev za začetni kot, tarča na temenu (najvišji točki) parabole in objekt jo zadane v vodoravni smeri.

V primeru $D < 0$ enačba za kot nima več realnih rešitev, saj je začetna hitrost objekta premajhna in tarče sploh ne zadane. Mejni pogoj $D = 0$ da kvadratno enačbo za mejno hitrost in bralec naj jo za vajo izračuna sam. \square

5.8 Kroženje

Poseben primer krivega gibanja je kroženje. Telo naj kroži v ravnini (xy) po krožnici s polmerom R in središčem v izhodišču (slika 5.9). Za opis bi navadno uporabili dolžino loka l , hitrost v (ki pomeni trenutno obodno hitrost) in tangencialni pospešek a_t , ki spreminja velikost hitrosti. Za opis kroženja je bolj priročno vpeljati spremenljivke kot φ , kotno hitrost ω in kotni pospešek α .



Slika 5.9: Geometrija pri opisu kroženja

Povezovalne enačbe med navadnimi in kotnimi količinami so

$$l = R \cdot \varphi \quad (5.26)$$

$$v = R \cdot \omega \quad (5.27)$$

$$a_t = R \cdot \alpha. \quad (5.28)$$

Zlahka izpeljemo zveze med kotnimi količinami

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (5.29)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}, \quad (5.30)$$

ki so analogne zvezam, kot jih poznamo iz kinematike. **Kotna hitrost je odvod kota po času, kotni pospešek pa odvod kotne hitrosti po času.**

Po gornjem zapisu lahko sklepamo, da je količina kot φ brez enot. Navadno kot merimo v radianih, pri čemer radianov po dogovoru ne pišemo. Če rečemo npr. $\varphi = 4$, to pomeni štiri radiane. V stopinjah je tak kot $\varphi = 4 \text{ rad} = 4 \cdot 180^\circ / \pi$. Enota za kotno hitrost ω je $1/s$ (oziroma rad/s), za kotni pospešek α pa $1/s^2$ (oziroma rad/s^2).

V enačbah (5.27) in (5.28) smo zapisali le velikost hitrosti in tangencialnega pospeška. V resnici sta to vektorja. Njuni smeri ležita v smeri tangente na krožnico v točki, kjer se telo ob danem trenutku nahaja (glej sliko 5.9). V splošnem se količina, ki jo opišemo z vektorjem, lahko spremeni na dva načina. Lahko se ji spremeni velikost, lahko pa se ji spremeni smer. Iz kinematike vemo, da je sprememba hitrosti v času povezana s pospeškom. **Spreminjanje velikosti obodne hitrosti opišemo s tangencialnim pospeškom a_t , spreminjanje kotne hitrosti pa s kotnim pospeškom α .** Če sta kotni in tangencialni pospešek enaka nič ($\alpha, a_t = 0$), se kotna in obodna hitrost ne spreminjata in kroženje je enakomerno. Sicer je kroženje pospešeno.

Pri vsakem kroženju, tudi enakomernem, pa se neprestano spreminja smer vektorja hitrosti. **Spreminjanje smeri hitrosti opišemo z radialnim pospeškom, ki kaže proti središču kroženja.**

Radialni pospešek, pravimo mu tudi centripetalni pospešek, je po velikosti enak

$$a_r = R \cdot \omega^2 = \frac{v^2}{R}. \quad (5.31)$$

Gornjo enačbo lahko izpeljemo iz geometrijske slike kroženja, mi pa jo izpeljimo matematično:

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi & y &= R \sin \varphi \\ v_x &= \frac{dx}{dt} = -R \sin \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = -R\omega \sin \varphi & v_y &= \frac{dy}{dt} = R \cos \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = R\omega \cos \varphi \\ a_x &= \frac{dv_x}{dt} = -R\omega^2 \cos \varphi - R\alpha \sin \varphi & a_y &= \frac{dv_y}{dt} = -R\omega^2 \sin \varphi + R\alpha \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Zapisali smo splošno obliko pospeška pri kroženju v kartezičnih koordinatah. Bralcu prepustimo v vajo, da poišče le radialno komponento in s tem pokaže veljavnost enačbe (5.31). Lahko se omeji na primer, ko je $\alpha = 0$.

Celotni pospešek na krožeče telo izračunamo po Pitagorovem izreku iz radialnega in tangencialnega pospeška ali iz obeh komponent pospeška a_x in a_y .

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}. \quad (5.33)$$

★ Čeprav je kroženje ravninsko gibanje, potrebujemo za njegov natančen opis v tridimenzionalnem prostoru dodatno informacijo. Vedeti moramo, kako je ravnina kroženja orientirana v prostoru. Zgoraj vpeljane kotne količine (kot, kotna hitrost in kotni pospešek) so zato v splošnem vektorji in ne skalarji. Vsi trije vektorji so pravokotni na ravnino vrtenja (v našem primeru ravnino xy , kažejo torej v smeri osi z). Celoten zapis vektorjev kroženja v ravnini xy je potem

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (x, y, 0) & \vec{v} &= (v_x, v_y, 0) & \vec{a} &= (a_x, a_y, 0) \\ \vec{\varphi} &= (0, 0, \varphi) & \vec{\omega} &= (0, 0, \omega) & \vec{\alpha} &= (0, 0, \alpha). \end{aligned}$$

Primer: če telo kroži v nasprotni smeri urinega kazalca, je vektor kotne hitrosti usmerjen v smeri pozitivnega poltraka osi z . Bralec naj za boljše predstavo sam preveri veljavnost zveze

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

5.9 Enakomerno kroženje

Pri enakomernem kroženju je kotni pospešek enak nič, kotna hitrost konstantna, kot pa linearna funkcija časa. Ker se kotna hitrost ne spreminja, se ohranja tudi velikost radialnega pospeška. Zapišimo to z enačbami

$$\alpha = 0, \quad \omega = \omega_0 = \text{konst.}, \quad \varphi = \omega_0 t \quad \text{in} \quad a_r = R\omega_0^2. \quad (5.34)$$

V primeru enakomernega kroženja se enačbe (5.32) poenostavijo in dobimo

$$\begin{aligned} x &= R \cos(\omega_0 t) & y &= R \sin(\omega_0 t) \\ v_x &= -R\omega_0 \sin(\omega_0 t) = -v_0 \sin(\omega_0 t) & v_y &= R\omega_0 \cos(\omega_0 t) = v_0 \cos(\omega_0 t) \\ a_x &= -R\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) = -a_r \cos(\omega_0 t) & a_y &= -R\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) = -a_r \sin(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Pri zapisu smo upoštevali $v_0 = R\omega_0$ in $a_r = R\omega_0^2$. Pri enakomernem kroženju je celotni pospešek kar enak radialnemu, saj je

$$a_{\text{celotni}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-a_r \cos(\omega t))^2 + (-a_r \sin(\omega t))^2} = a_r. \quad (5.36)$$

Iz enačb (5.35) razberemo tudi, da je smer radialnega pospeška ravno nasprotna smeri radialnega vektorja. **Radialni pospešek kaže v smeri od krožečega telesa proti središču kroženja.** Izračunajmo še skalarni produkt

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{v} &= (x, y) \cdot (v_x, v_y) = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t)) \cdot (-v \sin(\omega t), v \cos(\omega t)) = \\ &= -Rv \cos(\omega t) \sin(\omega t) + Rv \sin(\omega t) \cos(\omega t) = 0. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Ker je skalarni produkt vektorjev \vec{r} in \vec{v} enak nič, sta vektorja res medsebojno pravokotna.

Pri enakomernem kroženju pogosto vpeljemo še dve količini, tesno povezani s kotno hitrostjo. Prva je **frekvenca kroženja ν , ki pove število polnih obratov, ki jih krožeče telo naredi v časovni enoti.** Velja

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}. \quad (5.38)$$

Drug parameter je obhodni čas. **Obhodni čas t_0 je čas, ki ga krožeče telo potrebuje, da naredi poln obrat in se vrne v začetno lego**

$$t_0 = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (5.39)$$

Računski zgled 5.9.1 Kolikšna je relativna hitrost kroženja točk na ekvatorju glede na os vrtenja pri rotaciji Zemlje? Kolikšna pa je hitrost točk na vzporedniku zemljepisne širine 45° ? Izračunaj še njihov centripetalni pospešek.

Podatki:

$$t_0 = 24 \text{ h}$$

$$R = 6400 \text{ km}$$

$$\vartheta_1 = 0^\circ$$

$$\vartheta_2 = 45^\circ$$

$$v_1, v_2, a_{r1}, a_{r2} = ?$$

Za en poln obrat potrebuje Zemlja 24 ur, torej je to enako t_0 . Na ekvatorju je obodna hitrost:

$$v_1 = R\omega = R \frac{2\pi}{t_0} = 465 \text{ m/s},$$

na 45° zemljepisne širine (severno ali južno) pa je zaradi manjšega radija kroženja manjša: $v_2 = v_1 \cos \vartheta = 329 \text{ m/s}$. Centripetalni pospešek na ekvatorju je tako

$$a_{r1} = R\omega^2 = R \left(\frac{2\pi}{t_0} \right)^2 = 0,034 \text{ m/s}^2,$$

na 45° zemljepisne širine pa $a_{r2} = a_{r1} \cos \vartheta = 0,024 \text{ m/s}^2$.

Telo na ekvatorju torej ne občuti samo težnega pospeška, ampak tudi centripetalni pospešek zaradi vrtenja Zemlje a_{r1} . Navidezni težni pospešek je zato na ekvatorju za približno a_{r1} manjši kot na polih. Pri natančnejšem računu je treba upoštevati tudi rahlo sploščenost Zemlje, pri zemljepisnih širinah $\vartheta \neq 0$ pa bi morali pri računu efektivnega težnega pospeška upoštevati tudi, da kaže težni pospešek proti središču Zemlje, zgoraj izračunani pospešek pa proti Zemljini osi vrtenja. \square

5.10 Enakomerno pospešeno kroženje

Pri enakomerno pospešenem kroženju sta kotni in tangencialni pospešek različna od nič, vendar konstantna. Po analogiji z enačbama iz kinematike (enačbi 5.11 in 5.13), ki veljata za enakomerno pospešeno premo gibanje, lahko zapišemo enačbe, ki veljajo za enakomerno pospešeno kroženje. Naj bo (konstanten) kotni pospešek α , začetna kotna hitrost ω_0 in začetna obodna hitrost $v_0 = R\omega_0$. Ob začetnem pogoju $\varphi(0) = 0$ velja

$$\begin{array}{ll} \alpha = \text{konst.} & a_t = R\alpha = \text{konst.} \\ \omega = \omega_0 + \alpha t & v = v_0 + a_t t \\ \varphi = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} & l = v_0 t + \frac{a_t t^2}{2}. \end{array} \quad (5.40)$$

Iz analogije z enačbo (5.14) sledita še dve koristni zvezi

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\varphi \quad v^2 = v_0^2 + 2a_t l. \quad (5.41)$$

Računski zgled 5.10.1 Vrtiljak najprej miruje, nato pa začne enakomerno pospeševati s kotnim pospeškom $0,3 \text{ s}^{-2}$. Čez koliko časa in po koliko zasukih bo centripetalni pospešek poljubne točke vrtiljaka 45-krat tolikšen kot tangencialni?

Podatka:

$$\alpha = 0,3 \text{ s}^{-2}$$

$$a_r = 45a_t$$

$$t = ?$$

$$N = ?$$

Upoštevajmo enačbi (5.28) in (5.31) za obe komponenti pospeška in dobimo

$$a_r = 45a_t \quad \rightarrow \quad R\omega^2 = 45R\alpha.$$

Upoštevamo, da kotna hitrost linearno narašča s časom $\omega = \alpha t$ in dobimo

$$(\alpha t)^2 = 45\alpha \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{45}{\alpha}} = 12 \text{ s.}$$

V začetku je vrtiljak miroval, zato velja

$$\varphi = \frac{\alpha t^2}{2}.$$

Pri enem zasuku se vrtiljak zavrti za kot 2π (v radianih), zato

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\alpha t^2}{4\pi} = \frac{45}{4\pi} = 3,58. \quad \square$$

Računski zgled 5.10.2 Kroglo vržemo pod kotom 60° glede na vodoravnico z začetno hitrostjo 15 m/s iz izhodišča (poševni met). V vrhnji točki parabole (temenu) poišči paraboli najbolj prilegajočo se krožnico in določi njen polmer ter njeno središče. Kolikšni sta v temenu parabole centripetalni in tangencialni pospešek?

Podatka:

$$\vartheta = 60^\circ$$

$$v_0 = 15 \text{ m/s}$$

$$a_r, a_t = ?$$

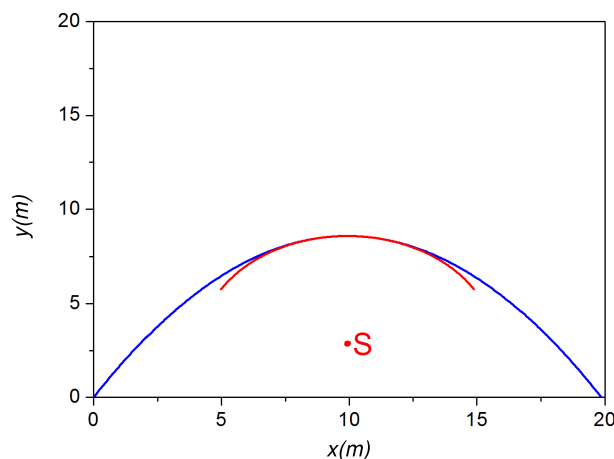
Začnimo s komponentama pospeška. V temenu ima velikost trenutne hitrosti $v(t)$ minimum, zato je tangencialni pospešek tam enak nič $a_t = dv/dt = 0$. Radialni pospešek je v tej točki kar enak težnemu $a_r = g$. Z njim se ujema tudi po smeri, navpično navzdol.

Kako pa je s prilegajočo se krožnico? Znano je, da lahko v vsaki točki poljubne gladke ravninske krivulje $y(x)$ prilepimo tesno se prilegajočo krožnico. V točki stikališča se ujemata koordinati x in y ter prvi $y'(x)$ in drugi odvod $y''(x)$ obeh krivulj. Z drugimi besedami: ujema se stična točka, skupna je tangenta, ujema pa se tudi lokalna ukrivljenost obeh krivulj. Mi lahko računamo preprosteje. Zaradi geometrije in smeri radialnega pospeška vemo, da je središče krožnice S točno pod temenom parabole.

Najprej dobimo po enačbah (5.23) in (5.24) koordinati temena parabole

$$x_T = \frac{1}{2}x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin(2\vartheta)}{2g} = 9,93 \text{ m} \quad \text{in} \quad y_T = y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \vartheta}{2g} = 8,60 \text{ m}.$$

V temenu je $v_y = 0$ (ker je tam tangenta na krivuljo vodoravna) in velikost hitrosti enaka $v = v_x = v_0 \cos \vartheta = 7,5 \text{ m/s}$. Polmer krožnice izračunamo iz radialnega pospeška $a_r = g = v^2/R$, iz česar sledi $R = v^2/g = 5,73 \text{ m}$. Nazadnje zapišimo še koordinati središča krožnice $x_S = x_T = 9,93 \text{ m}$ in $y_S = y_T - R = 2,87 \text{ m}$. Slika (5.10) prikazuje ustrezna grafa parabole in dela krožnice za naš primer.



Slika 5.10: Graf parabole (modra krivulja) in del krožnice (rdeča krivulja), ki se ji prilega v temenu. Točka S označuje lego središča te krožnice. \square

6. Dinamika točkastega telesa

Sile srečujemo na vsakem koraku in na vseh velikostnih skalah. Dobro poznamo gravitacijsko silo, silo trenja, silo upora, silo vzmeti, silo vzgona, centripetalno silo ... Na mikroskopskem nivoju delujejo sile med osnovnimi gradniki snovi (med atomi ali med njihovi sestavni delci protoni, nevtroni in elektroni ali kvarki). V tem primeru raje govorimo o interakciji med osnovnimi delci, kot pa o silah, ki delujejo med njimi. Na kozmološkem nivoju gravitacijska sila povezuje med seboj zvezde in galaksije. Brez sil bi sveta, v kakršnem živimo, ne bilo. V nadaljevanju bomo zapisali Newtonove zakone za točkasto telo in pogledali nekaj primerov njihove uporabe na raznih praktičnih primerih.

6.1 Newtonovi zakoni

Sile povzročajo pri telesih razne mehanske spremembe, pri čemer sta najbolj očitni sprememba gibanja teles in njihova deformacija. Omejimo se na vpliv sil na gibanje teles, ki ga opišemo z Newtonovimi zakoni¹. Newtonovi zakoni za točkasto telo so:

1. Če na telo ne deluje nobena sila ali pa je rezultanta vseh sil na telo enaka nič, telo miruje ali se giblje premo enakomerno

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = \text{konst.} \quad (6.1)$$

2. Rezultanta sil na telo je enaka masi telesa krat pospešek

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}. \quad (6.2)$$

3. Če prvo telo deluje na drugo telo s silo, deluje drugo telo na prvo telo z nasprotno enako silo

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (6.3)$$

Drugi Newtonov zakon pogosto pišemo drugače. Pravimo, da je pospešek telesa sorazmeren sili oziroma rezultanti sil, ki deluje na telo. Tako se zavedamo, da je pospešek posledica sile in ne obratno. Iz drugega Newtonovega zakona izhaja tudi enota za silo, newton: $N = \text{kg m/s}^2$.

Sile merimo z dinamometrom. Preprost dinamometer je prožna vzmet (vzmetna tehtnica), za katero velja Hookov zakon² $F = ks$, kjer je s raztezek vzmeti, k koeficient vzmeti in F sila, s katero stiskamo ali raztezamo vzmet. Z merjenjem raztezka določimo silo, ki deluje na vzmet.

¹Angleški znanstvenik Sir Isaac Newton (1643-1727), [Wikipedija](#)

²Angleški znanstvenik Robert Hooke (1635-1703), [Wikipedija](#)

Probleme, povezani s silami, delimo na dva tipa: statične in dinamične. **Pri statiki so sile na telo v ravnovesju, zato telo miruje**, nas pa zanima ena ali več neznanih sil. **Pri dinamiki pa je vsota sil na telo različna od nič in telo se pospešeno giblje.**

6.2 Sila podlage

Iz izkušenj vemo, da na zemeljskem površju – če zanemarimo zračni upor – vsa telesa padajo enakomerno pospešeno v smeri navzdol. **Pospešek, s katerim padajo telesa, je težnostni pospešek in ima vrednost $g = 9,81 \text{ m/s}$.** Iz drugega Newtonovega zakona sklepamo, da ta pospešek povzroča neka sila. Imenujemo jo sila teže in zapišemo

$$F_g = mg, \quad (6.4)$$

kjer je m masa telesa. Če telo postavimo na podlago, padanje preprečimo, in iz tretjega Newtonovega zakona sledi, da mora biti sila podlage pri mirujočem telesu nasprotno enaka sili teže.

Če začnemo telo vleči po podlagi v vodoravni smeri, se interakcija med telesom in podlago upira gibanju. Ta **upor podlage se odraža kot sila trenja**. Sila trenja je po velikosti enaka

$$F_{tr} = k_{tr} F_n, \quad (6.5)$$

kjer je k_{tr} koeficient trenja, F_n pa normalna (pravokotna) komponenta sile podlage. **Smer sile trenja je vedno nasprotna smeri gibanja telesa.** Tudi če se telo ne premika po podlagi, ampak ga le poskušamo poriniti po njej, se interakcija s podlago upre premiku. To silo imenujemo silo lepenja, njena velikost pa je

$$F_l \leq k_l F_n, \quad (6.6)$$

pri čemer je k_l koeficient lepenja. **Sila lepenja deluje v nasprotni smeri sile, ki telo poskuša spraviti v gibanje.**

Celotna sila podlage je vektorska vsota obeh ortogonalnih komponent \vec{F}_n in \vec{F}_{tr}

$$\vec{F}_p = \vec{F}_{tr} + \vec{F}_n. \quad (6.7)$$

Velikost sile podlage je enaka

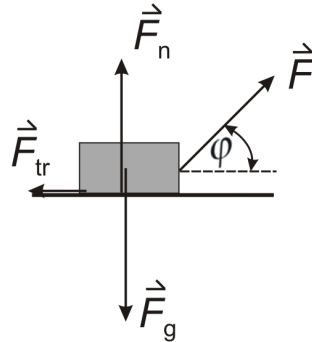
$$F_p = \sqrt{F_{tr}^2 + F_n^2}, \quad (6.8)$$

kot, pod katerim je sila podlage nagnjena glede na podlago, pa je $\varphi = \arctan(F_n/F_{tr})$.

6.3 Vleka po vodoravni podlagi

Oglejmo si primer vleke telesa po vodoravni podlagi in zapišimo sile, ki delujejo na telo. Prva je sila \vec{F} , s katero vlečemo, pri čemer je kot med silo vlečenja in vodoravnico φ (glej sliko 6.1). Na telo delujejo še sila teže \vec{F}_g , normalna sila podlage \vec{F}_n in sila trenja \vec{F}_{tr} . Telo naj ima maso m , koeficient trenja med telesom in podlago pa naj bo k_{tr} . Sila \vec{F} , s katero vlečemo, je dovolj velika, da je gibanje telesa po podlagi enakomerno pospešeno, vendar ne prevelika, tako da se kvader ne odlepi od tal.

Ločeno obravnavamo komponente sil v vodoravni in navpični smeri. V navpični smeri imamo poleg sile teže še komponento vlečne sile $F \sin \varphi$ in normalno silo tal F_n . V vodoravni smeri imamo komponento vlečne sile $F \cos \varphi$ in silo trenja, ki kaže v nasprotno smer, kot se giblje kvader. **Sila trenja je po velikosti sorazmerna normalni sili podlage** $F_{tr} = k_{tr} F_n$. V navpični smeri se telo ne premika in torej vlada ravnovesje treh sil, medtem ko je v vodoravni smeri gibanje pospešeno. Zapišimo enačbe.



Slika 6.1: Sile na kvader na vodoravni podlagi

Navpična smer:

$$0 = F \sin \varphi + F_n - mg \quad (6.9)$$

Vodoravna smer:

$$ma = F \cos \varphi - F_{tr} = F \cos \varphi - k_{tr} F_n \quad (6.10)$$

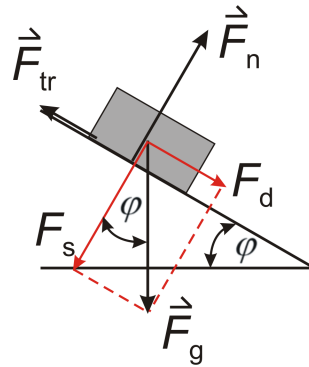
Najprej iz prve enačbe izračunamo normalno silo podlage $F_n = mg - F \sin \varphi$, potem pa jo vstavimo v drugo enačbo in izračunamo pospešek telesa

$$a = \frac{F(\cos \varphi + k_{tr} \sin \varphi)}{m} - k_{tr} g. \quad (6.11)$$

6.4 Gibanje telesa na klancu

Poglejmo sile na telo, ki se giblje po nagnjeni podlagi. Na telo na klancu delujejo sila teže, normalna (pravokotna) sila podlage in sila trenja. Če bi na telo delovali z dodatno silo (in bi telo vlekli ali potiskali), bi seveda morali upoštevati tudi to silo. V primeru nagnjene podlage **ločeno obravnavamo komponente sil vzporedno s klancem in pravokotno nanj.**

Klanec naj ima naklonski kot φ proti vodoravnici. Težo telesa razstavimo na dve medsebojno pravokotni komponenti. V smeri klanca kaže dinamična komponenta sile teže $F_d = mg \sin \varphi$, pravokotno na klanec pa statična komponenta sile teže $F_s = mg \cos \varphi$ (glej sliko 6.2). V smeri pravokotno na klanec se pojavi normalna sila podlage F_n , ki uravnoveša statično komponentno sile teže F_s , saj je vsota sil v smeri pravokotno na klanec enaka nič. Po velikosti sta ti dve sili enaki, a kažeta v nasprotno smer. Če na telo delujemo z dodatno silo, ki ima tudi komponento v smeri pravokotno na podlago, normalna sila podlage ni več enaka statični komponenti teže. Še vedno pa je vsota vseh (komponent) sil v tej smeri enaka nič.



Slika 6.2: Sile na klancu pri drsenju telesa navzdol. Sili F_d in F_s sta komponenti sile teže \vec{F}_g , sili \vec{F}_n in \vec{F}_{tr} pa komponenti sile podlage.

Vzporedno s klancem sile niso uravnovešene in telo pospešujejo. Če je trenje zanemarljivo, je rezultanta sil na telo na klancu enaka dinamični komponenti sile teže in pospešek je

$$a = \frac{F_d}{m} = g \sin \varphi. \quad (6.12)$$

Vključimo še silo trenja pri drsenju telesa po klancu navzdol. Sila trenja je sorazmerna z normalno komponento sile podlage³ $F_{tr} = k_{tr} F_n = k_{tr} F_s = k_{tr} mg \cos \varphi$. Pospešek je

$$a = \frac{F_d - F_{tr}}{m} = g(\sin \varphi - k_{tr} \cos \varphi). \quad (6.13)$$

Če na telo delujemo z dodatno silo, moramo seveda upoštevati še komponentno te sile vzporedno s klancem. Vendar to še ni vse. Popraviti moramo tudi silo trenja, saj se z dodatno silo lahko spremeni normalna komponenta podlage. Pogoji, da telo drsi pospešeno po klancu navzdol, je pozitivnost zadnjega oklepaja oziroma $k_{tr} \cos \varphi \leq \sin \varphi$ ali $k_{tr} \leq \tan \varphi$. Mogoče pa je seveda tudi nasprotno. Če telo potisnemo po klancu navzdol, tako da že ima neko začetno hitrost, in če je po velikosti sila trenja večja od dinamične komponente teže, je pospešek negativen in telo se ustavlja.

Ne pozabimo, da kaže sila trenja vedno v nasprotno smer od smeri gibanja telesa. Sila trenja tako kaže vzporedno s klancem navgor, če telo drsi navzdol, in vzporedno s klancem navzdol, če se telo giblje po klancu navzgor. V slednjem primeru se telo na klancu zaustavlja tako zaradi dinamične komponente sile teže kot zaradi sile trenja, ki v tem primeru kažeta v isto smer.

Kadar je klanc dovolj položen, telo na njem miruje. Namesto sile trenja deluje na telo sila lepenja. **Sila lepenja se od sile trenja razlikuje po tem, da se natančno prilagaja dinamični komponenti teže $F_l = F_d$, saj je sistem v ravnovesju in miruje.** Vendar pa obstaja največja možna sila lepenja $F_{l\max}$, ki jo izračunamo podobno kot silo trenja $F_{l\max} = k_l F_n$, pri čemer je k_l koeficient lepenja. Če postopoma večamo nagib klanca, obstoja nek največji kot φ_{\max} , pri katerem telo zdrsne. Izračunajmo ga. Velja

$$F_{l\max} = F_d \quad \rightarrow \quad k_l mg \cos \varphi_{\max} = mg \sin \varphi_{\max} \quad \rightarrow \quad \tan \varphi_{\max} = k_l. \quad (6.14)$$

Tako lahko izmerimo koeficient lepenja med stičnima površinama klanca in telesa.

³V resnici je konstanten koeficient trenja samo približek, saj je koeficient nekoliko odvisen od hitrosti drsenja telesa po podlagi. Če bi upoštevali še odvisnost $k_{tr}(v)$, bi morali naloge reševati z diferencialnimi enačbami.

Računski zgleđ 6.4.1 Klanec ima nagib 25° . Po njem poženemo navzgor zaboį z začetno hitrostjo 4 m/s. Koefficient trenja med zaboįem in podlago je 0,3. Kolikšno pot naredi zaboį, preden zdrsne nazaj? Koliko časa potrebuje za pot navzgor in koliko za pot navzdol do izhodišča?

Podatki:

$$\varphi = 25^\circ$$

$$v_0 = 4 \text{ m/s}$$

$$k_{tr} = 0,3$$

$$s, t_1, t_2 = ?$$

Dinamična komponenta sile teže in sila trenja kažeta v isto smer (po klancu navzdol) in obe telo zavirata. Negativni pospešek (pojemek) pri gibanju zaboįa po klancu navzgor je tako

$$a_1 = -\frac{F_d + F_{tr}}{m} = -g(\sin \varphi + k_{tr} \cos \varphi).$$

V enačbi $v = v_0 + a_1 t_1$ upoštevamo $v = 0$ (zaboį se za trenutek ustavi) in izračunamo čas $t_1 = -v_0/a_1 = 0,59$ s. Pot najhitreje izračunamo iz povprečne hitrosti

$$s = \langle v \rangle t_1 = \left(\frac{v_0}{2}\right) t_1 = 1,17 \text{ m}.$$

Pri gibanju navzdol kaže sila trenja v nasprotno smer od dinamične komponente sile teže in

$$a_2 = \frac{F_d - F_{tr}}{m} = g(\sin \varphi - k_{tr} \cos \varphi).$$

Pot navzdol je enaka kot pot navzgor $s = a_2 t_2^2 / 2$ (začetna hitrost pri gibanju navzdol je nič), tako da nazadnje izračunamo še čas potovanja zaboįa navzdol

$$t_2 = \sqrt{\frac{2s}{a_2}} = \sqrt{\frac{2s}{g(\sin \varphi - k_{tr} \cos \varphi)}} = 1,26 \text{ s. } \square$$

6.5 Ravnovesje sil

Vemo, da telo miruje ali se giblje premo enakomerno, če so sile, ki delujejo nanj, v ravnovesju. To je res, kadar je njihova vektorska vsota nič. Vendar to velja za točkasto telo – pri razsežnem telesu so stvari bolj zapletene in jih bomo obravnavali v razdelku 9.7.

Računski zgleđ 6.5.1 Vrvica ima dolžino 1 m. Nanjo obesimo ključ, tako da lahko prosto drsi po njej. Oba konca vrvice pritrdimo na navpični steni v razmiku 40 cm, tako da je levi konec 10 cm nižje od desnega (slika 6.3). Kje je ravnovesna lega ključa? S kolikšno silo je napeta vrvica, če ima ključ maso 20 g?

Podatki:

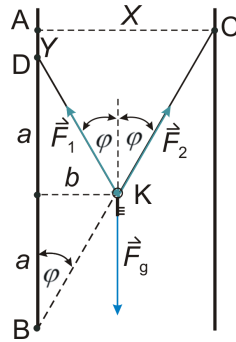
$$L = 1 \text{ m}$$

$$X = 40 \text{ cm}$$

$$Y = 10 \text{ cm}$$

$$m = 20 \text{ g}$$

$$a, b, F = ?$$



Slika 6.3: Geometrija za izračun ravnovesne lege ključa na vrvi

Vedeti moramo, da **kaže sila v vrvi vedno v smeri vrvice**, saj prečnih sil vrvice ne prenaša. Natezna sila v vrvi je povsod enaka, torej sta sili, ki delujeta na obeh straneh na ključ, enaki. Zaradi ravnovesja komponent sil v vodoravni smeri je $F_{1x} = -F_{2x}$, torej sta naklonska kota vrvice na obeh straneh enaka. Označimo ju s φ . Naredimo geometrijski trik: prezrcalimo levi krak vrvice prek vodoravnice in dobimo velik trikotnik ABC z vodoravno kateto $X = AC$ in hipotenuzo $L = BC$. Po Pitagorovem izreku dobimo še navpično kateto $AB = 91,65$ cm. Kot je enak

$$\varphi = \arcsin(X/L) = 23,58^\circ.$$

Stranica z oznako a na sliki je polovica stranice BD enakokrakega trikotnika DBK : $a = (AB - Y)/2 = 40,82$ cm. Stranica b pa je $b = a \tan \varphi = aX/L = 0,4a = 16,33$ cm. Ključ torej leži $b = 16,33$ cm levo in $a = 40,82$ cm nižje od levega pritrdišča vrvice.

Vsota navpičnih komponent sile vrvice je v ravnovesju s težo, zato velja

$$2F \cos \varphi = mg \quad \rightarrow \quad F = \frac{mg}{2 \cos \varphi} = 0,107 \text{ N. } \square$$

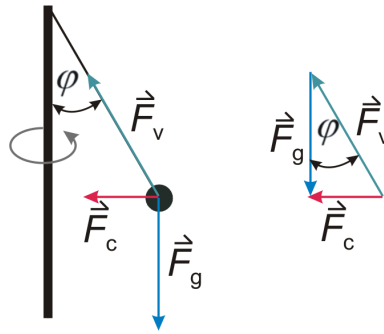
6.6 Centripetalna sila

Pri kinematiki smo spoznali centripetalni pospešek (enačba 5.31), ki se pojavi pri vseh vrstah kroženja, tudi enakomernem. S centripetalnim pospeškom povežemo centripetalno silo. **Centripetalna sila povzroča kroženje telesa in kaže od telesa proti središču krožnice.** Centripetalna sila je vedno neka zunanja sila: sila vrvice, gravitacijska sila, električna sila, magnetna sila, sila lepenja itd. ali vsota teh sil. Njeno velikost izračunamo iz radialnega pospeška

$$F_c = ma_r = mR\omega^2 = m\frac{v^2}{R}. \quad (6.15)$$

Analizirajmo primer poenostavljenega vrtljaka. Pri enakomernem vrtenju s kotno hitrostjo ω naj bo razdalja telesa (človeka na sedežu) od osi vrtenja enaka R . Izračunajmo, za kolikšen kot φ je vrv, na kateri visi sedež, odmaknjena od navpičnice. Narišimo trikotnik sil (slika 6.4). Na telo delujeta sila vrvi \vec{F}_v , ter sila teže \vec{F}_g , ki kaže navpično navzdol. Njuna rezultanta je enaka centripetalni sili \vec{F}_c , ki v vodoravni smeri kaže proti središču kroženja. S slike razberemo

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{F_c}{F_g} = \frac{mR\omega^2}{mg} = \frac{R\omega^2}{g}. \quad (6.16)$$



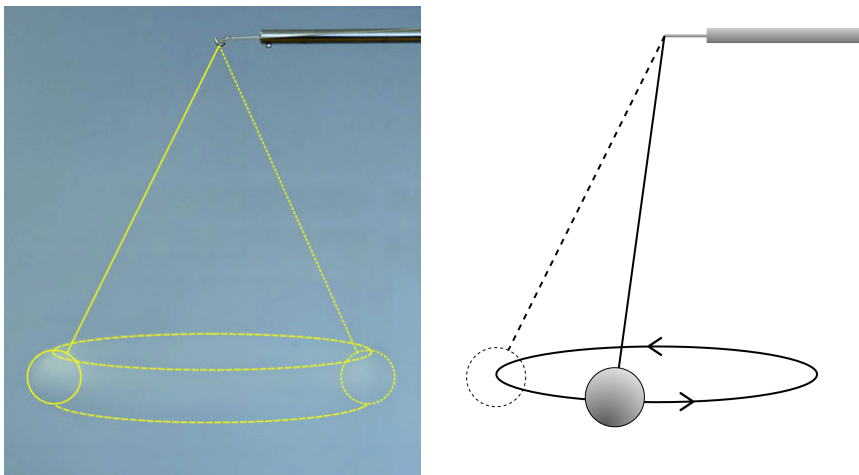
Slika 6.4: Sile na sedež in človeka na vrtiljaku

Navadno vnaprej ne poznamo polmera kroženja, saj je ta povezan tako z dolžino vrvi L kot z naklonskim kotom. Vstavimo $R = L \sin \varphi$ in dobimo

$$\varphi = \arccos\left(\frac{g}{L\omega^2}\right). \quad (6.17)$$

Enačba (6.17) nima rešitve, če je kotna hitrost premajhna in $L\omega^2 < g$. V tem primeru je rešitev kar $\varphi = 0$, ki smo jo izgubili pri krajšanju s faktorjem $\sin \varphi$. To pomeni, da se pri počasnem vrtenju vrv sploh ne odmakne od navpične lege.

Poskus 6.6.1 — Konično nihalo kot vrtiljak. Obesimo majhno utež na dolgo nitko. Takemu sistemu navadno rečemo nitno nihalo, saj utež skupaj z nitko zaniha, če jo izmaknemo iz navpične (ravnovesne) lege. Kaj pa se zgodi, če utež na vrvi izmaknemo iz ravnovesne lege, nato pa spustimo in ob tem rahlo sunemo vstran? Utež ne zaniha v navpični ravnini, ampak se giblje v treh dimenzijah. Za majhne odmike od navpične ravnovesne lege je gibanje uteži skoraj v vodoravni ravnini, tir gibanja pa je približno elipsa. V skrajnem primeru je tir idealna krožnica kot pri zgoraj opisanem vrtiljaku, gibanje pa je natančno v vodoravni ravnini. Takemu sistemu pravimo konično nihalo, saj vrstica z utežjo opisuje konus - stožec. Kot smo ugotovili zgoraj, sta obhodni čas in kot med vrstico in navpičnico medsebojno povezana.



Fotografija in shema koničnega nihala. Ker je fotografija krožeče kroglice zaradi dolgega osvetlitvenega časa zabrisana, smo skrajni legi in tir ter vrstico dodatno označili.

Pri izmerjenem obhodnem času $t_0 \approx 1,5$ s in dolžini vrvice $L = 60$ cm lahko izračunamo naklonski kot po enačbi (6.17), pri čemer upoštevamo, da je $t_0 = 2\pi/\omega$. Dobimo

$$\varphi = \arccos\left(\frac{gt_0^2}{4\pi^2L}\right) = 21^\circ.$$

Iz fotografije ocenimo kot 25° , kar je kar dobro ujemanje. Prvič, pri poskusu se moramo kar precej potruditi, da je tir gibanja blizu idealne krožnice. Težava je tudi v tem, da je funkcija \arccos zelo občutljiva za majhne spremembe argumenta, ki je blizu 1. Torej lahko že majhna napaka meritve obhodnega časa pomeni veliko napako (spremembo) v izračunanem kotu. Pri času $t_0 = 1,45$ s dobimo kot $29,4^\circ$, pri $t_0 = 1,55$ s pa $5,7^\circ$.

Računski zgled 6.6.1 Avtomobil z maso 1600 kg vozi s stalno hitrostjo po krožišču z radijem 100 m. S kolikšno največjo hitrostjo lahko vozi, da ne zdrsne, če je koeficient lepenja med gumami in cesto 0,2?

Podatki:

$$m = 1600 \text{ kg}$$

$$r = 100 \text{ m}$$

$$k_l = 0,2$$

$$v = ?$$

Centripetalna sila, ki omogoča, da avtomobil kroži, je sila lepenja. Ta sila deluje med gumami in cesto in kaže v radialni smeri proti središču krožišča. V skrajnem primeru, ko avtomobil ravno zdrsne, je $F_c = F_{l\max} = mgk_l$. Po drugi strani pa vemo, da je centripetalna sila pri kroženju enaka

$$F_c = m\frac{v^2}{r}.$$

Sledi

$$m\frac{v^2}{r} = mgk_l \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{rgk_l} = 14 \text{ m/s} = 50,4 \text{ km/h}.$$

Če avtomobil v ovinku pospešuje ali zavira, mora sila lepenja oziroma trenja uravnovešati tudi to dodatno silo. Sila zaviranja ali pospeševanja je v smeri tangente na krožnico, zato lahko obe sili (tangencialno in radialno) seštejemo po Pitagorovem izreku. Če telo npr. pospešuje s pospeškom a , bo v trenutku, ko zdrsne, veljalo

$$\sqrt{(ma)^2 + \left(m\frac{v^2}{r}\right)^2} = mgk_l,$$

pri čemer je seveda treba upoštevati, da se hitrost spreminja s časom kot $v(t) = v_0 + at$

$$\sqrt{a^2 + \frac{(v_0 + at)^4}{r^2}} = gk_l. \quad \square$$

7. Delo, moč in energija

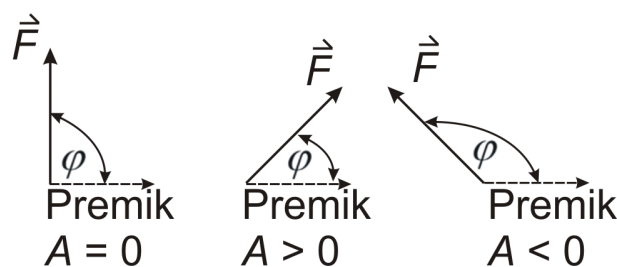
V tem poglavju obdelamo koncept energije, morda najpomembnejšega pojma v fiziki. Čeprav je vsaj s pedagoškega vidika najbolj nazorna izpeljava energije v mehaniki, je ta pojem izredno pomemben v vseh vejah fizike. Vpeljali bomo delo in moč, nato še kinetično in težnostno potencialno energijo. Poglavje bomo končali z opisom gravitacijske sile in energije.

7.1 Mehansko delo in moč sile

Zamislimo si primer, ko vlečemo telo po vodoravni podlagi s silo \vec{F} . Telo drsi in dlje ko smo ga premaknili, več dela smo opravili. Vpeljimo fizikalno količino **delo A kot skalarni produkt med vektorjem sile in vektorjem premika**. Delo, ki ga opravi sila na dani poti, najlažje zapišemo, kadar je sila (po velikosti in smeri) konstantna, gibanje njenega prijemališča pa premo. Če oklepata sila \vec{F} in tir njenega prijemališča \vec{r} kot φ , je delo

$$A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \Delta r \cos \varphi. \quad (7.1)$$

Medtem ko sta sila \vec{F} in premik $\Delta\vec{r}$ vektorja, je delo A skalar. Delo je lahko pri sili in premiku, ki sta različna od nič, pozitivno, negativno ali pa nič, odvisno od kota φ med silo in premikom (glej sliko 7.1). Če je to pravi kot, je delo enako nič, npr. pri delu normalne sile podlage pri gibanju telesa po podlagi. Podobno je pri kroženju delo centripetalne sile enako nič. Iz definicije izhaja tudi enota za delo, joule: $J = N \cdot m = kg \cdot m^2/s^2$.



Slika 7.1: Predznak dela

Pri nestalni sili, ali pa če je gibanje njenega prijemališča krivo, posplošimo enačbo (7.1) v integral po tiru, pri čemer sta \vec{r}_1 in \vec{r}_2 začetna in končna lega prijemališča sile

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (7.2)$$

Moč definiramo kot opravljeno delo na časovno enoto

$$P = \frac{dA}{dt}. \quad (7.3)$$

Če v gornjo enačbo vstavimo diferencial dela, dobimo

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (7.4)$$

Trenutno moč lahko torej zapišemo kot

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (7.5)$$

Pri tem ni pomembno, kako se spreminjata sila \vec{F} in hitrost \vec{v} njenega prijemališča. Ne spreglejmo, da tudi v enačbi (7.5) nastopa skalarni produkt dveh vektorjev. Če torej deluje sila v isti smeri, kot se giblje njeno prijemališče (in tako velja $\vec{F} \parallel \vec{v}$), se enačba poenostavi v $P = Fv$. Pogosto se gibanje prijemališča sile ujema z gibanjem telesa, na katerega sila deluje, a ne vedno!

7.2 Kinetična energija in težnostna potencialna energija

Energijo telesa si lahko mislimo kot zalogo dela. To pomeni, da je telo z neko količino energije zmožno opraviti isto količino dela pri delovanju na druga telesa, seveda z določenimi omejitvami. Povedano drugače: telo je zmožno del svoje energije posredovati drugemu telesu.

Najprej vpeljimo kinetično energijo. **Kinetična energija W_k točkastega telesa je enaka delu, ki je potrebno, da telo z maso m spravimo iz mirovanja v gibanje s hitrostjo v .** Tako kinetično energijo tudi izračunamo. Naj bo sila, s katero delujemo na telo, konstantna in zato gibanje enakomerno pospešeno. Velja

$$W_k = A = \int_0^t \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^t (m\vec{a}) \cdot (\vec{v}dt) = \int_0^t \left(m \frac{d\vec{v}}{dt}\right) \cdot (\vec{v}dt) = \int_0^v mvdv. \quad (7.6)$$

Pri zadnjem integralu smo upoštevali, da je skalarni produkt med hitrostjo in majhno spremembo hitrosti kar enak navadnemu produktu vdv . Po zadnji integraciji dobimo znan izraz za trenutno kinetično energijo točkastega telesa z maso m , ki se giblje s hitrostjo v

$$W_k = \frac{1}{2}mv^2. \quad (7.7)$$

Poudarimo še enkrat, da **je kinetična energija, tako kot vse druge vrste energije, skalar.** Čeprav je odvisna od hitrosti, ki je vektor, je kinetična energija neodvisna od smeri gibanja telesa. Odvisna je od velikosti vektorja hitrosti, kar hitro vidimo, če enačbo (7.7) prepisemo v obliko

$$W_k = \frac{1}{2}m(\vec{v} \cdot \vec{v}). \quad (7.8)$$

Težnostna potencialna energija se nanaša na energijo zaradi gravitacijskega privlaka med dvema telesoma. Izraz potencialna energija je sicer bolj splošen in ne pomeni samo te vrste energije, ampak tudi druge, ki imajo podobne značilnosti. Tu bomo govorili le o potencialni energiji, ki se nanaša na silo teže v bližini Zemljinega površja. Ta **težnostna potencialna energija je enaka negativnemu delu sile teže** in jo zapišemo

$$W_p = F_g s = mgh, \quad (7.9)$$

kjer je m masa telesa, g težni pospešek, h pa višina telesa glede na neko izbrano lego. Za fizikalne zakone je vseeno, v kateri legi izberemo izhodišče $h = 0$ in s tem tudi potencialno energijo nič. Ključna je sprememba potencialne energije telesa ΔW_p , ko se njegova višina nad Zemljino površino (nad tlemi, nad morskno gladino itd.) poveča za Δh

$$\Delta W_p = mg\Delta h. \quad (7.10)$$

Pri tem je vseeno, ali se telo premakne navpično navzgor ali po poševnem tiru ali pa morda po zapletenem krivem tiru; **pomembna je le razlika med začetno in končno višino, ne pa vmesna pot**. Višje kot je telo, večjo potencialno energijo ima. Povedano drugače: višje kot je telo, več dela ima na zalogi, ki ga lahko opravi. Za sile, katerih delo ima zgoraj opisane lastnosti, pravimo, da so konservativne sile.

Vsoti kinetične in potencialne energije pogosto pravimo mehanska energija¹. **Kadar je delo vseh zunanjih sil razen sile teže enako nič, se mehanska energija ohranja**, sicer je delo enako razliki energij. Pri tem smo delo sile teže že upoštevali v spremembi potencialne energije. Strnimo to ugotovitev v zelo pomemben energijski zakon

$$\tilde{A} = \Delta W_k + \Delta W_p = W_k - W_{k0} + W_p - W_{p0}, \quad (7.11)$$

pri čemer \tilde{A} označuje delo vseh zunanjih sil razen sile teže.

7.3 Nekaj primerov uporabe energije

Premo enakomerno pospešeno gibanje

Oglejmo si delo, moč in kinetično energijo pri premem enakomerno pospešenem gibanju. Za lažjo obravnavo naj bo začetna hitrost telesa enaka nič. V danem trenutku začne delovati na telo konstantna sila F , tako da je njegov pospešek konstanten $a = F/m$, hitrost $v = at = Ft/m$ pa narašča linearno s časom. Tudi moč se v tem primeru linearno povečuje s časom, saj velja

$$P = Fv = F \frac{Ft}{m} = \frac{F^2 t}{m}. \quad (7.12)$$

Ker je sila konstantna, je njeno delo v določenem času

$$A = Fs = F \frac{at^2}{2} = F \frac{F t^2}{m 2} = \frac{F^2 t^2}{2m}. \quad (7.13)$$

Enak rezultat bi dobili z integriranjem moči po času

$$A = \int_0^t P dt = \int_0^t \frac{F^2 t}{m} dt = \frac{F^2 t^2}{2m}. \quad (7.14)$$

Lahko pa si pomagamo tudi s kinetično energijo. Opravljeno delo je namreč enako spremembi kinetične energije telesa

$$A = W_k - W_{k0} = \frac{mv^2}{2} - 0 = m \frac{(Ft/m)^2}{2} = \frac{F^2 t^2}{2m}. \quad (7.15)$$

¹Pozneje bomo kinetični in potencialni energiji dodali še rotacijsko kinetično energijo in prožnostno energijo.

Premo gibanje s konstantno močjo

Obravnavajmo gibanje telesa, na katerega delujemo s konstantno močjo. Naj ima telo neko začetno hitrost v_0 in izračunajmo hitrost po času t . Velja

$$A = Pt = W_k - W_{k0} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \quad (7.16)$$

in

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2Pt}{m}}. \quad (7.17)$$

Enakomerno vlečenje telesa po klancu brez trenja

Klanec lahko uporabimo kot preprosto napravo za dviganje bremen, pri čemer lahko breme dvignemo s precej zmanjšano silo. Obravnavajmo primer enakomernega gibanja. Takrat je sila F , s katero vlečemo vzporedno s klancem, v ravnovesju z dinamično komponento sile teže $F = F_d = mg \sin \varphi$, pri čemer je φ naklon klanca. Iz tega sledi, da je $F < F_g$. Sila, s katero dvigamo breme po klancu, je torej manjša od sile, s katero bi breme dvigali navpično navzgor.

Kako pa je z delom? Če povlečemo telo po klancu do višine h s silo F , opravimo delo sicer z manjšo silo, vendar na daljši poti. Račun pokaže, da je opravljeno delo enako kot če bi ga direktno (navpično) dvignili s tal s silo F_g

$$A = Fs = F_d s = (mg \sin \varphi) \cdot \frac{h}{\sin \varphi} = mgh = F_g h. \quad (7.18)$$

Bralec naj si sam skicira klanec in ustrezní trikotnik, iz katerega sledi $s = h / \sin \varphi$.

Energija pri vrtiljaku

Zapišimo še kinetično in potencialno energijo človeka na vrtečem se vrtiljaku (slika 6.4). Kinetična energija je

$$W_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(R\omega)^2 = \frac{1}{2}m(L \sin \varphi \omega)^2, \quad (7.19)$$

pri čemer je L dolžina vrvi. Potencialna energija naj bo nič takrat, ko se vrtiljak ne vrti in je sedež v najnižji legi. Potencialna energija med vrtenjem pod kotom φ je

$$W_p = mgh = mg(L - L \cos \varphi) = mgL(1 - \cos \varphi). \quad (7.20)$$

Tudi v tem primeru naj bralec sam nariše skico in preveri veljavnosti gornjega izraza.

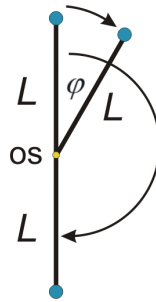
Računski zgled 7.3.1 Na vodoravno os je z ležaji pritrjena zelo lahka prosto vrtljiva ročica z dolžino 2 m. Na njenem drugem koncu je pritrjena majhna krogla, ki ima veliko večjo maso od ročice (slika 7.2). Trenje v ležajih in zračni upor sta zanemarljiva. Če je hitrost krogle v zgornji legi 4 m/s, kolikšna je njena hitrost v spodnji legi? Kakšen pa je splošni rezultat za vmesne kote?

Podatka:

$$L = 2 \text{ m}$$

$$v_1 = 4 \text{ m/s}$$

$$v_2 = ?$$



Slika 7.2: Vrtljiva lahka prečka s težko kroglo

Ker ni dela zunanjih sil, se mehanska energija ohranja. Edina dodatna sila, ki deluje na naše telo, je sila v osi. Vendar ta sila ne opravlja nobenega dela, saj je njen premik enak nič. Vsota kinetične in potencialne energije krogle se torej ohranja in je v spodnji in zgornji legi enaka. Zapišemo

$$W_{k2} - W_{k1} + W_{p2} - W_{p1} = 0.$$

V spodnji legi naj bo potencialna energija nič, v zgornji legi pa je razlika višin $2L$ in zato potencialna energija za $2mgL$ večja. Sledi

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} + 0 - 2mgL = 0.$$

Izračunamo lahko hitrost v najnižji točki

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 4gL} = 9,72 \text{ m/s}.$$

V vmesnih legah označimo kot ročice glede na pokončno lego s φ . S slike je razvidno, da se potencialna energija zmanjša za $mgL(1 - \cos \varphi)$. Zato je hitrost pri kotu φ enaka

$$v_2(\varphi) = \sqrt{v_1^2 + 2gL(1 - \cos \varphi)}.$$

V najnižji legi je $\varphi = \pi$ (oziroma 180°) in rezultata se ujemata. \square

7.4 Gravitacijska sila in energija

Ena izmed osnovnih fizikalnih zakonitosti je privlak med telesi, ki imajo maso. **Vsako telo z maso deluje privlačno na vsa ostala telesa z maso.** Tako kot nas privlači Zemlja, po tretjem Newtonovem zakonu tudi mi privlačimo Zemljo. Gravitacijska sila deluje tudi med dvema osebamama ali pa med knjigo in bralcem. V splošnem je gravitacijska sila zelo majhna in gravitacije med navadnimi predmeti ni treba upoštevati. Kadar pa imajo telesa zelo veliko maso (npr. planeti, zvezde ...), postane gravitacijska privlačna sila zelo velika. Zapišimo jo bolj natančno.

Med dvema točkastima telesoma z masama m_1 in m_2 , ki se nahajata na medsebojni razdalji r , deluje privlačna gravitacijska sila

$$F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (7.21)$$

pri čemer je gravitacijska konstanta $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ ($\kappa = \text{kapa}$)². Gravitacijska sila je centralna, kar pomeni, da vedno deluje v smeri od enega telesa proti drugemu. Zaradi krogelne simetrije velja enačba (7.21) tudi za veliki kroglji, le da **za razdaljo r pri kroglah vzamemo razdaljo med njunima središčema**. Za telesa poljubnih oblik izračunamo gravitacijsko silo z integriranjem po majhnih masnih delih teles.

Podobno kot vpeljemo potencialno (težnostno) energijo ob površju Zemlje W_p lahko vpeljemo tudi bolj splošno gravitacijsko energijo kot negativno delo gravitacijske sile na nekem izbranem tiru. Gravitacijsko energijo izračunamo kot integral gravitacijske sile po razdalji v radialni smeri

$$W_g = - \int_{\infty}^r \vec{F}_g d\vec{r} = - \int_{\infty}^r \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{(-\vec{r})}{r} d\vec{r} = \kappa m_1 m_2 \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (7.22)$$

Potencialno energijo nič smo izbrali pri $r = \infty$ zaradi prikladnosti računa. Pri integriranju si mislimo, da telo z maso m_1 miruje v izhodišču koordinatnega sistema, telo z maso m_2 pa se mu z začetne neskončne razdalje postopno približuje v smeri gravitacijske sile, s katero prvo telo privlači drugega. Potencialna energija se ob tem zmanjšuje.

Ob površju planeta je gravitacijska sila kar navadna sila teže. Zato velja

$$mg_0 = \kappa \frac{mM}{R^2}. \quad (7.23)$$

Gravitacijski pospešek na površju planeta je

$$g_0 = \frac{\kappa M}{R^2}. \quad (7.24)$$

Pri tem je M masa planeta, R pa njegov radij. Iz znanih podatkov za polmer Zemlje in težni pospešek g_0 lahko izračunamo maso Zemlje $M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Če se telo močno oddalji od površja ali pa gre v notranjost planeta, se težni pospešek zmanjša. Poglejmo najprej odvisnost težnega pospeška g od višine h nad površjem planeta. Uporabimo enačbo (7.24), le da razdalja ni radij planeta, temveč oddaljenost telesa od planetovega središča

$$g(h) = \frac{\kappa M}{(R+h)^2} = g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2. \quad (7.25)$$

²Gravitacijsko konstanto je prvi izmeril angleški fizik Henry Cavendish (1731-1810), [Wikipedija](#).

Če pa računamo gravitacijski pospešek v planetovi globini, upoštevamo, da težni pospešek na danem mestu določa le masa dela planeta, ki izpolnjuje kroglo tik pod telesom. Naj bo r oddaljenost telesa od središča planeta, $r < R$. Tedaj lahko spet uporabimo enačbo (7.24), le da ne vzamemo cele mase planeta, temveč le del mase do radija r : $M(r) = Mr^3/R^3$. Namesto R^2 vstavimo r^2 . S krajšanjem dobimo

$$g(r) = g_0 \frac{r}{R} \quad \text{za } r < R. \quad (7.26)$$

Pri računu smo privzeli, da je gostota planeta povsod enaka.

Uporabimo pridobljeno znanje za **opis gibanja satelita**. Satelit naj kroži okoli Zemlje na višini h . Gravitacijska sila, ki deluje na satelit, je hkrati centripetalna sila, zato $F_c = F_g$ in

$$m(R+h)\omega^2 = mg_0 \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g_0}{R}} \left(\frac{R}{R+h}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (7.27)$$

Izračunajmo še skupno kinetično in gravitacijsko energijo pri kroženju satelita. Zaradi krajšega pisanja označimo $r = R + h$. Zapišimo še enkrat, kar sledi iz enakosti $F_c = F_g$

$$m \frac{v^2}{r} = mg_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad \rightarrow \quad mv^2 = mg_0 \frac{R^2}{r}. \quad (7.28)$$

Kinetična in gravitacijska energija sta

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = mg_0 \frac{R^2}{2r} \quad \text{in} \quad W_g = -\kappa \frac{mM}{r} = -mg_0 \frac{R^2}{r} = -2W_k. \quad (7.29)$$

Skupna energija je $W = W_k + W_g = -W_k = W_g/2$.

Tudi splošna gravitacijska sila sodi med konservativne sile, katerih delo je po sklenjeni zanki enako nič. Zanka je lahko poljubna tridimenzionalna krivulja, po kateri se vrnemo v izhodišče. Konzervativnim silam lahko pripišemo potencialno energijo in pri gravitacijski sili smo to naredili z uvedbo gravitacijske potencialne energije (enačba 7.10). Seveda je konservativna tudi poenostavljena različica gravitacijske sile - sila teže. Bralec naj z uporabo enačbe (7.2) pokaže, da je delo sile teže po krožni poti v navpični ravnini res enako nič.

Keplerjevi zakoni in gibanje planetov

Johannes Kepler³ je na osnovi natančnih opazovanj gibanja planetov, predvsem Marsa, ugotovil, da se planeti gibljejo okoli Sonca po eliptičnih tirih. Opazovanja, na podlagi katerih je prišel do svojih zaključkov, so opravili drugi astronomi, predvsem Tycho Brahe⁴. Na osnovi Keplerjevih ugotovitev je Newton izpeljal gravitacijski zakon (enačba 7.21).

Trije Keplerjevi zakoni, ki opisujejo gibanje planetov okoli Sonca, so:

1. Planeti se gibljejo po eliptičnih tirih, pri čemer je Sonce v enem od obeh gorišč elipse.
2. Ploščinska hitrost planeta pri gibanju okrog Sonca je konstantna.
3. Za vse planete v Osončju velja, da je razmerje a^3/t_0^2 enako, pri čemer je a velika polos elipse, t_0 pa obhodni čas planeta. Če bi bili tiri krožni, bi to sledilo iz enačbe $F_c = F_g$.

³Nemški astronom Johannes Kepler (1571-1630), [Wikipedija](#)

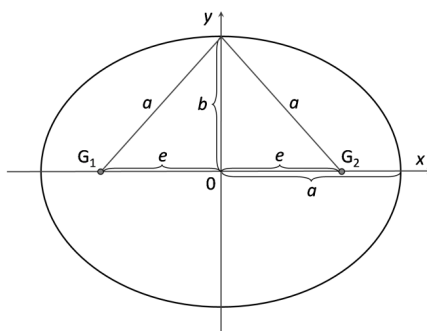
⁴Danski astronom Tycho Brahe (1546-1601), [Wikipedija](#)

Zapišimo tirnico gibanja planetov (glej sliko 7.3). To je elipsa s središčem v izhodišču, ki jo v kartezičnih koordinatah zapišemo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Goriščna razdalja je podana z zvezo $e^2 = a^2 - b^2$, gorišči pa ležita v točkah $G_1(-e, 0)$ in $G_2(e, 0)$. Za elipso velja, da je vsota razdalj od obeh gorišč do poljubne točke na elipsi enaka $2a$. To velja za vse točke na elipsi, ne samo za simetrično točko, prikazano na sliki.

V zvezi z drugim Keplerjevim zakonom in sliko (7.3) povejmo, da elipsi lahko analitično izračunamo ploščino podobno kot pri krogu $S = \pi ab$. Zato lahko izračunamo tudi ploščinsko hitrost planeta $\mu = dS/dt = \pi ab/t_0$, kjer je t_0 njegov obhodni čas pri gibanju okrog Sonca.



Slika 7.3: Parametri elipse (avtor slike: Marko Gosak)

Sploščenost eliptičnega tira planetov Osončja podajamo z ekscentričnostjo (izsrednostjo) $\varepsilon = e/a$. Krožnica ima $\varepsilon = 0$, največja možna ekscentričnost elipse pa je $\varepsilon = 1$, ki ustreza daljici. Poglejmo vrednosti za planete Osončja. Največjo izsrednost ima Merkur ($\varepsilon = 0,2056$), najmanjšo pa Venera ($\varepsilon = 0,0068$). Pluton ima sicer še večjo izsrednost ($\varepsilon = 0,2488$), vendar ga ne uvrščamo več med planete. Tudi Zemlja ima skromno izsrednost ($\varepsilon = 0,0167$). Veliko večjo izsrednost kot planeti imajo kometi. Halleyev komet⁵, ki je v skrajnih legah enkrat oddaljen od Sonca 35-krat dlje kot Zemlja, drugič pa se Soncu približa na nekaj več kot polovično razdaljo Zemlje od Sonca, ima $\varepsilon = 0,967$.

Tretji Keplerjev zakon je povezan z maso Sonca. Vzemimo planet s skoraj idealno krožnim tirom, kjer je centripetalna sila gravitacijska sila. Razdalja med planetom in Soncem naj bo r , obhodni čas planeta pri kroženju okrog Sonca t_0 , masi Sonca in planeta pa označimo z m_S in m_P . Centripetalna sila pri kroženju planeta je $F_c = m_P \omega^2 r = m_P (2\pi/t_0)^2 r$. Sledi

$$\kappa \frac{m_S m_P}{r^2} = m_P \left(\frac{2\pi}{t_0} \right)^2 r \quad \rightarrow \quad m_S = \frac{4\pi^2 r^3}{t_0^2}.$$

Iz podatkov za kroženje Zemlje okrog Sonca (oddaljenost 150 milijonov kilometrov, obhodni čas eno leto) izračunamo maso Sonca $m_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg.



V vsakdanjem življenju je gravitacijska sila kot sila teže dobro znana sila, hkrati pa je v kozmološkem merilu v zvezi z njo še precej neznank. **Gravitacijska sila je zelo šibka sila, a ima zelo dolg doseg.** To pomeni, da jo lahko pri obravnavi interakcij med molekulami, atomi in atomskimi jedri povsem zanemarimo v primerjavi z elektromagnetno silo in jedrskima interakcijama, po drugi strani pa ta sila povezuje strukture vesoljnih razsežnosti. Posebej zanimiva so masivna telesa, kot so črne luknje in kvazarji. Ne pozabimo tudi na to, da nas Sonce oskrbuje z energijo elektromagnetnega valovanja zaradi jedrskih reakcij v središču, te reakcije pa so se začele zaradi gravitacijskega sesedanja snovi v zvezdo.

⁵Wikipedija

8. Gibalna količina



V tem poglavju bomo spoznali enega osnovnih konceptov v fiziki - gibalno količino. Zapisali bomo izrek o gibalni količini in pogledali nekaj primerov praktične uporabe tega izreka: neprožni trk, prožni trk in odziv.

8.1 Sunek sile in gibalna količina

V prejšnjem poglavju smo obravnavali silo, ki je učinkovala (opravila delo) na določeni poti. Poglejmo zdaj, kako je z učinkom sile v določenem času. Vpeljemo **sunek sile, ki je enak produktu sile in dolžine časa delovanja sile**. Sunek sile na točkasto telo v nekem času najlaže zapišemo, če je sila, ki deluje na telo, konstantna. Sunek sile je potem enak $\vec{F}t$. Sunek sile navadno nima posebne oznake, enota pa je N s ali kg m/s. Medtem ko sta delo sile in z njim povezana sprememba energije skalarja, je sunek sile vektor.

V splošnem zapišemo sunek sile z integralom

$$\text{sunek sile} = \int_0^t \vec{F} dt. \quad (8.1)$$

V grobem bi lahko rekli, da **delo pomeni učinek sile na določeni poti, sunek sile pa njen učinek v določenem času**.

Poglejmo, kako sunek sile deluje na gibanje telesa. Izhajamo iz drugega Newtonovega zakona

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{F} dt = m d\vec{v}. \quad (8.2)$$

Gornji izraz integriramo (pri konstantni masi telesa) in dobimo

$$\int_0^t \vec{F} dt = m \int_{v_0}^v d\vec{v} = m\vec{v} - m\vec{v}_0. \quad (8.3)$$

Če torej na telo z maso m deluje sila \vec{F} čas t , potem se telesu spremeni količina, ki jo zapišemo kot produkt mase in hitrosti. Tej količini pravimo gibalna količina. **Gibalna količina telesa z maso m , ki se v nekem trenutku giblje s hitrostjo \vec{v} , je**

$$\vec{G} = m\vec{v}. \quad (8.4)$$

Gibalna količina je vektor, zato jo moramo ustrezno vektorsko obravnavati (seštevati, računati po komponentah ...).

Gibalna količina je poleg energije in vrtilne količine (spoznali jo bomo v poglavju 9.6) eden ključnih pojmov v fiziki, saj je ena izmed ohranitvenih količin. Ugotovili smo, da je **skupni sunek sile enak spremembi gibalne količine, kar povzamemo v izreku o gibalni količini**

$$\int_0^t \vec{F} dt = \Delta \vec{G} = m\vec{v} - m\vec{v}_0. \quad (8.5)$$

Če je vsota sunkov sil na telo enaka nič, velja izrek o ohranitvi gibalne količine, saj se gibalna količina ohranja.

$$\Delta \vec{G} = m\vec{v} - m\vec{v}_0 = 0. \quad (8.6)$$

Izrek o gibalni količini velja tudi za sistem več teles. V takem sistemu ločimo **notranje sile – to so sile, ki delujejo med telesi in so paroma nasprotno – in zunanje sile – to so sile, ki delujejo na eno ali več teles od zunaj**, iz okolice.

Obravnavajmo zaenkrat sestav dveh teles, ki delujeta drugo na drugo, zunanje sile pa so pri tem zanemarljive. Po tretjem Newtonovem zakonu sta si sili nasprotno enaki, torej sta tudi sunka sile med telesoma nasprotno enaka. To pa pomeni, da je sprememba gibalne količine enega telesa nasprotno enaka spremembi gibalne količine drugega telesa. Skupna gibalna količina sestava dveh teles se torej ob odsotnosti zunanjih sil ohranja. Trditev lahko enostavno posplošimo na sestav več kot dveh teles. Torej je v splošnem **sprememba skupne gibalne količine sestava teles enaka skupnemu sunku vseh zunanjih sil na ta telesa**.

8.2 Trki in odrivi

Trk dveh teles je značilen primer preproste uporabe koncepta gibalne količine in zakona o njeni ohranitvi. Čeprav si najlažje predstavljamo trke med makroskopskimi telesi, kot so biljardne kroglice, pa lahko uporabimo koncept energije in gibalne količine pri trkih osnovnih delcev, npr. atomov, njihovih jeder, protonov, nevtronov, elektronov itd. Tam niti ne gre za trk v klasičnem pomenu besede, saj se, na primer, pri obstreljevanju tarče z delci alfa (helijejimi jedri) ta zaradi električne odbojne sile odklonijo od atomskih jeder, preden bi trčila vanje. Vseeno pa lahko računamo z gibalno količino, ko primerjamo gibanje delcev alfa pred trkom in po njem.

Neprožni trk

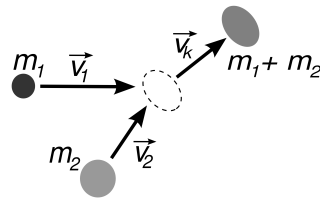
Obravnavajmo najprej popolnoma plastični (neprožni) trk dveh teles, na primer kroglic iz plastelina ali sneženih kep. Telesi naj se po trku zlepita v celoto. Njuni masi pred trkom naj bosta m_1 in m_2 , hitrosti pa \vec{v}_1 in \vec{v}_2 . Zunanje sile na kroglici v trenutku trka zanemarimo. Po trku nastane zlepek z maso $m_1 + m_2$, ki se giblje s hitrostjo \vec{v}_k . **Ker na telesi ni sunka zunanjih sil, se skupna gibalna količina obeh teles ob trku ohrani.** Zapišimo to ugotovitev

$$\Delta \vec{G} = 0 = \vec{G}_k - \vec{G}_z = (m_1 + m_2)\vec{v}_k - (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2). \quad (8.7)$$

Od tod lahko izračunamo končno hitrost zleпка

$$\vec{v}_k = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (8.8)$$

Čeprav lahko opisujemo neprožni trk v treh dimenzijah, je slika dvodimenzionalna. Zaradi ohranitve vektorja gibalne količine leži namreč končna hitrost \vec{v}_k v isti ravnini kot hitrosti \vec{v}_1 in \vec{v}_2 (glej sliko 8.1).



Slika 8.1: Popolnoma plastični (neprožni) trk, pri katerem se telesi sprimeta

Računski zgleđ 8.2.1 Telesi z masama m_1 in $m_2 = 3m_1$ trčita s hitrostima $v_1 = 20$ m/s in $v_2 = 10$ m/s in se po trku spojita. Kot naleta je 150° , kar pomeni, da priletita telesi skoraj drugo proti drugemu (za vajo skicirajte sami). Kolikšna je hitrost skupka po trku? Pod kolikšnim kotom glede na prvotno smer gibanja lažjega telesa se giblje? Za koliko odstotkov se zmanjša skupna kinetična energija?

Podatki:

$$m_2 = 3m_1$$

$$v_1 = 20 \text{ m/s}$$

$$v_2 = 10 \text{ m/s}$$

$$\alpha = 150^\circ$$

$$v_k = ?$$

$$\beta = ?$$

$$\Delta W_k / W_k = ?$$

Najprej si izberemo koordinatni sistem. Naj bo prvotna hitrost lažjega telesa v pozitivni smeri osi x , torej $\vec{v}_1 = (v_1, 0)$. Hitrost drugega telesa je potem $\vec{v}_2 = v_2(\cos \alpha, \sin \alpha)$. **Ker je gibalna količina vektor, računamo končno hitrost po komponentah** po enačbi (8.8)

$$v_{kx} = \frac{m_1 v_1 + 3m_1 v_2 \cos \alpha}{4m_1} = -1,50 \text{ m/s}$$

in

$$v_{ky} = \frac{0 + 3m_1 v_2 \sin \alpha}{4m_1} = 3,75 \text{ m/s}.$$

Velikost hitrosti izračunamo po Pitagorovem izreku iz obeh komponent in znaša 4,04 m/s. Kot gibanja skupka glede na pozitivno smer osi x je

$$\beta = \arctan(v_{ky}/v_{kx}) = -68^\circ.$$

Začetna kinetična energija je

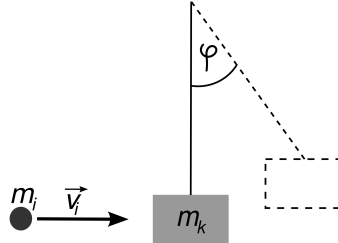
$$W_{k1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = 350m_1 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

Končna kinetična energija je

$$W_{k2} = \frac{(m_1 + m_2)v_k^2}{2} = 32,6m_1 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

Kinetična energija se je zmanjšala za 90,7 %. Pravimo, da se je pretvorila v notranjo energijo skupka. V skrajnem primeru, ko bi šli telesi točno nasproti drugo drugemu in bi imeli ravno pravi masi in hitrosti, bi se sprimek ustavil, kinetična energija pa bi se vsa pretvorila v notranjo. Pogoji za to je $m_1 \vec{v}_1 = -m_2 \vec{v}_2$. Ponovimo pomembno ugotovitev: **pri neprožnem trku se ohranja gibalna količina, kinetična (mehanska) energija pa se ne ohranja.** □

Računski zgled 8.2.2 Izstrelak z maso $m_i = 5$ g in neznano hitrostjo prileti v vodoravni smeri v leseno klado z maso $m_k = 2$ kg. Klada je obešena na lahki vrvi ($l = 1$ m), po trku pa se odkloni, tako da je kot med navpičnico in vrvi v najvišji legi klade enak $\varphi = 14^\circ$. Kolikšna je bila hitrost izstrelka?



Slika 8.2: Primer balističnega nihala, s katerim lahko določamo hitrost izstrelka

Podatki:

$$m_i = 5 \text{ g} = 0,005 \text{ kg}$$

$$m_k = 2 \text{ kg}$$

$$l = 1 \text{ m}$$

$$\varphi = 14^\circ$$

$$v_i = ?$$

Obravnavno takega balističnega nihala razdelimo na dva dela. **Prvi del je trk, med katerim se ohranja gibalna količina in ne energija; drugi del pa je dogajanje po trku, med katerim se mehanska energija ohranja, saj ni dela zunanjih sil.**

Najprej obravnavajmo trk. Trk med izstrelkom in klado je neprožen, zato se v med trkom ohranja gibalna količina, ne ohranja se pa kinetična energija. Sunka zunanjih sil v trenutku trka ni, privzamemo pa, da se v času trka klada še ni odklonila iz mirujoče lege. Po trku sta izstrelak in klada sprijeta in se gibljeta s hitrosjo v_k .

$$\Delta G = (m_i + m_k)v_k - m_i v_i = 0 \quad \rightarrow \quad v_i = \frac{m_i + m_k}{m_i} v_k.$$

Pri tem smo upoštevali, da je klada v začetku mirovala.

Zdaj obravnavajmo še del po trku. Imamo klado z izstrelkom, ki se giblje v vodoravni smeri s hitrostjo v_k . Edini sili, ki delujta na klado, sta teža in sila vrvice. Ker slednja ne opravlja nič dela, se ohranja vsota potencialne in kinetične energije $W_p + W_k$. Sledi

$$\Delta W = W_{pk} - W_{pz} + W_{kk} - W_{kz} = (m_i + m_k)gh - \frac{(m_i + m_k)v_k^2}{2} = 0,$$

pri čemer je h višina, za katero se dvigne klada. Bralec naj sam preveri, da je $h = l(1 - \cos \varphi) = 3$ cm. Iz gornje enačbe sledi

$$v_k = \sqrt{2gh}.$$

Enačbi združimo in izračunamo hitrost izstrelka

$$v_i = \frac{m_i + m_k}{m_i} \sqrt{2gh} = 307 \text{ m/s. } \square$$

Prožni trk

Pri elastičnem oziroma popolnoma prožnem trku se poleg gibalne količine ohrani tudi skupna kinetična energija teles. Obravnavajmo le najpreprostejši primer centralnega trka v eni dimenziji, pri katerem se obe telesi pred trkom in po njem gibljeta po isti premici. Naj se gibljeta telesi z masama m_1 in m_2 ter hitrostima v_{1z} in $-v_{2z}$. Negativen predznak pomeni, da se približujeta drugo drugi (slika 8.3). Telesi prožno trčita, po trku pa se telesi po isti premici oddaljujeta. S tem privzetkom ne izgubimo splošnosti, saj lahko v primeru nasprotnne smeri gibanja samo zamenjamo predznak hitrosti. Naj bosta hitrosti teles po trku $-v_{1k}$ in v_{2k} . Izračunamo ju iz sistema enačb za ohranitev gibalne količine

$$-m_1 v_{1k} + m_2 v_{2k} - m_1 v_{1z} + m_2 v_{2z} = 0 \quad (8.9)$$

in ohranitev kinetične energije

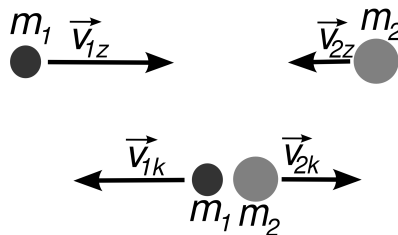
$$\frac{1}{2} m_1 v_{1k}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2k}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1z}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{2z}^2 = 0. \quad (8.10)$$

Odtod lahko izračunamo končni hitrosti teles (bralec naj naredi račun za vajo sam)

$$v_{1k} = \frac{(m_2 - m_1)v_{1z} + 2m_2 v_{2z}}{m_1 + m_2} \quad (8.11)$$

$$v_{2k} = \frac{(m_1 - m_2)v_{2z} + 2m_1 v_{1z}}{m_1 + m_2}. \quad (8.12)$$

Če sta masi teles enaki, dobimo preprost rezultat $v_{1k} = v_{2z}$ in $v_{2k} = v_{1z}$. Enaki telesi torej pri prožnem trku zamenjata hitrosti.



Slika 8.3: Popolnoma prožen trk v eni dimenziji

Odriv

Odriv dveh teles drugo od drugega si lahko predstavljamo kot obrnjeni plastični trk. V najpreprostejšem primeru telesi na začetku mirujeta (gibalna količina je enaka nič), po odrivu pa se gibljeta v nasprotnih smereh. Zaradi ohranitve gibalne količine bo tudi po trku skupna gibalna količina obeh teles enaka nič. Označimo z v_1 in $-v_2$ velikosti hitrosti po odrivu, saj se telesi gibljeta v nasprotnih smereh. Potem velja

$$m_1 v_1 = m_2 v_2. \quad (8.13)$$

Po odrivu imata telesi enako veliko gibalno količino, a nasprotno usmerjeno. Kinetična energija se pri odrivu ne ohranja. Pred odrivom je kinetična energija namreč enaka nič, po odrivu pa ima vsako telo svojo kinetično energijo. Velja $W_{k1}/W_{k2} = m_2/m_1$. Dokažimo zapisano razmerje med kinetičnima energijama

$$\frac{W_{k1}}{W_{k2}} = \frac{m_1 v_1^2 / 2}{m_2 v_2^2 / 2} = \frac{m_1 v_1^2}{m_2 (m_1 v_1 / m_2)^2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (8.14)$$

Poskus 8.2.1 — Odriv - ohranitev gibalne količine. Imamo dva jahača z različnima masama ($m_1 = 192$ g in $m_2 = 392$ g), ki mirujeta na zračni drči. Med njima je skrčena listna vzmet, jahača pa povezuje vrstica. Ko vrstico prežgemo, vzmet potisne jahača narazen. Pri tem velja enačba (8.13): $m_1v_1 = m_2v_2$. Sensorja pokažeta, da naredi težji jahač pot 10 cm v času okrog 780 ms, tako da je njegova hitrost $v_2 = 0,13$ m/s. Izračunamo še hitrost lažjega jahača

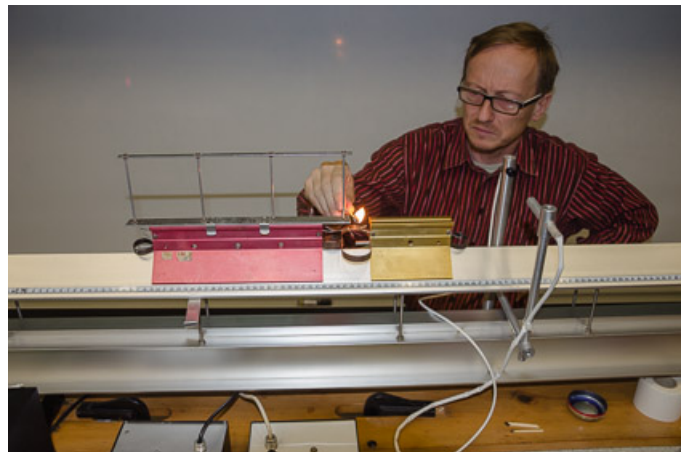
$$v_1 = \frac{m_2v_2}{m_1} = 0,26 \text{ m/s.}$$

Skupna kinetična energija jahačev se pri odrivu ni ohranila. Skupna energija pa se ohranja, če upoštevamo še prožnostno energijo skrčene vzmeti. Če bi imeli na voljo podatek W_{pr} , bi lahko iz ohranitve gibalne količine in ohranitve celotne (kinetične in prožnostne) energije

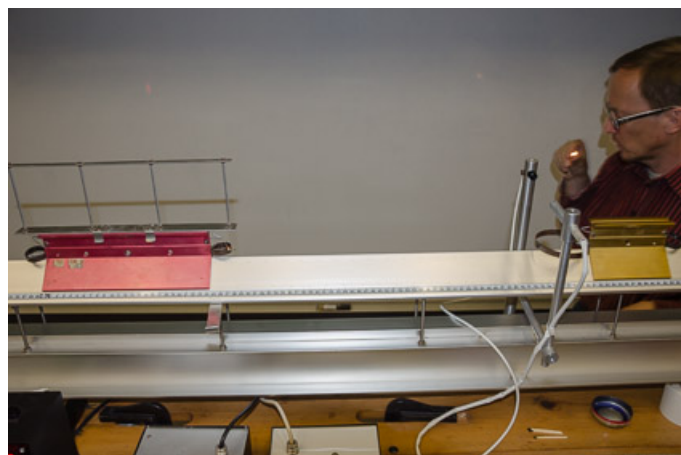
$$m_1v_1 = m_2v_2 \quad \text{in} \quad \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = W_{pr}$$

izračunali obe hitrosti

$$v_1 = \sqrt{\frac{2W_{pr}}{m_1(1 + m_1/m_2)}} \quad \text{in} \quad v_2 = \sqrt{\frac{2W_{pr}}{m_2(1 + m_2/m_1)}}.$$



Preden vrstico prežgemo, jahača mirujeta, med njima pa je skrčena vzmet.



Po odrivu se jahača gibljeta v nasprotnih smereh.

9. Dinamika togih razsežnih teles

Spoznali bomo fiziko razsežnih togih teles, pri katerih bomo upoštevali tudi njihovo velikost. Značilnost togih teles je, da se pod vplivom sil ne deformirajo. To je seveda le približek, saj idealno togega telesa ni. Najprej spoznajmo nekaj pojmov v zvezi s sistemom točkastih teles, saj si razsežno togo telo lahko mislimo kot skupek veliko točkastih teles. Obravnavali bomo navor, opredelili vztrajnostni moment, na koncu pa bomo spoznali še vrtilno količino.

9.1 Masno središče in težišče

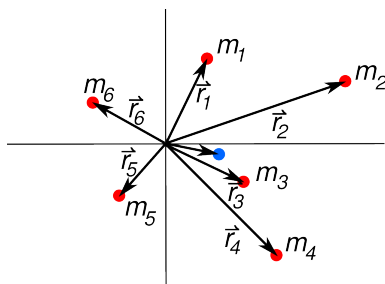
Zamislimo si več točkastih teles z masami m_i ($i = 1$ do N) in pripadajočimi krajevnimi vektorji \vec{r}_i v izbranem koordinatnem sistemu. Določimo najprej **lego skupnega masnega središča**

$$\vec{r}^* = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}. \quad (9.1)$$

Tudi če imamo sestav več razsežnih teles namesto točkastih, lahko uporabimo enačbo (9.1) za izračun masnega središča. Pri tem vektorji \vec{r}_i opisujejo lege masnih središč posameznih teles. Z odvajanjem enačbe (9.1) enkrat in dvakrat po času pri konstantnih masah dobimo še podobni enačbi za hitrost in pospešek masnega središča sistema teles

$$\vec{v}^* = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad \text{in} \quad \vec{a}^* = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}. \quad (9.2)$$

Pri tem so \vec{v}_i in \vec{a}_i hitrosti in pospeški posameznih teles v sistemu.



Slika 9.1: Izračun masnega središča več točkastih teles. Masno središče je označeno z modro.

Za večino obravnavanih teles lahko privzamemo, da je težni pospešek na področju vseh delov telesa enak. V tem primeru velja, da je **masno središče hkrati tudi težišče. Težišče je točka, v kateri navidezno prejmlje celotna sila teže sistema.** Prijemališče sile je, kot bomo videli v nadaljevanju, pomembno pri izračunu navorov.

Analogno z enačbo (9.1) lahko izračunamo tudi masno središče ali težišče razsežnega telesa z maso m , ki si ga mislimo sestavljenega iz zelo velikega števila točkastih teles. Za izračun vsoto nadomestimo z integralom po celotni prostornini telesa z gostoto ρ .

$$\vec{r}^* = \frac{1}{m} \int_m \vec{r} dm = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} \rho dV, \quad (9.3)$$

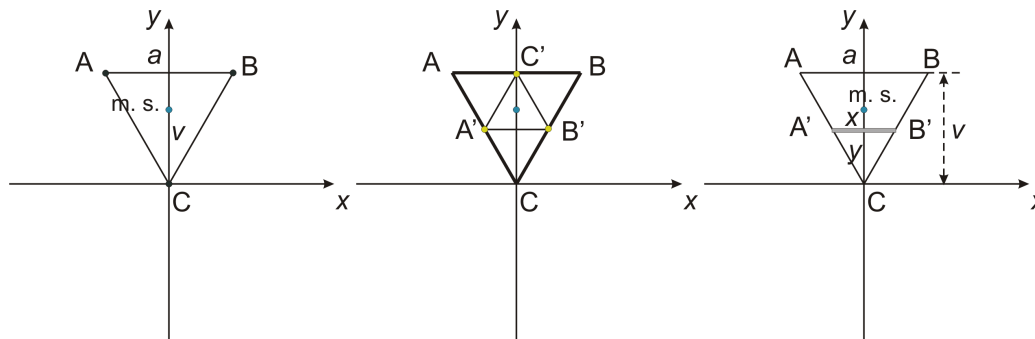
Če je telo homogeno in ima povsod enako gostoto, se gostota pokrajša in dobimo

$$\vec{r}^* = \frac{\int_V \vec{r} dV}{V}. \quad (9.4)$$

Tako lahko izračunamo masno središče za vsako homogeno telo. Bralec naj pokaže, da leži pri stožcu ali piramidi masno središče na četrtini telesne višine nad središčem osnovne ploskve.

Masno središče votlega telesa je lahko tudi v njegovi votlini. Tako je na primer pri votli krogli ali krogelni lupini. Če sta kroglja in votlina koncentrični, je zaradi simetrije njeno masno središče v geometrijskemu središču krogle.

Računski zgled 9.1.1 Vzemimo enakostranični trikotnik s stranico a in maso m (slika 9.2). V prvem primeru (leva slika) naj trikotnik sestavljajo samo tri točkasta telesa, v vsakem je po ena tretjina celotne mase ($m/3$). V drugem primeru je trikotnik sestavljen iz treh tankih palic. Vsa masa je enakomerno porazdeljena po stranicah, na vsaki spet masa $m/3$ (srednja slika). V tretjem primeru naj bo celotna masa m enakomerno porazdeljena po ploščini trikotnika (desna slika). Pokažimo, da je v vseh treh primerih masno središče na istem mestu, tj. na dveh tretjinah višine od izhodišča.



Slika 9.2: Lega masnega središča (modra pika) za tri primere enakostraničnega trikotnika: treh točk, treh stranic in celotnega trikotnika. Rumene pike na srednji sliki so masna središča posameznih stranic. Stranico trikotnika smo označili z a .

Prvi primer je najenostavnejši. Telo je sestavljeno iz treh točkastih teles in masno središče izračunamo po enačbi (9.1). Zaradi simetrije sistema sklepamo, da je masno središče na osi y , lahko pa bralec sam pokaže, da je koordinata x masnega središča enaka nič. Izračunajmo še koordinato y^* , pri čemer je v višina trikotnika.

$$y^* = \frac{\frac{m}{3}(y_A + y_B + y_C)}{m} = \frac{1}{3}(v + v + 0) = \frac{2}{3}v.$$

V drugem primeru je trikotnik sestavljen iz treh palic. Ker so homogene, ležijo njihova masna središča ravno na njihovih sredinah. Masno središče celotnega trikotnika izračunamo tako, da palice nadomestimo s točkastimi telesi v njihovih masnih središčih. Dobimo pol manjši

enakostranični trikotnik $A'B'C'$, z masami $m/3$ v ogliščih (srednja slika). Zanj vemo, da ima masno središče na dveh tretjinah višine, gledano od oglišča C' , to pa je ista točka glede na prvotni trikotnik kot v prvem primeru.

V tretjem primeru uporabimo enačbo (9.4), skrčeno na dve dimenziji. Zaradi simetrije lahko spet privzamemo (ali izračunamo), da je $x^* = 0$. Koordinato y^* poiščemo z integriranjem po ploščini trikotnika

$$y^* = \frac{1}{S} \int_S y dS.$$

Integriramo tako, da trikotnik razdelimo na ozke odseke, kot je prikazano na desni sliki. Tak odsek je sicer enakokrak trapez, a si ga lahko mislimo kot tanek pravokotnik in v limiti ne naredimo napake. Košček ploščine je torej $dS = xdy = a(y/v)dy$. Iz podobnosti trikotnikov ABC in $A'B'C$ sledi $x/a = y/v$. Upoštevajmo še $S = av/2$ in dobimo

$$y^* = \frac{2}{av} \int_0^v y \left(\frac{ay}{v} \right) dy = \frac{2}{v^2} \frac{y^3}{3} \Big|_0^v = \frac{2v}{3}. \quad \square$$

9.2 Gibanje težišča sistema teles

Ko smo obravnavali gibanje točkastega telesa, smo zanj zapisali drugi Newtonov zakon (6.2) in izrek o gibalni količini (8.5). Kadar obravnavamo sistem več teles, zapišemo podobne enačbe, le **namesto lege točkastega telesa moramo upoštevati lego masnega središča**. Zapišimo skupni učinek zunanjih sil na sistem več teles (drugi Newtonov zakon za razsežna telesa). **Vsota vseh zunanjih sil na sistem teles je enaka skupni masi, pomnoženi s pospeškom masnega središča teles.**

$$\sum \vec{F}_{\text{zun}} = m\vec{a}^*. \quad (9.5)$$

Notranje sile se zaradi tretjega Newtonovega zakona po parih teles izničijo in ne vplivajo na gibanje masnega središča. Ponovimo: notranje sile so tiste sile, s katerimi telesa v obravnavanem sistemu delujejo drugo na drugo, zunanje pa tiste, s katerimi telesa v okolici sistema delujejo na telesa v sistemu.

Lego masnega središča pogosto uporabljamo pri praktičnem računu. Ko, na primer, opazujemo gibanje para zvezd, obravnavamo gibanje njunega masnega središča. Ali ko se raketa pri ognjemetu razpoči, saj se masno središče vseh njenih delov giblje po isti krivulji (paraboli), kot bi se gibala nerazpočena raketa.

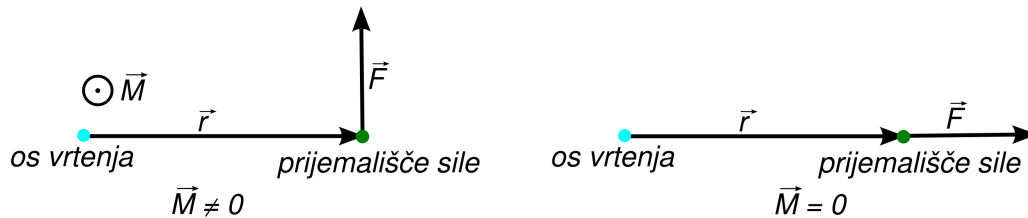
9.3 Navor

Po drugem Newtonovem zakonu vemo, da se telo začne gibati enakomerno pospešeno, če nanj delujemo s silo. To velja za točkasta telesa ali pa za masno središče razsežnega telesa. Pri slednjih pa ima sila lahko še dodaten učinek, saj lahko povzroča vrtenje. Pri tem je odvisno, kje sila deluje, zato vpeljemo novo fizikalno količino - navor.

Navor sile \vec{M} je definiran kot vektorski produkt krajevnega vektorja do prijemašča sile \vec{r} in vektorja sile

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (9.6)$$

Navor je vektor in je vedno definiran glede na neko referenčno točko oziroma os vrtenja. Razdaljo od osi vrtenja do prijemališča sile pogosto imenujemo ročica. Iz vektorskega produkta v enačbi (9.6) sledi, da je **navor vedno pravokoten tako na silo kot na njeno ročico**. Njegova velikost je $M = Fr \sin \varphi$, kjer je φ kot med vektorjema \vec{r} in \vec{F} . Če torej deluje sila v smeri krajevnega vektorja \vec{r} , je njen navor na telo enak nič, saj je vektorski produkt dveh vzporednih vektorjev enak nič.



Slika 9.3: Navor je vektorski produkt ročice in sile, zato kaže ven iz lista, kar označimo s krožcem, ki ima v sredini piko. Če sta ročica in sila vzporedni, je navor enak nič.

Navor na levi sliki povzroči vrtenje telesa okoli osi. Izračunajmo še delo, ki ga opravi navor pri vrtenju. Navor naj bo konstanten, konstantna naj bo tudi velikost sile, ki je pravokotna na ročico. Pri vrtenju s stalnim navorom sila ves čas spreminja smer, tako da so majhni premiki njenega prijemališča ves čas vzporedni s silo samo. Delo navora je enako delu ustrezne sile in velja

$$A = \vec{F} \cdot \vec{l} = Fr\varphi, \quad (9.7)$$

kjer je φ kot zasuka. Uporabimo še zvezo $M = Fr$ in dobimo, da je **opravljeno delo enako produktu navora in zasuka**

$$A = \vec{M} \cdot \vec{\varphi}. \quad (9.8)$$

Pri tem smo vpeljali zasuk kot vektorsko količino, ki kaže ven iz lista. Enačbo posplošimo na spreminjajoč se navor

$$A = \int_0^\varphi \vec{M}(\varphi) d\vec{\varphi}. \quad (9.9)$$

Izpeljimo navor sile teže za razsežno telo. Spomnimo se, da je težišče točka, kjer navidezno prijemlje sila teže na telo. Teža je sicer razporejena po celi prostornini telesa, vendar bomo pokazali, da pri računu njenega navora lahko privzamemo, da je njeno prijemališče točkasto.

Enačba (9.6) velja, kadar na telo deluje točkasta sila. V splošnem in za izračun navora sile teže moramo uporabiti integral, saj je teža porazdeljena po celotni prostornini telesa. Izberimo neko koordinatno izhodišče ali os, glede na katero računamo navor (slika 9.4). Potem telo razdelimo na majhne delčke in izračunamo navor sile teže za vsak delček posebej. Na koncu jih seštejemo - integriramo. Navor teže je tako

$$\vec{M}_g = \int_V \vec{r} \times d\vec{F}_g = \int_V \vec{r} \times d(m\vec{g}). \quad (9.10)$$

Težni pospešek je konstanten, zato ga izpostavimo skupaj z znakom za vektorski produkt. Spomnimo se, da vektorski produkt ni komutativen ($\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$), zato pazimo, da pri izpostavljanju ne zamenjamo vrstnega reda množenja. Dobimo

$$\vec{M}_g = \left(\int_V \vec{r} dm \right) \times \vec{g}. \quad (9.11)$$

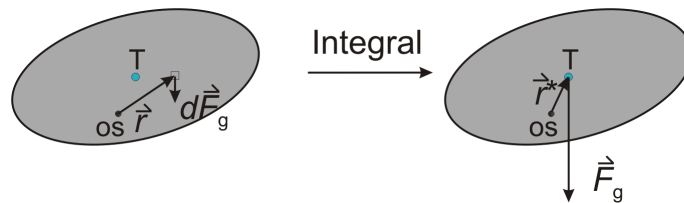
Če pogledamo enačbo (9.3), ugotovimo, da velja

$$\int_V \vec{r} dm = m\vec{r}^*. \quad (9.12)$$

Torej je navor sile teže

$$\vec{M}_g = \vec{r}^* \times (m\vec{g}) = \vec{r}^* \times \vec{F}_g. \quad (9.13)$$

Po definiciji navora (enačba 9.6) je **navor sile teže enak navoru, s katerim bi sila teže delovala v eni sami točki – v masnem središču telesa.**



Slika 9.4: Izpeljava navora sile teže

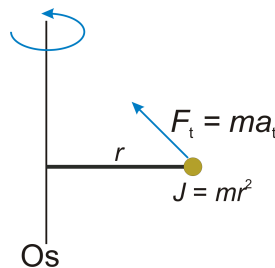
Obesimo telo na neko os, okrog katere se lahko vrti. Os je vodoravna, koordinatno izhodišče pa naj leži tej osi. Za vektor ročice \vec{r}^* vzamemo vektor od izhodišča do težišča. Velikost navora je potem

$$M_g = mgr^* \sin \varphi, \quad (9.14)$$

kjer je φ kot med vektorjem ročice in silo teže. Opazimo, da je vseeno, ali vzamemo kot φ ali $\pi - \varphi$, saj sta sinusa teh dveh kotov enaka.

9.4 Vztrajnostni moment in rotacijska energija

Obravnavajmo točkasto telo z maso m , ki je pritrjeno na togo ravno prečko z dolžino r in zanemarljivo maso. Prečka je pravokotna na os vrtenja, torej je radij kroženja točkastega telesa kar enak ročici r (slika 9.5).



Slika 9.5: Kroženje točkastega telesa in njegov vztrajnostni moment

Na točkasto telo delujmo s silo F_t , ki kaže tangencialno glede na kroženje. Telo se pospešuje s tangencialnim pospeškom a_t . Velja

$$ma_t = F_t \quad \rightarrow \quad ma_t r = F_t r \quad \rightarrow \quad m(r\alpha)r = mr^2\alpha = F_t r = M. \quad (9.15)$$

S tem smo za točkasto telo izpeljali zelo pomembno zvezo, pogosto ji rečemo tudi drugi Newtonov zakon za rotacijo. **Če na neko telo delujemo s stalnim navorom glede na izbrano os, se telo vrti enakomerno pospešeno.**

$$M = J\alpha, \quad (9.16)$$

pri čemer je M navor, α kotni pospešek, sorazmernostni koeficient J pa imenujemo vztrajnostni moment. **Vztrajnostni moment točkastega telesa je $J = mr^2$.** Spoznali bomo, da velja ta enačba tudi bolj splošno za razsežno togo telo.

Poglejmo, kako je pri razsežnih telesih. Izračunajmo kinetično energijo pri rotaciji togega telesa okrog nepremične osi. Ker se različni deli telesa vrtijo z različno hitrostjo, ne moremo uporabiti izraza za kinetično energijo točkastega telesa. Zato moramo razsežno telo najprej razdeliti na veliko majhnih delčkov, izračunati prispevke posameznih delov k kinetični energiji, na koncu pa vse prispevke sešteti - spet moramo integrirati. Zapišimo energijo

$$W_k = \frac{1}{2} \int_V dm v^2 = \frac{1}{2} \int_V dm (r\omega)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \int_V dm r^2. \quad (9.17)$$

Integrirali smo po celotni prostornini telesa. Pravokotno razdaljo vsake točke telesa od osi vrtenja smo označili z r , upoštevali pa smo tudi, da imajo vse točke enako kotno hitrost ω . Integral v zadnjem izrazu imenujemo **vztrajnostni moment telesa, ki je odvisen tako od mase in oblike telesa kot od postavitve in orientacije vrtilne osi**

$$J = \int_V dm r^2. \quad (9.18)$$

Rotacijsko kinetično energijo togega telesa lahko zapišemo z vztrajnostnim momentom

$$W_k = \frac{1}{2} J \omega^2. \quad (9.19)$$

Celotno kinetično energijo razsežnega togega telesa lahko zdaj strnjeno zapišemo kot vsoto energije zaradi gibanja težišča (translacijski del) in energije zaradi vrtenja telesa (rotacijski del)

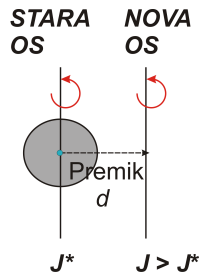
$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2. \quad (9.20)$$

Povedali smo, da je vztrajnostni moment vedno definiran glede na neko izbrano os. Poglejmo, kako premik osi vrtenja vpliva na vrednost vztrajnostnega momenta. Naj bo vztrajnostni moment telesa pri vrtenju okrog osi, ki gre skozi njegovo težišče, enak J^* . **Če os vzporedno premaknemo v poljubno smer za premik d , se vztrajnostni moment poveča**

$$J = J^* + m d^2. \quad (9.21)$$

Enačbo (9.21) imenujemo Steinerjev izrek¹. Steinerjev izrek velja samo za vzporeden premik osi. Vztrajnostni moment okoli poljubne druge (zasukane) osi, moramo izračunati posebej. V tabeli (9.1) je navedenih nekaj vztrajnostnih momentov pri vrtenju telesa okrog osi skozi njegovo masno središče. Dodatni primeri so izpeljani v dodatku (poglavje 22).

¹Švicarski matematik Jakob Steiner (1796-1863), [Wikipedija](#)



Slika 9.6: Steinerjev izrek; masno središče je označeno z modrim krožcem.

Skica	Telo in dimenzije	Smer osi skozi težišče	J^*
	tanka palica, dolžina L	pravokotno na palico	$\frac{mL^2}{12}$
	polna krogla, radij R	poljubna	$\frac{2mR^2}{5}$
	tanka krogelna lupina, radij R	poljubna	$\frac{2mR^2}{3}$
	poln valj, radij R	geometrijska os	$\frac{mR^2}{2}$
	poln valj, radij R , višina h	pravokotno na geom. os	$\frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12}$
	tanka valjna lupina, radij R	geometrijska os	mR^2
	stožec, radij R	geometrijska os	$\frac{3mR^2}{10}$

Tabela 9.1: Nekaj vztrajnostnih momentov teles okoli osi skozi težišče

Računski zgled 9.4.1 Izračunajmo vztrajnostni moment homogene tanke palice z dolžino l in maso m okoli osi, ki je pravokotna na palico in gre skozi njeno sredino (težišče).

Po definiciji (enačba 9.18) je vztrajnostni moment togega telesa enak

$$J = \int_V dm r^2.$$

Palica naj ima presek S , razdelimo pa jo na majhne koščke z dolžino dr in maso $dm = \rho S dr$, ki ležijo na oddaljenosti r od osi. Z ρ smo označili gostoto palice. Sledi

$$J^* = \int_{-l/2}^{l/2} \rho S dr r^2 = \rho S \frac{r^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \rho S \frac{l^3}{12} = \frac{ml^2}{12}.$$

Zdaj lahko po Steinerjevem izreku izračunamo vztrajnostni moment skozi poljubno os, ki je vzporedna izbrani. Poiščimo vztrajnostni moment okoli osi, ki gre skozi krajišče palice

$$J = J^* + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}.$$

Seveda bi do istega rezultata prišli, če bi vztrajnostni moment izračunali neposredno, po definiciji

$$J = \int_0^l \rho S dr r^2 = \rho S \frac{r^3}{3} \Big|_0^l = \rho S \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}. \quad \square$$

Poskus 9.4.1 — Kotaljenje rotacijsko simetričnih teles po klancu. Imamo dva valja enakih dimenzij, pri čemer je eden poln, drug pa votel. Hkrati ju spustimo z enake višine po klancu navzdol. Kateri od njiju se bo prej prikotalil do vznožja klanca?



Kotaljenje polnega (črn) in votlega valja (svetel) po klancu

To nalogo lahko obravnavamo na dva načina: z energijskega vidika ali pa z zvezo med navorom dinamične komponente sile teže na klancu in kotnim pospeškom kotalečega se telesa. Preprostejša je energijska obravnava, bralec pa lahko za vajo poskusi še drugi način. **Kotaljenje si mislimo kot gibanje, sestavljeno iz translacijskega gibanja težišča telesa vzdolž podlage in iz rotacije telesa krog težiščne osi.** Skupna kinetična energija telesa pri kotaljenju je

$$W_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J^*\omega^2,$$

kjer je m masa telesa, v hitrost težišča, J^* vztrajnostni moment okoli težiščne osi, ω pa kotna hitrost. Pri kotaljenju velja $\omega = v/R$, kjer je R polmer telesa. Za rotacijsko simetrična telesa lahko glede na tabelo (9.1) zapišemo $J^* = c m R^2$, pri čemer je c številski koeficient, npr. $c_{vv} = 1$ za tanek votel valj in $c_{pv} = 1/2$ za poln valj. Zato je

$$W_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{c}{2}mR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2 = (1+c)\frac{mv^2}{2}.$$

Pri kotaljenju po klancu navzdol ni dela zunanjih sil in vsota potencialne in kinetične energije se ohranja. Ko se manjša potencialna energija, narašča kinetična. Pri višinski razliki h velja

$$mgh = (1+c)\frac{mv^2}{2} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2gh}{1+c}}.$$

Večja je torej hitrost tistega valja, ki ima manjši koeficient c , zato pride polni valj prej do vznožja klanca.



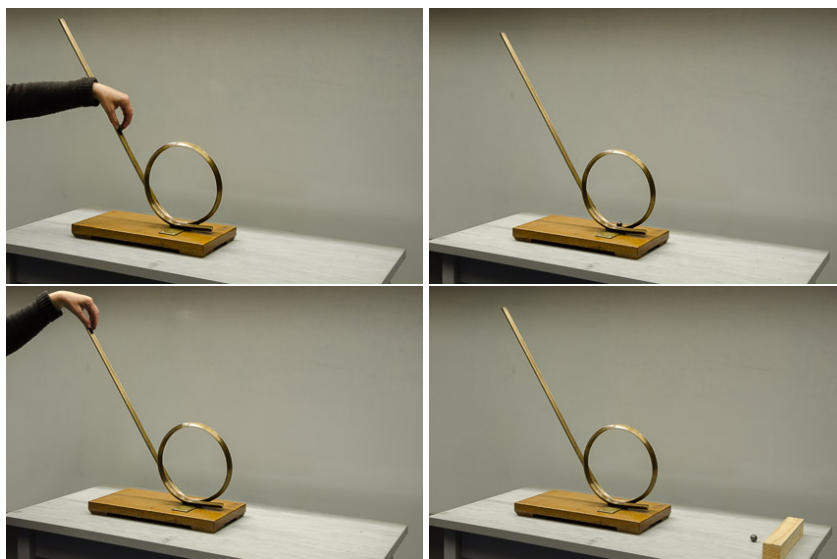
Kotaljenje valjev na klanecu

Brez dodatnih podatkov lahko izračunamo tudi razmerje obeh časov, ki jih valja porabita, da prideta do vznožja klanca. Oba imata začetno hitrost nič in opravita enako pot. Zato je njun čas obratno sorazmeren s povprečno hitrostjo, ta pa je pri enakomerno pospešenem gibanju enaka polovici končne hitrosti. Razmerje časov za votli in polni valj je

$$\frac{t_{vv}}{t_{pv}} = \frac{v_{pv}}{v_{vv}} = \sqrt{\frac{1 + c_{vv}}{1 + c_{pv}}} = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1,15.$$

Pri konkretnem poskusu s štoparico izmerimo časa približno 1,45 s in 1,6 s. To nam da razmerje časov 1,10, kar je dovolj dobro glede na natančnost izvedenega poskusa.

Poskus 9.4.2 — Luping na klanecu. Kroglico spustimo po zavitem žlebu, ki naredi polno navpično zanko. Vsaj s kolikšne višinske razlike glede na vrh zanke moramo spustiti kroglico, da ne pade iz zanke?



Neuspeli in uspeli luping

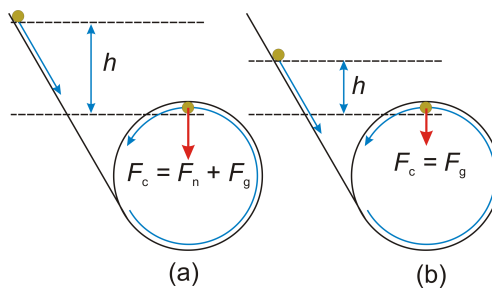
Ob prejšnjem poskusu smo izračunali kinetično energijo telesa pri kotaljenju, $W_k = (1 + c) \frac{mv^2}{2}$, pri čemer zdaj namesto valja uporabimo kroglico in $c = 2/5$. Sledi

$$W_k = \frac{7mv^2}{10}.$$

Pri spustu se potencialna energija pretvarja v kinetično, njuna vsota pa se ohranja. V začetku kroglica miruje, zato pri višinski razliki h velja

$$mgh = \frac{7mv^2}{10} \rightarrow v^2 = \frac{10gh}{7}.$$

Po drugi strani je kritična hitrost v , da pride kroglica do vrha zanke, tista, pri kateri je centripetalna sila kar enaka sili teže. Tedaj je namreč pravokotna sila tal enaka nič.



Sile na kroglico na vrhu zanke: a) $F_n \neq 0$ (večja začetna višina), b) $F_n = 0$ (mejna začetna višina, kritična hitrost). Zaradi preglednosti je z rdečo puščico označena samo rezultanta sil F_c .

Torej velja pri zanki s polmerom R : $F_c = F_g \rightarrow \frac{mv^2}{R} = mg \rightarrow v^2 = gR$. Izenačimo oba izraza za kvadrat hitrosti in dobimo

$$\frac{10gh}{7} = gR \rightarrow h = \frac{7R}{10}.$$

Rezultat poskusa se ujema z izračunano kritično začetno lego kroglice: premer zanke je malo več kot 20 cm, izmerjena kritična lega kroglice pa nekaj več kot 15 cm nad temenom zanke.

Za vajo naj bralec ponovi izračun za košček ledu, ki drsi po žlebu brez trenja. Ali pričakuje višjo ali nižjo kritično začetno višino kot v primeru kotaljenja kroglice?

9.5 Navor dvojice nasprotno enakih sil

Dvojica sil imenujemo dve sili, ki sta enako veliki, a kažeta v nasprotnih smereh. Če prijmljeta obe sili v isti točki (v osi), telo miruje in se ne vrti. Bolj zanimiv je primer, ko ti dve sili delujeta na telo v različnih prijemališčih. Ker je njuna vektorska vsota nič, telo po prvem Newtonovem zakonu miruje. **Če deluje na telo dvojica enako velikih, a nasprotno usmerjenih sil, njegovo težišče miruje. Sili na telo delujeta z navorom M , zato se telo pospešeno vrti.** Kotni pospešek telesa je po drugem Newtonovem zakonu za rotacijo (9.16) enak

$$\alpha = \frac{M}{J^*} = \frac{Fr}{J^*}, \quad (9.22)$$

kjer je J^* vztrajnostni moment telesa okoli osi vrtenja, r pa pravokotna razdalja med premicama, na katerih ležita vektorja obeh sil. Pri tem vzdolžna lega prijemališč na premicah ni pomembna.

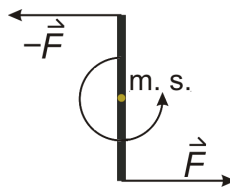
Zapisali smo pravokotno razdaljo namesto vektorskega produkta iz enačbe (9.6).

Poglejmo primer. Na tanko palico z maso m in dolžino L delujeta na obeh koncih nasprotno enaki sili z velikostjo F , ki sta na palico pravokotni (slika 9.7). Kotni pospešek palice je

$$\alpha = 2 \frac{FL/2}{J^*} = 2 \frac{FL/2}{mL^2/12} = 12 \frac{F}{mL}. \quad (9.23)$$

Pri tem smo upoštevali, da na telo delujeta dve sili, njuni ročici pa sta dolgi $L/2$. Težišče palice miruje, pospešek koncev palice pa je

$$a = a_t = \alpha R = \alpha \frac{L}{2} = 6 \frac{F}{m}. \quad (9.24)$$



Slika 9.7: Navor dvojice sil, ki prijmljeta na konceh palice. Masno središče (m. s.) ostaja pri miru, palica se zaradi navora sil zavrti okoli svoje sredine v nasprotni smeri urnega kazalca.

9.6 Vrtilna količina

Pri premem gibanju smo vpeljali gibalno količino in zapisali izrek o ohranitvi gibalne količine, ki pravi, da je sprememba gibalne količine enaka sunku zunanjih sil. Uporaba tega izreka omogoča napoved dogajanja po trku, ne da bi poznali podrobnosti trka samega. Do zdaj smo večini količin, ki smo jih poznali iz premega gibanja, pripisali ustrezne količine za vrtenje: pot in zasuk, hitrost in kotna hitrost, pospešek in kotni pospešek, sila in navor, masa in vztrajnostni moment ... Poiščimo še količino, ki bi utrezala gibalni količini za vrtenje.

Izhajajmo iz drugega Newtonovega zakona za točkasto telo

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (9.25)$$

Izberimo neko referenčno os vrtenja. Krajevni vektor točkastega telesa glede na os je \vec{r} . Z njim gornjo enačbo pomnožimo vektorsko z leve in dobimo

$$\vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (9.26)$$

Na desni strani enačbe že prepoznamo navor \vec{M} . Pomnožimo celotno enačbo z dt in dobimo

$$\vec{r} \times m\vec{a}dt = \vec{M}dt \quad \text{in} \quad \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times d\vec{G} = d(\vec{r} \times \vec{G}) = \vec{M}dt. \quad (9.27)$$

V zvezi z levo stranjo enačbe vpeljemo vrtilno količino točkastega telesa pri kroženju

$$\vec{\Gamma} = \vec{r} \times \vec{G} = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad (9.28)$$

Ob tem ne pozabimo, da je vrtilna količina točkastega telesa odvisna od njegove hitrosti, mase in od izbire lege referenčne točke (osi).

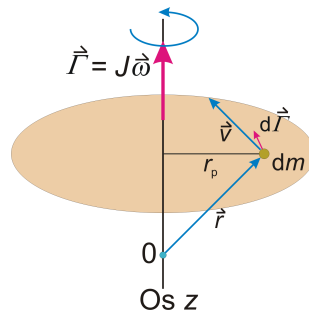
Zapišimo še vrtilno količino za togo razsežno telo. Naj se togo telo vrtilno okoli osi z s kotno hitrostjo ω . Telo naj bo okoli te osi rotacijsko simetrično. Kotna hitrost in vrtilna količina kažeta v smeri rotacijske osi (slika 9.8). Vrtilno količino telesa dobimo z integriranjem po majhnih koščkih telesa, za katere uporabimo enačbo (9.28) za točkasto telo. Na sliki (9.8) je prikazana smer majhnega prispevka $d\vec{\Gamma} = \vec{r} \times (dm)\vec{v}$ enega koščka telesa z maso dm . Po integriranju je zaradi simetrije od nič različna samo komponenta vrtilne količine, vzporedna z osjo z .

Namesto enačbe (9.28) lahko vzamemo samo ustrezno skalarno enačbo za komponento Γ_z

$$\Gamma_z = r_p dm v = r_p dm (r_p \omega) = dm r_p^2 \omega. \quad (9.29)$$

Upoštevali smo, da je r_p tista komponenta vektorja \vec{r} , ki je pravokotna na os z . Vektor hitrosti koščka \vec{v} je tudi pravokoten na rotacijsko os, velikost hitrosti pa je $v = r_p \omega$. Zato nazadnje velja

$$\Gamma = \left(\int_V dm r_p^2 \right) \omega. \quad (9.30)$$



Slika 9.8: Izpeljava zveze med vrtilno količino in kotno hitrostjo za togo razsežno telo. Majhna rožnata puščica označuje prispevek koščka z maso dm k vrtilni količini $d\vec{\Gamma} = \vec{r} \times (dm)\vec{v}$, velika rožnata puščica pa celotno vrtilno količino $\vec{\Gamma} = J\vec{\omega}$ kot vektorsko vsoto (integral) vseh prispevkov.

Na desni strani enačbe prepoznamo vztrajnostni moment telesa (enačba 9.18), le da smo tukaj pravokotne razdalje točk od osi vrtenja označili z r_p namesto z r , ki ima na sliki (9.8) drugačen pomen. Enačbo zato strnjeno zapišemo

$$\Gamma = J\omega, \quad (9.31)$$

Vrtilna količina togega telesa je produkt njegovega vztrajnostnega momenta in kotne hitrosti. Enota za vrtilno količino je $\text{kg m}^2/\text{s}$. Pozoren bralec bi lahko zgoraj zapisano enačbo že napovedal z analogijo s premim gibanjem. Gibalni količini, ki je produkt mase in hitrosti, namreč ustreza vrtilna količina, ki je produkt vztrajnostnega momenta in kotne hitrosti. V vektorski obliki zapišemo enačbo (9.31) kot

$$\vec{\Gamma} = J\vec{\omega}. \quad (9.32)$$

Vrnimo se še enkrat k enačbi (9.27) in vstavimo izraz za vrtilno količino

$$d\vec{\Gamma} = Mdt. \quad (9.33)$$

Če gornjo enačbo integriramo, dobimo zelo pomemben izrek o vrtilni količini

$$\Delta\vec{\Gamma} = \int_0^t \vec{M}dt. \quad (9.34)$$

Izrek o vrtilni količini pravi, da je sprememba vrtilne količine enaka sunku zunanjih navorov – povsem analogno, kot je izrek o gibalni količini povedal, da je sprememba gibalne količine enaka sunku zunanjih sil. **Če ni sunka zunanjih navorov, se vrtilna količina telesa ohranja.**

Povežimo spremembo vrtilne količine in sunek navorov še s spremembo kotne hitrosti

$$\Delta \vec{\Gamma} = \int_0^t \vec{M} dt = J \vec{\omega} - J \vec{\omega}_0. \quad (9.35)$$

★ Pri zapisu enačbe (9.32) smo privzeli, da je vztrajnostni moment skalar. V resnici je ta zveza bolj zapletena. Vektorja vrtilne količine in kotne hitrosti v splošnem ne kažeta v isti smeri, vztrajnostni moment pa je tenzor drugega reda (matrika z 9 elementi). Smer kotne hitrosti še vedno definiramo kot smer osi vrtenja, vektor pa kaže v smer ustreznega gibanja desnega vijaka pri vrtenju. Vrtilna količina ima isto smer kot kotna hitrost samo v posebnih primerih simetrijskih smeri osi vrtenja. Da bolje ponazorimo te trditve, vzemimo vrtenje valja (masa m , radij R , višina h) okrog različnih težiščnih osi. Izberimo koordinatni sistem, v katerem se os z ujema z geometrijsko osjo valja, osi x in y pa sta pravokotni nanjo. Vztrajnostni moment za vrtenje okrog geometrijske osi je $J_z = mR^2/2$, za vrtenje okrog pravokotnih osi pa $J_x = J_y = mR^2/4 + mh^2/12$. Vztrajnostni moment kot tenzor (matriko 3×3) zapišemo v obliki

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}$$

V tem primeru so različni od nič samo diagonalni elementi matrike. Za nesimetrična telesa so v splošnem vsi elementi matrike različni od nič. Enačbo (9.32) zapišemo v splošnem

$$\vec{\Gamma} = \underline{J} \vec{\omega}$$

ali na dolgo

$$\begin{bmatrix} \Gamma_x \\ \Gamma_y \\ \Gamma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x \omega_x \\ J_y \omega_y \\ J_z \omega_z \end{bmatrix}.$$

Upoštevali smo, da se matrika množi z vektorjem na naslednji način: prvo vrstico matrike skalarno množimo z vektorjem na desni strani matrike in dobimo prvo komponento novega vektorja; za drugo ali tretjo komponento novega vektorja moramo pomnožiti drugo ali tretjo vrstico matrike z vektorjem na desni strani. V našem primeru je bilo to množenje preprosto, saj je v vsaki vrstici matrike samo po en neničelni element. Opazimo, da novi vektor ni vzporeden s starim.

Vzemimo zdaj valj s kvadratnim osnim prerezom, torej $h = 2R$. Komponente tenzorja \underline{J} so $J_x = J_y = 7mR^2/12$ in $J_z = mR^2/2 = 6mR^2/12$. Os vrtenja naj gre po diagonali osnega prereza v ravnini xz , zato so komponente hitrosti

$$\vec{\omega} = \left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\omega}{\sqrt{2}} \right).$$

Zdaj lahko z množenjem tenzorja \underline{J} in vektorja $\vec{\omega}$ izračunamo vrtilno količino

$$\vec{\Gamma} = \frac{mR^2 \omega}{12\sqrt{2}} (7, 0, 6).$$

Kotna hitrost in vrtilna količina oklepata kot

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega}}{\Gamma \omega} = 4,4^\circ.$$

Zdaj, ko smo omenili še uporabo matrik v fiziki, povejmo, da sodijo tako skalarji kot vektorji in matrike v splošnejše matematične strukture, ki jim pravimo **tenzorji**. Tenzorji imajo značilne lastnosti pri spremembah (transformacijah) koordinatnega sistema, na primer pri rotaciji koordinatnih osi okrog poljubne osi skozi izhodišče. Tu omenimo samo, da se skalarji, kot je npr. masa telesa, pri takšnih spremembah sami ne spremenijo (v grobem rečemo, da so skalarji neobčutljivi za spremembe smeri, zrcaljenja v prostoru itd.). Vektorji in matrike pa se pri transformaciji koordinatnega sistema spremenijo vsak na svoj način. Tenzorjem poleg dimenzije prostora (npr. 3D) pripišemo tudi red: skalarji so tenzorji reda nič, vektorji so tenzorji prvega reda, matrike pa drugega. V fiziki uporabljamo tudi tenzorje višjih redov, tretjega in četrtega. Pozor! Ne pomešajte dimenzije prostora z redom tenzorja. Na primer vektorji kot tenzorji prvega reda imajo toliko komponent, kolikor je dimenzija prostora (tudi abstraktnega), v katerem nastopajo.

Računski zglede 9.6.1 Pokažimo, da pomeni ohranitev ploščinske hitrosti nebesnega telesa pri gibanju po eliptičnem tiru okrog Sonca isto kot ohranitev njegove vrtilne količine glede na Sonce. Če je izsrednost tira $\varepsilon = 0,25$, kolikšno je razmerje med hitrostma telesa v periheliju (PH, ko je najbližje Soncu) in afeliju (AF, ko je najdlje od Sonca)? Kolikšno pa je to razmerje pri Halleyevemu kometu z $\varepsilon = 0,967$?

Podatka:

$$\varepsilon_1 = 0,25$$

$$\varepsilon_2 = 0,967$$

$$(v_{PH}/v_{AH})_1, (v_{PH}/v_{AH})_2 = ?$$

Kako vemo, da se tirna vrtilna količina ohranja? Gravitacijska sila Sonca na krožeče telo je centralna in kaže proti Soncu (izhodišču). Njen navor je $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Ker pa sta sila \vec{F} in ročica \vec{r} vzporedna vektorja, je njun vektorski produkt, in s tem navor, enak nič. Brez navora se vrtilna količina telesa ohranja po smeri in velikosti. Konstanta smer vrtilne količine pomeni, da je tir gibanja ravninski. Velikost vrtilne količine pa je

$$\Gamma = |\vec{m}\vec{r} \times \vec{v}| = mrv \sin \alpha.$$

Pri tem je α kot med vektorjema \vec{r} in \vec{v} . Ker je masa telesa m konstantna, je konstanten tudi produkt $rv \sin \alpha$. Po drugi strani si ploščinsko hitrost ponazorimo, če razrežemo celotno elipso na ozke trikotnike. Ploščinska hitrost je po definiciji

$$\mu = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \frac{rds \sin \alpha}{dt} = \frac{1}{2} rv \sin \alpha = \frac{\Gamma}{2m}$$

Pri vektorskem premiku telesa ds po tiru gibanja, ki v splošnem ni pravokoten na trenutni krajevni vektor telesa \vec{r} , smo vzeli projekcijo na smer, pravokotno na \vec{r} , če smo hoteli dobiti pravo ploščino trikotnika – od tod faktor $\sin \alpha$. Ker sta tako vrtilna količina kot masa konstantni, je konstantna tudi ploščinska hitrost.

Poglejmo zdaj legi v PH in AF. Glede na sliko (7.3) ti dve legi telesa ustrežata temenomoma na osi x , pri čemer je Sonce v gorišču, npr. G_1 . Vektorja \vec{r} in \vec{v} sta si v teh dveh legah pravokotna med seboj, zato se enačba za enakost ploščinske hitrosti v njih poenostavi in velja

$$r_{PH}v_{PH} = r_{AF}v_{AF}.$$

S slike razberemo tudi $r_{PH} = a - e$ in $r_{AF} = a + e$ in upoštevajmo $\varepsilon = e/a$. Dobimo

$$\frac{v_{PH}}{v_{AH}} = \frac{a+e}{a-e} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Ko vstavimo podatka, dobimo pri izsrednosti 0,25 razmerje hitrosti 1,67, pri Halleyevemu kometu pa je to razmerje skoraj 60. \square

Računski zgled 9.6.2 Zaradi različnih vzrokov, pretežno zaradi medsebojnega gravitacijskega vpliva Zemlje in Lune ter s tem povezanega plimovanja, se kotna hitrost vrtenja Zemlje postopoma zmanjšuje in dolžina dneva povečuje. S proučevanjem rasti koral so ugotovili, da je bil pred 370 milijoni let dan dolg samo 20,6 ure. Kolikšen je negativni navor, ki upočasnjuje rotacijo Zemlje? Privzamemo, da ima Zemlja homogeno gostoto.

Podatki:

$$m = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$R = 6400 \text{ km}$$

$$t = 3,7 \cdot 10^8 \text{ let}$$

$$t_{01} = 20,6 \text{ h}$$

$$t_{02} = 24 \text{ h}$$

$$M = ?$$

Po enačbi (9.16) je

$$M = J\alpha = \frac{2}{5}mR^2 \frac{\Delta\omega}{t} = \frac{2}{5}mR^2 \frac{2\pi\left(\frac{1}{t_{02}} - \frac{1}{t_{01}}\right)}{t} = 10^{17} \text{ Nm. } \square$$

Računski zgled 9.6.3 Palica z maso $m_1 = 1 \text{ kg}$ in dolžino $l = 30 \text{ cm}$ je vrtljivo vpeta okoli vodoravne osi, ki gre pravokotno skozi središče palice. Izstrelek z maso $m_2 = 10 \text{ g}$ in hitrostjo $v = 200 \text{ m/s}$ se zapiči v konec palice. Kolikšna je kotna hitrost palice tik po trku, če je v začetku mirovala?

Podatki:

$$m_1 = 1 \text{ kg}$$

$$l = 30 \text{ cm}$$

$$m_2 = 10 \text{ g}$$

$$v = 200 \text{ m/s}$$

$$\omega = ?$$

Izhodišče izberemo v vodoravni osi, okoli katere se palica vrti. Tako med trkom na sistem palice in izstrelka ne deluje noben zunanji navor. Deluje sicer sila, vendar je njena ročica enaka nič. Ker ni sunka zunanjih navorov, se vrtilna količina ohranja $\Gamma_k = \Gamma_z$. V začetku palica miruje in se giblje samo izstrelek. Čeprav se giblje v ravni črti, mu pripišemo vrtilno količino glede na izbrano os

$$\Gamma_z = m_2 \frac{l}{2} v.$$

Po trku se telesi sprimeta. To pomeni, da se začneta vrteti z enako kotno hitrostjo, njun vztrajnostni moment pa je vsota obeh prispevkov

$$\Gamma_k = (J_1 + J_2)\omega = \left(\frac{m_1 l^2}{12} + m_2 \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right) \omega.$$

Dobimo

$$m_2 \frac{l}{2} v = \left(\frac{m_1 l^2}{12} + m_2 \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right) \omega \rightarrow \omega = 38,8 \text{ s. } \square$$

Poskus 9.6.1 — Ohranitev vrtilne količine – človek z utežmi na vrtljivem stolu. Človek vzame v roke dve petkilogramski uteži in se usede na vrtljiv stol. Nekdo ga zavrti na stolu. Človek na stolu izmenoma izvaja odročanje z utežmi in pritegovanje rok k trupu. Ko ima uteži ob trupu, se vrti veliko hitreje kot takrat, ko ima iztegnjeni roki.



Vrtenje z utežmi na stolu

Poskus razložimo z ohranitvijo vrtilne količine med vrtenjem. Na telo ne deluje noben zunanji navor, zato se skupna vrtilna količina ohranja. Z oddaljenostjo uteži od telesa pa se spreminja skupni vztrajnostni moment trupa, rok in uteži. V obeh skrajnih legah uteži lahko zapišemo $J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2$, kjer sta J_1 in ω_1 vztrajnostni moment in kotna hitrost z rokama ob telesu, J_2 in ω_2 pa v odročanju. »Prostovoljec« na stolu na sliki ima maso okrog 60 kg, v vsaki roki pa utež po 5 kg. Ta oseba ima skupno dolžino iztegnjenih rok okrog 160 cm, obseg prsnega koša pa okrog 90 cm. Zanimarimo dodatno spremembo vztrajnostnega momenta samih rok v različnih legah in trup obravnavajmo kot valj. Zanimarimo še vztrajnostni moment uteži, ko so ob telesu. Potem ocenimo (bralec naj naredi račun sam), da je vztrajnostni moment obeh uteži v odročanju približno 10-krat večji od vztrajnostnega momenta telesa osebe! Torej je razmerje $J_2/J_1 \approx 11$. Enako je tudi razmerje kotnih hitrosti vrtenja na stolu, kar je oseba pri izmeničnem krčenju in raztezanju rok zelo čutila.

V zvezi s poskusom na vrtljivem stolu je poučna tudi primerjava rotacijskih kinetičnih energij. Ta primerjava je analogna primerjavi kinetičnih energij teles z različnima masama po odzivu v poglavju o gibalni količini. Razmerje kinetičnih energij v obeh položajih na vrtljivem stolu je

$$\frac{W_{k1}}{W_{k2}} = \frac{J_1 \omega_1^2 / 2}{J_2 \omega_2^2 / 2} = \frac{J_1 \omega_1^2}{J_2 (J_1 \omega_1 / J_2)^2} = \frac{J_2}{J_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (9.36)$$

Torej je večja kinetična energija v položaju s skrčenima rokama. Za povečanje naše kinetične energije, ko priročimo, moramo oddati delo $A = W_{k1} - W_{k2}$, dobimo pa ga iz svojih »notranjih zalog«, to je iz notranje energije mišic. Tako nas po tem sklepanju stane več napora priročanje kot odročanje, čeprav postane s časom tudi držanje 5-kilogramskih uteži v iztegnjenih rokah naporno.

9.7 Ravnovesje togega telesa

Oglejmo si še nekaj primerov ravnovesja togega telesa, t.i. statičnih problemov. Statika se je iz fizikalne veje razvila v pomembno aplikativno vedo, na primer v gradbeništvu in strojništvu.

Po drugem Newtonovem zakonu vemo, da telo miruje oziroma se giblje enakomerno, če je vsota sil, ki delujejo nanj, enaka nič. Ko smo obravnavali razsežna toga telesa, smo spoznali, da ta pogoj ni dovolj, saj lahko na telo deluje dvojica sil. Pogoj smo dopolnili, da težišče telesa miruje, če je vsota zunanjih sil nanj enaka nič. Zapisali smo tudi drugi Newtonov zakon za rotacijo, ki pravi, da se telo ne vrti oziroma se vrti enakomerno, če je vsota navorov, ki delujejo nanj, enaka nič. Združimo te ugotovitve.

Togo telo je v ravnovesju (torej se niti translacijsko niti rotacijsko ne pospešuje), kadar so v ravnovesju vse sile nanj, pa tudi njihovi navori.

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad (9.37)$$

in

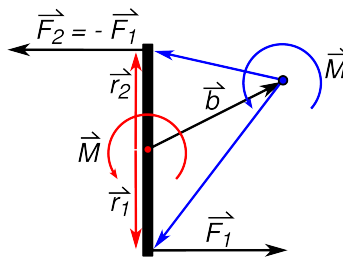
$$\sum_i \vec{M}_i = 0 \quad (9.38)$$

Ko računamo statične probleme, si lahko pri upoštevanju ravnovesja navorov **izberemo poljubno mirujočo os vrtenja**. Dokazali bomo namreč naslednjo trditev: če je vsota vseh sil na dano telo enaka nič, potem je vsota njihovih navorov neodvisna od izbire osi.

Pokažimo, da se vsota navorov (ko je vsota sil enaka nič) ne spremeni, če premaknemo os. Stara os naj bo npr. v izhodišču, nova os pa je za vektor \vec{b} premaknjena iz izhodišča. Tedaj je vsota navorov glede na novo os

$$\sum_i \vec{M}'_i = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{b}) \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \sum_i \vec{b} \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{M}_i. \quad (9.39)$$

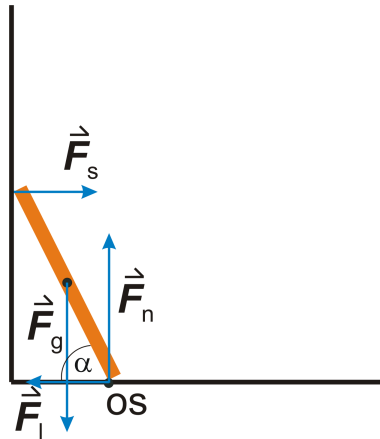
Člen z vektorjem \vec{b} je odpadel, ker je vsota sil enaka nič. Pokazali smo, da se vsota navorov s premikom osi res ni spremenila.



Slika 9.9: Navor dvojice sil je neodvisen od izbire osi vrtenja.

9.8 Zgledi za ravnovesje togega telesa

Računski zgleđ 9.8.1 Lestev s težo 150 N je prislonjena na steno in oklepa s tlemi kot 70° (slika 9.10). Izračunajmo vse sile, ki delujejo nanjo. Kolikšen mora biti koeficient lepenja med lestvijo in tlemi, da ne zdrsne? Vzamemo, da je stena spolzka in zanemarimo lepenje med njo in lestvijo.



Slika 9.10: Sile na lestev

Podatki:

$$F_g = 150 \text{ N}$$

$$\alpha = 70^\circ$$

$$F_n = ?$$

$$F_l = ?$$

$$F_s = ?$$

$$k_l = ?$$

Na lestev delujejo štiri sile: dve vodoravni in dve navpični. Vodoravni sili sta sila stene \vec{F}_s in sila lepenja \vec{F}_l , navpični pa teža \vec{F}_g in normalna sila tal \vec{F}_n . Normalno silo tal in silo lepenja lahko združimo v silo podlage, vendar je za reševanje problema nazornejše, če sta ti dve komponenti ločeni. Telo miruje in je v ravnovesju, zato je vsota sil nanj enaka nič. To zapišemo po komponentah

$$F_s = F_l \quad \text{in} \quad F_n = F_g = 150 \text{ N}.$$

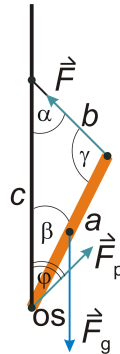
Navidezno os vrtenja si izberemo v točki, kjer se lestev dotika tal. S tem se (zaradi ročice, ki je enaka nič) znebimo navorov sil \vec{F}_n in \vec{F}_l . Ker je telo v ravnovesju, mora biti vsota navorov nanj enaka nič. To zapišemo

$$F_s L \sin \alpha = F_g \frac{L}{2} \cos \alpha \quad \rightarrow \quad F_s = \frac{\cot \alpha}{2} F_g = 27,3 \text{ N},$$

Z L smo označili dolžino lestve. Zdaj poznamo velikosti vseh sil na lestev, saj je $F_l = F_s$. Mejni koeficient lepenja pa je

$$k_l = \frac{F_l}{F_n} = \frac{27,3 \text{ N}}{150 \text{ N}} = 0,182. \quad \square$$

Računski zgleđ 9.8.2 Loputa z maso 800 kg je spodaj vrtljiva, njen zgornji konec pa vleče vrv (slika 9.11). S kolikšno silo je napeta vrv, če je loputa visoka 4 m, dolžina vrvi je 2 m, pritrjena pa je na steno na višini 5 m? Kolikšna je sila v osi vrtenja?



Slika 9.11: Sile na loputo

Podatki:

$$a = 4 \text{ m}$$

$$b = 2 \text{ m}$$

$$c = 5 \text{ m}$$

$$m = 800 \text{ kg}$$

$$F = ?$$

$$F_p = ?$$

Za os vrtenja izberemo os, okrog katere se loputa lahko vrti. Na loputo delujejo tri sile: sila teže \vec{F}_g , sila vrvi \vec{F} in sila \vec{F}_p v osi. Ob naši izbiri izhodišča je navor zadnje sile enak nič. Izenačimo velikosti navorov teže in sile vrvi

$$F a \sin \gamma = F_g \frac{a}{2} \sin \beta \quad \rightarrow \quad F = \frac{\sin \beta}{2 \sin \gamma} F_g = \frac{b}{2c} mg = 1570 \text{ N}.$$

Uporabili smo sinusni izrek, ki velja v poljubnem trikotniku $\sin \beta / \sin \gamma = b/c$.

Če hočemo izračunati še silo \vec{F}_p , najprej po kosinusnem izreku izračunamo kot α

$$\alpha = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 49,46^\circ.$$

Potem pa iz ravnovesja sil $\vec{F}_g + \vec{F} + \vec{F}_p = 0$ izračunamo obe komponenti iskane sile

$$F_{px} = F \sin \alpha = 1193 \text{ N}$$

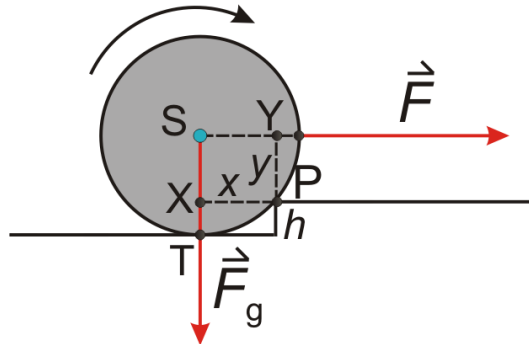
$$F_{py} = F_g - F \cos \alpha = 6828 \text{ N}.$$

Nazadnje izračunajmo še velikost te sile in njen kot glede na navpičnico

$$F_p = \sqrt{F_{px}^2 + F_{py}^2} = 6931 \text{ N} \quad \text{in} \quad \varphi = \arctan \frac{F_{py}}{F_{px}} = 9,91^\circ.$$

Ta kot v splošnem ni enak kotu β . To pomeni, da sila \vec{F}_p ne kaže vzdolž lopute. Izračun kota β je prepuščen bralcu v vajo. \square

Računski zgled 9.8.3 S kolikšno silo moramo potegniti kolo s polmerom 80 cm in težo 200 N, da ga potegnemo čez prag višine 20 cm? S silo delujemo v vodoravni smeri na višini središča kolesa (slika 9.12).



Slika 9.12: Poteg kolesa čez prag in sile (sila \vec{F}_p ni prikazana)

Podatki:

$$R = 80 \text{ cm}$$

$$h = 20 \text{ cm}$$

$$F_g = 200 \text{ N}$$

$$F = ?$$

Za navidezno os vrtenja je najbolj praktično vzeti stičišče kolesa s pragom P , okrog katerega se kolo zares zavrti. V trenutku potega sila tal v točki T izgine, tako da na kolo delujejo tri sile: sila teže \vec{F}_g , sila vlečenja \vec{F} in sila praga \vec{F}_p , s katero deluje prag na kolo v točki P . Z izbiro osi v točki P smo se znebili navora sile \vec{F}_p , saj je ročica od osi do prijemališča sile enaka nič. Navora drugih dveh sil izračunamo s pravokotnima ročicama $x = PX$ in $y = PY$ na sliki. Omenimo še praktični napotek: čeprav sili \vec{F}_g in \vec{F} ne prijemljeta v točkah X in Y , lahko pri izračunu navora sili poljubno premikamo po njunih nosilnih premicah do obeh točk (matematično to utemeljimo s sinusom vmesnega kota). Sila \vec{F}_g bo prijemala v X , \vec{F} pa v Y . Oba navora sta vektorja, kažeta pa v nasprotnih smereh pravokotno na ravnino slike. V ravnovesnem primeru izenačimo njuni velikosti

$$Fy = F_g x.$$

S slike lahko razberemo zvezo med x , y , R in h . Dobimo

$$F = \frac{x}{y} F_g = \frac{\sqrt{R^2 - (R-h)^2}}{R-h} F_g = 176 \text{ N}.$$

S tem podatkom lahko izračunamo tudi neznano silo praga, saj zaradi ravnovesja velja

$$\vec{F}_g + \vec{F} + \vec{F}_p = 0.$$

Rezultat je $\vec{F}_p = (-176 \text{ N}, 200 \text{ N})$, če usmerimo koordinatni osi x in y kot navadno. Na sliki sile \vec{F}_p zaradi preglednosti nismo narisali. Sila je usmerjena poševno levo navzgor. \square

10. Mehansko nihanje in valovanje

Spoznali bomo nihanje in valovanje. Obravnavali bomo mehanske pojave, dognane zakonitosti pa veljajo tudi za druge primere valovanj, na vseh področjih fizike. Zapisali bomo najosnovnejše enačbe valovanja, ki veljajo v splošnem za druga valovanja, zvok, svetlobo, potresne valove ... Svetlobo kot valovanje bomo podrobneje obravnavali v poglavju 19.

10.1 Sinusno nihanje

Nihanje pomeni ponavljajoče se (periodično) prehajanje telesa skozi stabilno ravnovesno lego. Poleg mehanskega nihanja (nihanja lege telesa) poznamo tudi nihanja drugih fizikalnih količin, npr. tlaka, električnega polja itd. Najpomembnejša kategorija so sinusna (harmonična) nihanja, čeprav so takšna nihanja največkrat samo približek resničnega gibanja. Enačbe za odmik, hitrost in pospešek pri sinusnem nihanju v odvisnosti od časa t so

$$x = x_0 \sin(\omega t + \delta) \quad (10.1)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = x_0 \omega \cos(\omega t + \delta) = v_0 \cos(\omega t + \delta) \quad (10.2)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -x_0 \omega^2 \sin(\omega t + \delta) = -a_0 \sin(\omega t + \delta). \quad (10.3)$$

Količine, ki nastopajo v gornjih enačbah, so

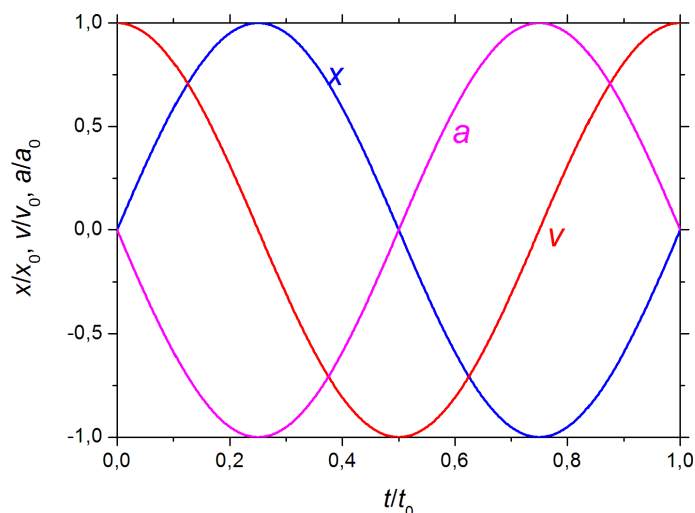
- x - trenutni odmik telesa od ravnovesne lege
- x_0 - največji odmik telesa od ravnovesne lege, amplituda nihanja
- ω - krožna frekvenca = $2\pi v = 2\pi/t_0$, kjer je v frekvenca, $t_0 = 1/v$ pa nihajni čas
- δ - dodatni fazni premik; fazni zamik $\pi/2$ spremeni sinusno v kosinusno funkcijo
- v_0 - največja hitrost telesa med nihanjem (to je pri odmiku $x = 0$)
- a_0 - največji pospešek telesa med nihanjem (to je pri odmiku x_0)

Izraz v oklepaju v enačbah (10.1) - (10.3) imenujemo faza $\phi = \omega t + \delta$. Faktor 2π , ki se pojavlja v nekaterih enačbah v zvezi s sinusnim nihanjem, je perioda sinusne in kosinusne funkcije. Poglejmo odmik x po enačbi (10.1) v dveh različnih časih, ki se razlikujeta ravno za t_0 (ali v splošnem za mnogokratnik t_0). Naj bo $t_2 = t_1 + t_0$. Ustrezna odmika sta

$$x_1 = x_0 \sin(2\pi t_1/t_0) \quad (10.4)$$

$$x_2 = x_0 \sin(2\pi t_2/t_0) = x_0 \sin(2\pi(t_1 + t_0)/t_0) = x_0 \sin(2\pi t_1/t_0) = x_1. \quad (10.5)$$

Odmika sta torej enaka, s čemer smo pokazali, da je nihajni čas t_0 zares časovna perioda nihanja.



Slika 10.1: Časovna odvisnost normirane lege, normirane hitrosti in normiranega pospeška pri sinusnem nihanju. Narisana je ena perioda nihanja.

Iz enačb (10.1) in (10.3) dobimo še pomembno direktno zvezo med pospeškom in odmikom

$$a = -\omega^2 x. \quad (10.6)$$

Pri sinusnem nihanju je pospešek sorazmeren odmiku. Sorazmernostni koeficient je $-\omega^2$. Pomnožimo enačbo (10.6) z maso

$$ma = F = -m\omega^2 x. \quad (10.7)$$

Iz gornje enačbe lahko razberemo pogoj, kdaj do nihanja sploh pride. **Če je sila, ki deluje na neko telo, premo sorazmerna z odmikom telesa od ravnovesne lege, kaže pa v nasprotni smeri kot odmik (torej nazaj proti ravnovesni legi), potem telo sinusno niha.** Sorazmernostni koeficient med pospeškom in negativno vrednostjo odmika je vedno ω^2 . Če znamo torej zapisati naš sistem z enačbo, kjer sta pospešek in odmik povezana kot v enačbi (10.6), lahko iz enačbe direktno razberemo krožno hitrost ω . Nekaj poučnih zgledov bomo podrobneje spoznali v naslednjem razdelku.

★ Spomnimo se, da je pospešek drugi odvod lege po času. Enačbo (10.6) potem prepisemo v navadno linearno diferencialno enačbo drugega reda in jo zapišemo kot

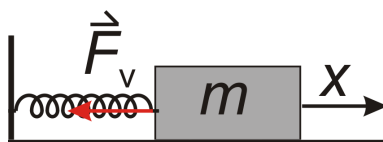
$$\ddot{x} = -\omega^2 x. \quad (10.8)$$

Še nekaj besed o diferencialnih enačbah. Diferencialna enačba je enačba, v kateri nastopa vsaj en odvod količine (lahko je prvi, drugi ali višji odvod). Enačba (10.8) je navadna diferencialna enačba, ker vključuje funkcijo x z eno samo neodvisno premenljivko t , rešitev pa je oblike $x(t)$. Označba linearna pomeni, da tako funkcija kot njeni odvodi nastopajo v enačbi v prvi potenci. Red diferencialne enačbe je določen z najvišjim odvodom, ki še nastopa v enačbi. Ker v našem primeru nastopa drugi odvod, je to diferencialna enačba drugega reda. V splošnem je reševanje diferencialnih enačb zelo zapleteno. Preprostejše enačbe pogosto rešujemo tako, da rešitev »uganemo«. Zapišemo jo v splošni obliki, nato pa nastavek vstavimo v enačbo in preverimo, ali res reši začetno enačbo. Določene enačbe imajo za rešitve posebne funkcije, v vsakem primeru pa reševanje diferencialnih enačb zahteva veliko matematičnega znanja.

10.2 Nekaj značilnih nihalo

Vzmetno nihalo

Obravnavajmo vodoravno vzmetno nihalo, pri katerem telo leži na gladkih tleh in je z vijačno vzmetjo pripeto na navpično steno (slika 10.2).



Slika 10.2: Vodoravno vzmetno nihalo

Privzamemo, da trenja med telesom in tlemi ni, oziroma je zanemarljivo majhno. Sila teže in sila podlage sta uravnovešeni in edina sila, ki jo moramo upoštevati pri gibanju, je sila vzmeti. Za prožno vzmet velja, da je **sila, s katero vzmet vleče ali potiska telo v ravnovesno lego, premo sorazmerna z raztežkom vzmeti**

$$F_v = -kx, \quad (10.9)$$

pri čemer je x raztezek iz ravnovesne lege, k pa koeficient vzmeti. Negativni predznak pomeni, da kaže sila vzmeti v nasprotno smer kot raztezek oziroma odmik telesa iz ravnovesne lege. Po drugem Newtonovem zakonu dobimo

$$ma = -kx \quad \rightarrow \quad a = -\frac{k}{m}x. \quad (10.10)$$

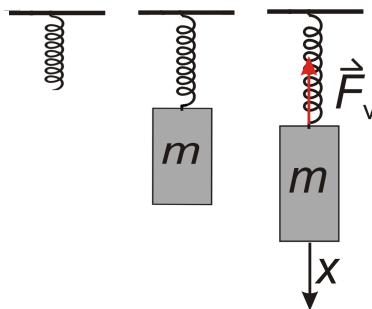
To se ujema z enačbo (10.6) za sinusno nihanje. Iz tega sledi, da vzmetno nihalo res sinusno niha, iz enačbe pa lahko tudi razberemo tudi krožno frekvenco nihanja

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (10.11)$$

Nihajni čas takega nihala je

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (10.12)$$

Bralec naj za vajo pokaže, da sta v primeru navpičnega nihanja, kjer utež visi na vzmeti, krožna frekvenca in nihajni čas enaka kot za vodoravno nihanje.



Slika 10.3: Navpično vzmetno nihalo. V ravnovesni legi je vzmet že raztegnjena.

Računski zgleđ 10.2.1 Vzmetno nihalo naredi v času ene minute 15 nihajev. Masa uteži je 200 g. Kolikšen je koeficient vzmeti?

Podatki:

$$t = 60 \text{ s}$$

$$N = 15$$

$$m = 200 \text{ g}$$

$$k = ?$$

Nihajni čas je $t_0 = t/N = 4 \text{ s}$. Iz enačbe (10.12) izračunamo koeficient vzmeti

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{t_0^2} = 0,49 \text{ N/m. } \square$$

Povejmo še, da je nihanje vzmetnega nihala način merjenja mase astronautov v vesoljski postaji v breztežnem stanju, kjer seveda navadna tehtnica na osnovi sile teže ne deluje. Nosilec (sedež) z znano maso je z vzmetmi pritrjen npr. na steno vesoljskega plovila, tako da po enačbi (10.12) zaniha z značilnim nihajnim časom. Ko se nanj usede astronaut, se zaradi povečane skupne mase poveča tudi nihajni čas. Iz razmerja obeh nihajnih časov lahko izračunamo maso astronauta.

Nihalo na polžasto vzmet

Nihalo na polžasto vzmet je sučno nihalo. Vzemimo vodoravno postavljeno polžasto vzmet, os vrtenja pa je navpična. Pri sučnem nihalu moramo paziti, da ne zamenjamo krožne frekvence s kotno hitrostjo, zato bomo za krožno frekvenco raje uporabili simbol Ω , za kotno hitrost pa ω kot doslej. Nihalo naj ima za vrtenje okoli izbrane osi vztrajnostni moment J . Za polžasto vzmet velja podobna enačba kot za vijáčno vzmet, le da pri njej računamo z navorom vzmeti. **Navor polžaste vzmeti je sorazmeren zasuku iz ravnovesne lege**

$$M = -D\varphi. \tag{10.13}$$

Kot φ (ne pozabimo, da je merjen v radianih!) pomeni zasuk vzmeti in hkrati sučni odmik telesa iz ravnovesne lege. Sorazmernostni koeficient D je koeficient vzmeti in ima enoto N m, enako kot navor. Ker gre za sukanje nihala okrog navpične osi, navor sile teže pri nihanju nima nobene vloge in računamo le z navorom vzmeti. Zapišemo drugi Newtonov zakon za rotacijo (enačba 9.16) in dobimo

$$M = J\alpha = -D\varphi \rightarrow \alpha = -\frac{D}{J}\varphi = -\Omega^2\varphi. \tag{10.14}$$

Gornja enačba je enačba za nihanje, pri čemer imamo namesto odmika x kot φ . Razberemo lahko krožno frekvenco

$$\Omega = \sqrt{\frac{D}{J}} \tag{10.15}$$

in nihajni čas

$$t_0 = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}. \tag{10.16}$$

Računski zgled 10.2.2 Pri nihalu na polžasto vzmet moramo na vzmet delovati z navorom 40 N cm, da se zasuka za polni kot. Vztrajnik je valj z maso 0,2 kg in polmerom 8 cm. Nihalo zanihamo s kotno amplitudo 30° . Kolikšna je kotna hitrost nihala pri prehodu skozi ravnovesno lego?

Podatki:

$$M_1 = 40 \text{ N cm}$$

$$\varphi_1 = 2\pi$$

$$\varphi_0 = \pi/6$$

$$R = 8 \text{ cm}$$

$$m = 0,2 \text{ kg}$$

$$\omega_0 = ?$$

Izračunamo koeficient vzmeti

$$D = \frac{M_1}{\varphi_1} = 6,4 \text{ N cm}$$

in vztrajnostni moment valja, ki se vrti okoli svoje geometrijske osi

$$J = \frac{1}{2}mR^2 = 6,4 \text{ kg cm}^2.$$

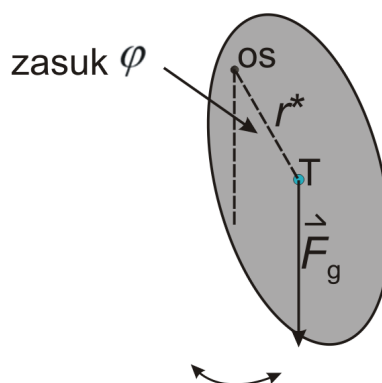
Krožna frekvenca je potem

$$\Omega = \sqrt{\frac{D}{J}} = 10 \text{ s}^{-1}.$$

Enačbe za sukanje so analogne enačbam za premik, če nadomestimo $x \leftrightarrow \varphi$, $v \leftrightarrow \omega$ in $a \leftrightarrow \alpha$. Enačba za amplitudo hitrosti se prevede v enačbo za amplitudo kotne hitrosti $v_0 = \omega x_0 \leftrightarrow \omega_0 = \Omega \varphi_0$. Izračunamo $\omega_0 = 5,22 \text{ s}^{-1}$. \square

Fizično nihalo

Pri fizičnem nihalu niha razsežno togo telo okoli vodoravne osi. Ko tako obešeno telo miruje, je njegovo težišče natančno pod osjo vrtenja (nihanja). Ko pa telo odmaknemo iz ravnovesne lege in ga spustimo, začne telo nihati zaradi navora sile teže. Zanihalo bo v navpični ravnini (slika 10.4). Naj ima nihalo glede na dano os vztrajnostni moment J . Navor sile teže pri zasuku za φ iz ravnovesne lege je $M = -mgr^* \sin \varphi$ (enačba 9.14). Simbol r^* pomeni razdaljo med osjo in težiščem nihala. Predznak minus pove, da deluje ob zasuku nihala v eno smer navor teže v nasprotno. Navor sile teže želi telo vrniti v ravnovesno lego.



Slika 10.4: Fizično nihalo

Po drugem Newtonovem zakonu za rotacijo dobimo

$$M = J\alpha = -mgr^* \sin \varphi. \quad (10.17)$$

Vidimo, da za velike odmike φ tako nihanje ni sinusno, saj zapis enačbe ne ustreza obliki enačbe nihanja (10.6). Za majhne kote (do $\sim 10^\circ$ ali celo do $\sim 30^\circ$, če se zadovoljimo z malo slabšo natančnostjo rezultata) velja približno $\sin \varphi \approx \varphi$. Dobimo

$$J\alpha = -mgr^* \varphi \quad \rightarrow \quad \alpha = -\frac{mgr^*}{J} \varphi. \quad (10.18)$$

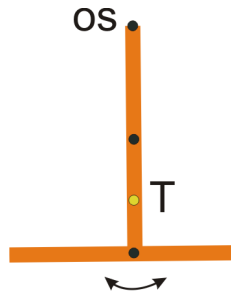
Dobili smo znano obliko enačbe, iz katere lahko razberemo krožno frekvenco nihanja

$$\Omega = \sqrt{\frac{mgr^*}{J}} \quad (10.19)$$

in nihajni čas

$$t_0 = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgr^*}}. \quad (10.20)$$

Računski zglede 10.2.3 Fizično nihalo sestavimo iz dveh enakih tankih palic dolžine L , tako da ju spojimo v črko T in obrnemo z vodoravno stranico navzdol (slika 10.5). Os vrtenja je na zgornjem koncu zgornje palice. Kolikšen je nihajni čas takega nihala?



Slika 10.5: Fizično nihalo v obliki črke T

Najprej izračunamo lego masnega središča sestava palic po enačbi (9.1). Zaradi simetrije vidimo, da je masno središče nekje na navpični palici. Zapišimo legi težišč posameznih palic glede na vrtilno os z $y_1 = L/2$ in $y_2 = L$. Lego težišča $r^* = y^*$ izračunamo

$$r^* = \frac{my_1 + my_2}{2m} = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} + L \right) = \frac{3}{4}L.$$

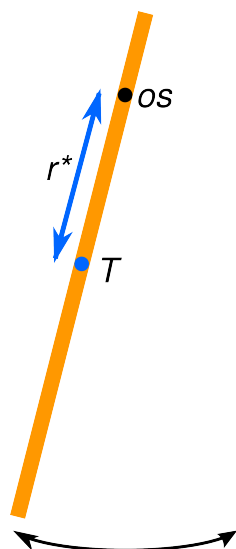
Vztrajnostni moment nihala je vsota vztrajnostnih momentov obeh palic, pri tem pa moramo pri obeh upoštevati Steinerjev izrek, da dobimo vztrajnostni moment okoli osi vrtenja

$$J = 2J^* + my_1^2 + my_2^2 = 2 \frac{1}{12} mL^2 + m \left(\frac{L}{2} \right)^2 + mL^2 = \frac{17}{12} mL^2.$$

Nihajni čas je tako

$$t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgr^*}} = 2\pi \sqrt{\frac{17L}{9g}}. \quad \square$$

Poskus 10.2.1 — Nihanje fizičnega nihala - palice. Tanko palico uporabimo kot fizično nihalo in spreminjamo lego osi vrtenja. Razdaljo med osjo vrtenja in težiščem označimo z r^* .



Palica - fizično nihalo za poljubno lego osi vrtenja

Nihajni čas palice t_0 je odvisen od spremenljivke r^* . Mi smo uporabili palico dolžine $L = 110$ cm, ki je imela dve luknjici, skozi kateri smo ju lahko vpeli in vrteli. Prva os vrtenja je bila tako na njenem koncu ($r^* = L/2$), druga pa 30 cm od konca ($r^* = 25$ cm). Z merjenjem časa za 10 nihajev smo določili nihajna časa 1,7 s in 1,6 s.

Poglejmo, kaj da račun. Naloga je podobna kot pri računskem zgledu (10.2.3). Vztrajnostni moment palice za izbrano os je

$$J = m \left(\frac{L^2}{12} + r^{*2} \right).$$

Nihajni čas je potem

$$t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgr^*}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \left(r^* + \frac{L^2}{12r^*} \right)}.$$

Pri $r^* = L/2$ je $t_0 = 1,72$ s, pri $r^* = 25$ cm pa dobimo $t_0 = 1,62$ s, torej v skladu z izmerjenima časoma.

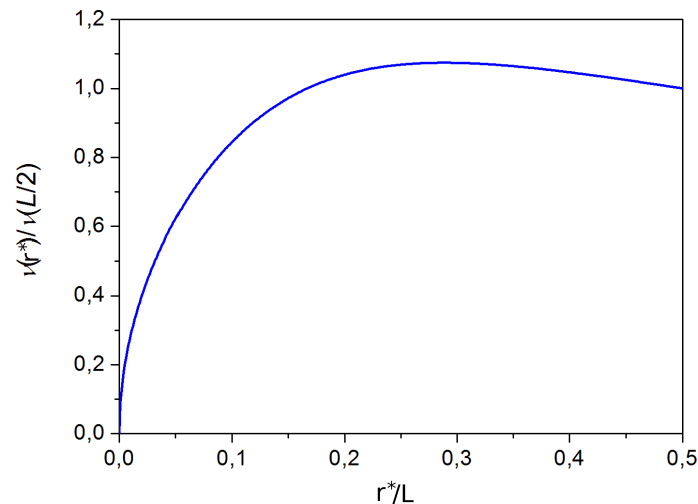
Opazimo, da ima nihajni čas pri neki vrednosti razdalje r^* minimum. Izračunajmo ga! Ker je korenska funkcija monotono naraščajoča, ni treba minimizirati celotnega izraza za t_0 , ampak zadošča poiskati minimum funkcije $y(r^*) = r^* + L^2/(12r^*)$. Odvajajmo

$$\frac{dy}{dr^*} = 1 - \frac{L^2}{12r^{*2}} = 0 \quad \rightarrow \quad r_{\min}^* = \frac{L}{\sqrt{12}} \approx 0,29 L.$$

Pri dolžini palice $L = 110$ cm je $r_{\min}^* = 32$ cm. Minimalni nihajni čas je

$$t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g\sqrt{3}}}.$$

Pri dolžini $L = 110$ cm je to 1,60 s. Očitno minimum $t_0(r^*)$ ni posebno izrazit. Za boljšo predstavo narišimo še (brezdimenzijsko) odvisnost frekvence $\nu = 1/t_0$ od lege osi r^* .



Frekvence nihanja palice kot funkcija razdalje r^* . Frekvence je normalizirana glede na frekvenco pri $r^* = L/2$, to je takrat, ko obesimo palico za njeno krajišče. Razviden je vrh frekvence (minimum nihajnega časa) pri $r^*/L \approx 0,29$.

Če vrnemo palico v težišču ($r^* = 0$), je frekvence enaka nič. Nato narašča do neke največje vrednosti, potem pa se ponovno zmanjšuje. Frekvence je največja v točki, kjer je nihajni čas najkrajši. Razberemo tudi, da frekvence kot funkcija odseka r^* ni bijektivna funkcija: pri dveh različnih vrednostih r^* niha palica z enakim nihajnim časom.

Matematično nihalo

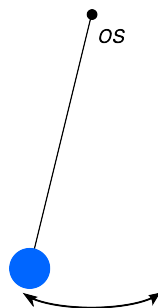
Matematično nihalo je poseben primer fizičnega nihala. Pri fizičnem nihalu niha razsežno telo s porazdeljeno maso, **pri matematičnem nihalu pa je vsa masa zbrana v majhni uteži, ki je obešena za lahko vrstico z dolžino L** . Rečemo lahko, da pri matematičnem nihalu niha točkasto telo. Ker je vsa masa zbrana v eni točki, je $r^* = L$. Za vztrajnostni moment vzamemo vztrajnostni moment točkastega telesa $J = mL^2$. Krožna frekvence matematičnega nihala je

$$\Omega = \sqrt{\frac{mgr^*}{J}} = \sqrt{\frac{mgL}{mL^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (10.21)$$

in nihajni čas

$$t_0 = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (10.22)$$

Lahko pa se obravnave nitnega nihala za majhne odmike lotimo neodvisno od splošnejšega fizičnega nihala. Sili, ki delujeta na visečo nihajočo utež, sta sila teže in sila vrvice. Bralec naj za vajo sam nariše ustrezno skico. Pomembno je, da pravilno nariše vsoto obeh sil, ki je pravokotna



Slika 10.6: Matematično nihalo

na silo vrvice. Z računom naj pokaže, da je vodoravna komponenta vsote sil enaka

$$F_x = -mg \sin \varphi \approx -mgx/L \quad \rightarrow \quad a_x = -g \frac{x}{L}, \quad (10.23)$$

kar ustreza diferencialni enačbi za nihanje. Razberemo

$$\Omega = \sqrt{g/L}. \quad (10.24)$$

Računski zgled 10.2.4 Za koliko odstotkov se poveča nihajni čas nitnega nihala, če se njegova dolžina poveča za 1 %?

Podatek:

$$\Delta L/L = 1 \%$$

$$\Delta t_0/t_0 = ?$$

Ta zgled je lep primer uporabe diferenciala pri približnem izračunu majhnih sprememb fizikalnih količin. Za funkcijsko zvezo $y(x)$, velja $dy = y'(x)dx$, pri čemer $'$ označuje odvod po spremenljivki x . Pri realnih fizikalnih problemih spremembe spremenljivk niso neskončno majhne (kot v matematični limiti), a navadno zadošča natančnost približka $\Delta y \approx y'(x)\Delta x$. Oglejmo si splošen primer, ko je zveza med fizikalnima količinama x in y potenčna $y = kx^n$, kjer je n poljuben eksponent. Majhna relativna sprememba odvisne spremenljivke je

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{y' \Delta x}{y} = \frac{knx^{n-1} \Delta x}{kx^n} = n \frac{\Delta x}{x}.$$

Prišli smo do pomembnega rezultata: sorazmernostni faktor med relativnima spremembama dveh spremenljivk je kar eksponent n .

V našem primeru poistovetimo $x \leftrightarrow L, y \leftrightarrow t_0$, n pa razberemo iz enačbe (10.22) in dobimo $n = 1/2$. Relativna sprememba nihajnega časa je torej $1 \% \cdot 1/2 = 0,5 \%$.

Seveda pa lahko to spremembo tudi točno izračunamo

$$\frac{\Delta t_0}{t_0} = \frac{2\pi \sqrt{(L+0,01L)/g}}{2\pi \sqrt{L/g}} = \frac{\sqrt{1,01}}{1} = 0,4988 \%$$

Pri približnem izračunu smo torej »zagrešili« le majhno napako. So pa takšni približni računi z uporabo diferencialov navadno zelo nazorni in preprostejši kot natančni izračuni. Podobno bi npr. izračunali, za koliko se poveča nihajni čas nitnega nihala, če gremo z njim na višino 10 km, kjer se težni pospešek nekoliko zmanjša. Uporabili bi diferencial dvakrat zaporedoma na enačbah (7.24) in (10.22). □

10.3 Mehanska energija nedušenih nihal

Vzmetno nihalo

Vzemimo vodoravno vzmet, na katero je pritrjeno telo z maso m (slika 10.2), in pogledjmo, kaj se med nihanjem dogaja z energijo. Nastopali bosta dve energiji: kinetična zaradi gibanja telesa in prožnostna zaradi krčenja in raztezanja vzmeti. O prožnostni energiji še nismo govorili, zato si jo zdaj natančneje oglejmo. **Prožnostna energija je enaka delu, ki ga opravi sila vzmeti pri raztezanju iz neraztegnjene lege pri $x = 0$ do lege z raztezkom x .** Izpeljimo jo:

$$W_{pr} = A = \int_0^x \vec{F} \cdot d\vec{x} = - \int_0^x F dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2. \quad (10.25)$$

Pri tem smo upoštevali, da kaže sila v nasprotno smer kot raztezek. **Prožnostna energija vzmeti je torej sorazmerna kvadratu raztezka**

$$W_{pr} = \frac{1}{2} kx^2. \quad (10.26)$$

Celotna energija pri nihanju je vsota kinetične in prožnostne energije. Pri danem odmiku $x = x_0 \sin(\omega t)$ in hitrosti $v = x_0 \omega \cos(\omega t)$ sta energiji

$$W_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mx_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) \quad \text{in} \quad W_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kx_0^2 \sin^2(\omega t). \quad (10.27)$$

Upoštevajmo, da je $\omega^2 = k/m$, in zapišemo celotno energijo

$$W_k + W_p = \frac{1}{2} mx_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} kx_0^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} kx_0^2 = \frac{1}{2} mx_0^2 \omega^2. \quad (10.28)$$

Ugotovili smo, da je vsota kinetične in prožnostne energije konstantna, **energija se pri nihanju torej ohranja**. Skupno energijo lahko izrazimo kot največjo prožnostno energijo. Takrat je nihalo v eni od obeh skrajnih leg in kinetična energija je enaka nič. Lahko pa skupno energijo zapišemo kot največjo kinetično energijo. Takrat gre nihalo skozi ravnovesno lego, kjer je vzmet nenapeta in prožnostna energija enaka nič.

Med nihanjem se kinetična energija pretvarja v prožnostno in nazaj. Dodajmo še, da ohranitev energije seveda velja za primer, ko med telesom in podlago ni trenja. Sicer bi delo sile trenja počasi zmanjševalo skupno energijo nihala in nihalo bi se postopoma ustavljalo.

Nihalo na polžasto vzmet

Ko nihalo na polžasto vzmet niha, se kinetična energija pretvarja v prožnostno in nazaj. Celotna energija se tudi v tem primeru ohranja. Po analogiji z vijačno vzmetjo ($x \leftrightarrow \varphi$ in $k \leftrightarrow D$) in vrtenjem ($m \leftrightarrow J$ in $v \leftrightarrow \omega$) zapišemo kinetično (rotacijsko) in prožnostno energijo pri odmiku $\varphi = \varphi_0 \sin(\Omega t)$ in hitrosti $\omega = \varphi_0 \Omega \cos(\Omega t)$

$$W_k = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} J \varphi_0^2 \Omega^2 \cos^2(\Omega t) \quad (10.29)$$

in

$$W_p = \frac{1}{2} D \varphi^2 = \frac{1}{2} D \varphi_0^2 \sin^2(\Omega t). \quad (10.30)$$

Zapišimo njuno vsoto in upoštevajmo, da je $\Omega^2 = D/J$

$$W_k + W_p = \frac{1}{2}J\varphi_0^2\Omega^2 \cos^2(\Omega t) + \frac{1}{2}D\varphi_0^2 \sin^2(\Omega t) = \frac{1}{2}D\varphi_0^2 = \frac{1}{2}J\varphi_0^2\Omega^2. \quad (10.31)$$

Energija se torej ohranja in tudi tu gre za ponavljajočo se pretvorbo od največje prožnostne energije v največjo kinetično energijo in nazaj.

Fizično in matematično nihalo

Zaradi podobnosti z ostalimi sinusnimi nihali sklepamo, da se tudi v tem primeru energija ohranja. Namesto prožnostne energije tu nastopa potencialna energija, saj je sila teže tista, ki telo vrača v ravnovesno lego. Pri zapisu potencialne energije je pomembna razlika višin težišča nihala. Naj bo v najnižji legi (mirovni legi) potencialna energija enaka nič. Bralec naj si za vajo sam nariše skico in pokaže, da pri odmiku φ velja

$$W_p = mgh = mgr^*(1 - \cos \varphi) \quad (10.32)$$

$$= mgr^*(1 - \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}) \quad (10.33)$$

$$\approx mgr^*(1 - \sqrt{1 - \varphi^2}) \quad (10.34)$$

$$\approx mgr^*(1 - (1 - \frac{\varphi^2}{2})) = \frac{1}{2}mgr^*\varphi^2. \quad (10.35)$$

Pri tem smo uporabili dva približka za majhne kote ($\varphi \ll 1$, merjeno v radianih!). Prvega že poznamo $\sin \varphi \approx \varphi$, drugi pa je poenostavitev korena $\sqrt{1 - \varphi^2} \approx 1 - \varphi^2/2$. Oba približka dobimo z upoštevanjem vodilnih členov v razvoju v Taylorjevo vrsto¹, bralec pa se lahko o obeh približkih tudi sam prepriča z računalnikom.

Od tu naprej je izpeljava podobna kot pri nihalu na polžasto vzmet. Potencialni energiji prištejemo kinetično in dobimo

$$W_k + W_p = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mgr^*\varphi^2 = \frac{1}{2}J\varphi_0^2\Omega^2 \cos^2(\Omega t) + \frac{1}{2}mgr^*\varphi_0^2 \sin^2(\Omega t) = \frac{1}{2}mgr^*\varphi_0^2 = \frac{1}{2}J\varphi_0^2\Omega^2. \quad (10.36)$$

Nazadnje smo upoštevali $\Omega^2 = mgr^*/J$. **Pri fizičnem in matematičnem nihalu se kinetična in potencialna energija ves čas pretvarjata druga v drugo, njuna vsota pa je konstantna.**

★ Obravnavani primeri so seveda idealizirani. V resnici vedno nastopa nekaj trenja ali upora, ki deluje na nihajoče telo. Delo sile trenja ali upora zmanjšuje celoto energijo sistema in nihanje sčasoma zamre. Pravimo, da je tako nihanje dušeno. V osnovnem približku so sile dušenja sorazmerne s hitrostjo nihanja. Takrat lahko zapišemo enačbo za odmik nihala

$$x = x_0 \sin(\omega t) \exp(-\frac{\beta}{2}t).$$

Vidimo, da telo še vedno niha, le amplituda se zmanjšuje eksponentno s časom. Če je $\beta = 0$ in dušenja ni, dobimo znano enačbo za nihanje. Skladno z amplitudo nihanja se zmanjšuje tudi celotna energija nihala

$$W = W_0 \exp(-\beta t).$$

Pri energiji je eksponent dvakrat večji, saj je energija sorazmerna kvadratu amplitude.

¹Wikipedija

10.4 Valovanje

Valovanje je širjenje periodične motnje po prostoru. Omejimo se na obravnavo mehanskega valovanja, ki je v bistvu sklopljen sistem neskončne množice drobnih nihaj, tipično delcev snovi. Pri tem moramo ločiti gibanje delcev snovi od širjenja motnje. **Če nihajo delci pravokotno na smer širjenja motnje, imenujemo valovanje prečno (transverzalno).** Če pa je nihanje v smeri širjenja valovanja, je tako valovanje vzdolžno (longitudinalno).

Oglejmo si primer nihanja napete vrvi. S periodičnim premikanjem enega konca v vrvi vzbudimo valovanje - odmikanje delcev vrvi od ravnovesne lege. Za opazovano fizikalno količino torej vzemimo kar odmik y . Pri nihanju vrvi gre za prečno (transverzalno) potujoče valovanje, saj so odmiki y pravokotni na smer potovanja valovanja (ta smer naj bo x). Nihanja posameznih točk so med seboj fazno premaknjena, fazni premik pa je sorazmeren s koordinato x . Val, ki potuje v smeri pozitivne osi x , zapišemo

$$y(x, t) = y_0 \sin(\omega t - kx + \delta). \quad (10.37)$$

Pri valovanju je odmik y funkcija dveh spremenljivk, koordinate x in časa t . Izraz v oklepaju imenujemo faza, tako kot pri nihanju. Pri valovanju v smeri negativne osi x bi v oklepaju samo zamenjali predznak minus s plusom (obrnili bi predznak pri koordinati x). Tako kot pri nihanju je y_0 amplituda, $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/t_0$ krožna frekvenca, δ pa dodatni fazni premik. Vpeljali smo **valovni vektor** k z enoto m^{-1}

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (10.38)$$

pri čemer je λ valovna dolžina valovanja. Enačbo (10.37) lahko izpišemo

$$y(x, t) = y_0 \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{t_0} - \frac{x}{\lambda}\right) + \delta\right). \quad (10.39)$$

Iz zadnje enačbe je lepo razvidna dvojna periodičnost valovanja: točka, ki je glede na neko drugo točko premaknjena ravno za valovno dolžino λ , je pri nihanju časovno zakasnjena za en nihajni čas t_0 . Takšni točki imata zaradi časovne periodičnosti v vsakem trenutku enak odmik y .

Izpeljimo še valovno hitrost c - to je hitrost širjenja motnje. Vzemimo $\delta = 0$ in glejmo točko T_1 pri $x = 0$ in času $t = 0$. Tedaj je $y(0, 0) = 0$. Vzemimo še točko T_2 desno od T_1 , ki naj bo premaknjena za x . Naj ima točka T_2 enako fazo kot T_1 in s tem tudi enak odmik. Da je ta pogoj lahko izpolnjen, mora biti čas t pri drugi točki večji od nič. Ničelni odmik točke T_1 je v času t ravno pripotoval do točke T_2 . Da se fazi v obeh točkah ujemata, mora biti vrednost v oklepaju v enačbi (10.39) enaka nič. Sledi

$$\frac{t}{t_0} = \frac{x}{\lambda} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{t} = \frac{\lambda}{t_0}. \quad (10.40)$$

Razmerje x/t pa je ravno hitrost valovanja. Sledi, da je **hitrost potovanja motnje oziroma hitrost valovanja enaka produktu valovne dolžine in frekvence**

$$c = \frac{\lambda}{t_0} = \lambda \nu. \quad (10.41)$$

Enačba (10.41) velja v splošnem, ne samo za mehansko potujoče valovanje. Velja tudi npr. za svetlobo kot elektromagnetno valovanje. Hitrost potovanja elektromagnetnega valovanja (svetlobe) v praznem prostoru je $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Vidna svetloba z valovno dolžino $\lambda = 600$ nm ima tako frekvenco

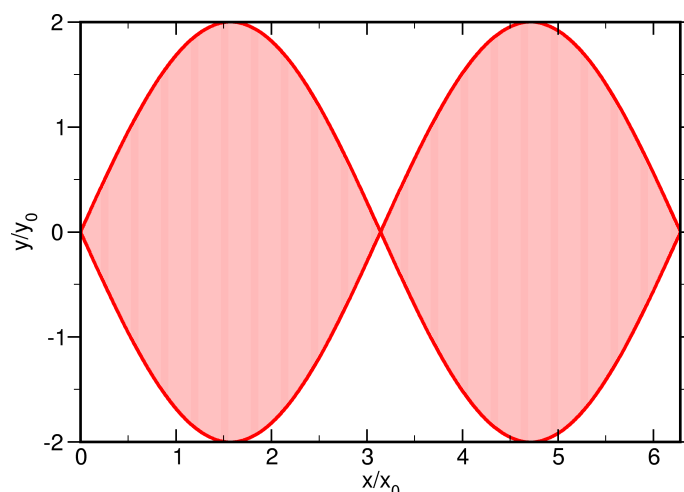
$$v = c/\lambda = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz.} \quad (10.42)$$

Zanimiv pojav lahko opazimo, če združimo dve valovanji, ki potujeta v nasprotnih smereh. Sestavimo dva vala, ki ju opišemo z enačbo (10.37), z enako amplitudo, frekvenco in valovnim vektorjem (valovno dolžino), a nasprotno smerjo

$$y(x, t) = y_0 \sin(\omega t - kx) + y_0 \sin(\omega t + kx) \quad (10.43)$$

$$= y_0 \left(\sin(\omega t) \cos(kx) - \cos(\omega t) \sin(kx) + \sin(\omega t) \cos(kx) + \cos(\omega t) \sin(kx) \right) \quad (10.44)$$

$$= 2y_0 \sin(\omega t) \cos(kx). \quad (10.45)$$



Slika 10.7: Stoječe valovanje na vrvi. Črtkano območje označuje vse lege, ki jih vrv zavzame. Nekateri deli sploh ne nihajo, drugi pa nihajo z dvojno amplitudo prvotnega vala.

Tako valovanje ne potuje, zato mu rečemo stoječe valovanje. Stoječe valovanje se bistveno razlikuje od potujočega valovanja v dveh stvareh. **Različne točke nihajo pri stoječem valovanju z različnimi amplitudami.** Njihove amplitude so podane s kosinusnim faktorjem $\cos(kx)$. To pomeni, da nekatere točke (kjer je $\cos(kx) = 0$) sploh ne nihajo. Takim točkam rečemo vozli stoječega valovanja. Po drugi strani pa nekatere točke nihajo z dvakratno amplitudo prvotnega valovanja. Takim točkam pravimo hrbti valovanja (slika 10.7). Druga značilnost stoječega valovanja: **vse točke nihajo z isto ali pa nasprotno fazo.**

★ V zvezi z valovanjem je v naravi zelo veliko izjemno zanimivih pojavov. Celotna moderna fizika, ki vključuje kvantno mehaniko, je zasnovana na principih iz valovanja. Bralcu, ki ga to zanima, ponujamo nekaj spletnih naslovov za prvo informacijo:

- Dopplerjev pojav
- Rdeči premik
- Gravitacijsko valovanje
- Gravitacijska leča

Povejmo še nekaj o energiji potujočega valovanja. Ker si valovanje zamislimo kot množico sklopljenih nihali, je njegova energija enaka vsoti energij teh nihali. Ugotovili smo že, da se pri značilnih mehanskih nihalih pretvarjata druga v drugo kinetična in neka druga energija, npr. prožnostna ali potencialna. Skupna energija je enaka največji kinetični (ali pa največji potencialni) energiji (enačba 10.28)

$$W = \frac{1}{2}m\omega^2x_0^2. \quad (10.46)$$

Upoštevali smo, da je največja hitrost nihala $v_0 = \omega x_0$, kjer je ω krožna frekvenca, x_0 pa amplituda nihanja. Ker je praviloma valovanje porazdeljeno po nekem sredstvu, raje računamo gostoto energije w , to je energijo na enoto prostornine

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\rho\omega^2x_0^2. \quad (10.47)$$

Pri tem je ρ gostota sredstva, po katerem se valovanje širi. **Gostoto energijskega toka valovanja definiramo kot pretočeno energijo na časovno in ploskovno enoto**

$$j = \frac{W}{St}. \quad (10.48)$$

Če si mislimo, da potuje valovanje s hitrostjo c naravnost skozi valj z dolžino L in osnovno ploskvijo S , potem je

$$j = \frac{W}{St} = \frac{wV}{St} = \frac{wLS}{St} = \frac{wctS}{St} = cw. \quad (10.49)$$

Upoštevajmo še enačbo (10.47) in dobimo

$$j = cw = \frac{1}{2}c\rho\omega^2x_0^2. \quad (10.50)$$

Kot zgled uporabe enačbe (10.50) vzemimo zvok. Prag slišnosti zvoka pri povprečnem človeškem ušesu je okrog $j = 10^{-12}$ W/m² pri frekvenci zvoka 1 kHz (za takšen zvok pravimo, da ima glasnost nič decibelov). Če upoštevamo $\omega = 2\pi\nu$ in podatka za gostoto zraka $\rho = 1,2$ kg/m³ ter hitrost zvoka v zraku $c = 340$ m/s, dobimo amplitudo nihanja delov zraka $x_0 \approx 0,01$ nm. Človeško uho je res izredno občutljiva naprava.

11. Elektrostatika

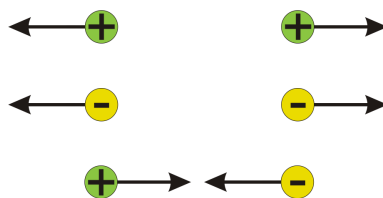
V tem poglavju bomo spoznali električni naboj, ki je ena osnovnih značilnosti snovi. Značilnost električnih nabojev je, da ustvarjajo električno polje, na naboje pa v električnem polju deluje sila. Zapisali bomo električno silo, ki deluje med posameznimi naboji, in elektrostatsko polje, ki se pojavi okoli nabitih delcev. Na koncu bomo vpeljali elektrostatsko energijo in potencial in njuno uporabo pogledali na nekaj zgledih.

11.1 Električni naboj in električna sila

V naravi obstajata dve vrsti električnega naboja. Po dogovoru ju imenujemo pozitivni in negativni električni naboj in jima pri računanju tudi podelimo ustrezen predznak. Fizikalna enota za električni naboj je amper sekunda ali coulomb¹ (As = C). **Silo med dvema točkastima nabojema e_1 in e_2 na razdalji r opiše Coulombov zakon**

$$F_e = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (11.1)$$

pri čemer \vec{r}/r označuje smerni vektor od prvega do drugega naboja. **Konstanto ϵ_0 imenujemo influenčna konstanta in znaša $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ As}/(\text{Vm})$.** Opazimo, da je zapis za elektrostatsko silo med dvema delcema z električnima nabojema zelo podoben zapisu za gravitacijsko silo med dvema delcema z maso (enačba 7.21). Tako kot gravitacijska je tudi elektrostatska sila centralna (kaže v smeri zveznice med nabojema) in njena velikost pojema kot inverzna potenca kvadrata razdalje. V skladu s tretjim Newtonovim zakonom v enačbi nastopata oba naboja, podobno kot pri gravitacijski sili nastopata obe masi. Po nečem pa se električna sila bistveno razlikuje od gravitacijske (slika 9.5): **elektostatska sila je lahko privlačna (med nabojema z nasprotnim predznakom) ali odbojna (med nabojema z enakim predznakom).**



Slika 11.1: Smer električne sile med točkastima nabojema

Pri omembi influenčne konstante ϵ_0 smo se srečali z novo enoto, to je volt² V, ki jo z osnovnimi enotami izrazimo kot $\text{V} = \text{kg m}^2/(\text{A s}^3)$. **Najuporabnejša zveza med »mehanskimi« in »električnimi« enotami je prek energije: $\text{J} = \text{N m} = \text{V A s}$.**

¹Francoski fizik Charles Augustin de Coulomb (1736-1806), [Wikipedija](#)

²Italijanski plemič in fizik Alessandro Giuseppe Anastasio Volta (1745-1827), [Wikipedija](#)

★ Kot zanimivost omenimo že tukaj, da je konstanta ϵ_0 matematično povezana z drugima osnovnima fizikalnima konstantama, svetlobno hitrostjo v vakuumu c_0 in indukcijsko konstanto μ_0 , ki je povezana z magnetizmom. Po dogovoru sta obe natančno določeni: $c = 299\,792\,458$ m/s, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/(Am). Hitrost svetlobe kot elektromagnetno valovanje namreč izhaja iz Maxwellovih enačb za elektromagnetizem (glej poglavje 27) in zanjo velja

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (11.2)$$

Čeprav so influenčno konstanto včasih merili, jo danes lahko poljubno natančno izračunamo kar iz gornje enačbe, njena natančnejša vrednost pa je $\epsilon_0 = 8,854188 \cdot 10^{-12}$ As/Vm.

Računski zgleđ 11.1.1 Kolikšno je razmerje med električno in gravitacijsko silo med dvema protonoma pri poljubni medsebojni razdalji? Kaj pa med dvema elektronoma? Masa protona je $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, masa elektrona pa $9,1 \cdot 10^{-31}$ kg. Delca nosita pozitivni oz. negativni osnovni naboj $e_0 = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C.

Podatki:

$$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$e_0 = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$F_e/F_g(\text{proton}) = ?$$

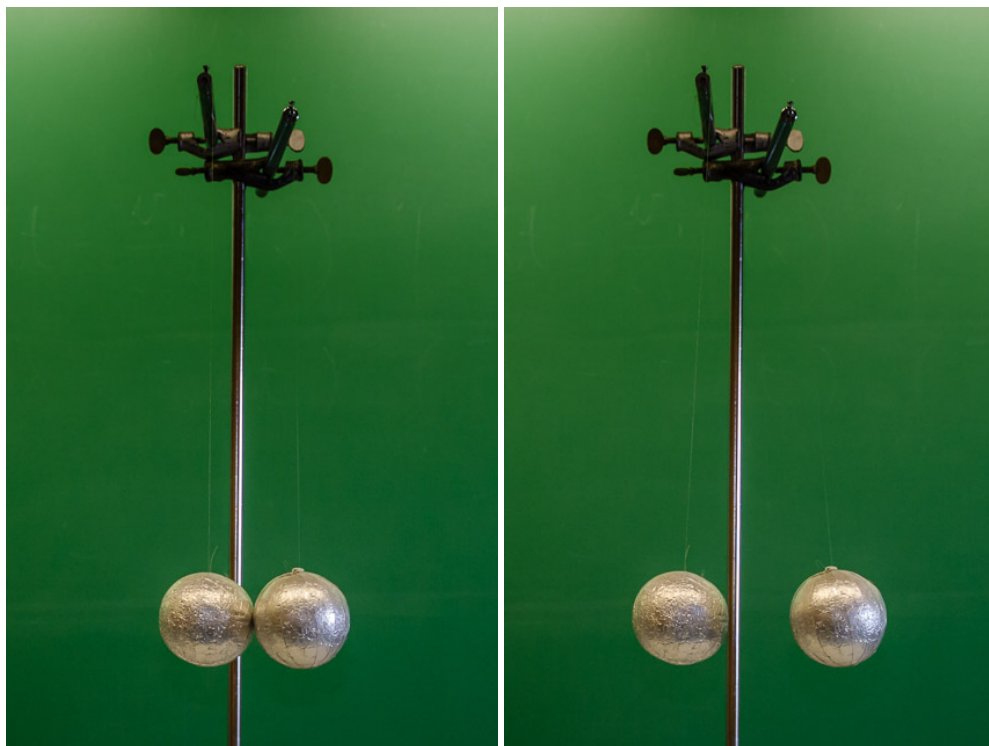
$$F_e/F_g(\text{elektron}) = ?$$

Razmerje med silama je

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} / \frac{\kappa m^2}{r^2} = \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 \kappa m^2},$$

kjer je $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m²/kg² gravitacijska konstanta. Razmerje sil pri paru protonov je $1,2 \cdot 10^{36}$, pri paru elektronov pa je zaradi manjše mase še večje, $4,2 \cdot 10^{42}$. **Električna sila med nabitimi osnovnimi delci je torej neprimerno večja od gravitacijske**, za katero rečemo, da je najšibkejša osnovna sila. □

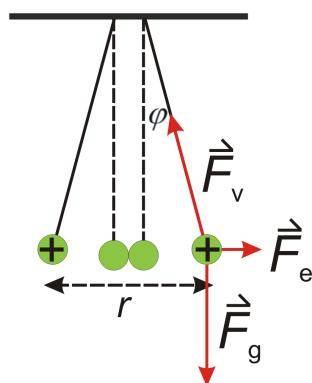
Poskus 11.1.1 — Električna sila med naelektrenima kroglicama na vrvicah. Lahki kroglici iz stiropora, prevlečeni z alu-folijo, visita na vzporednih vrvicah, tako da se dotikata. Potem na njihju nanesimo naboj. Pravimo, da ju naelektrimo. To naredimo tako, da najprej z drgnjenjem s krpo iz umetnih snovi pozitivno naelektrimo stekleno palico (steklo pyrex), nato pa se z njo dotaknemo obeh kroglic, da naboj steče s palice na kroglici. Na kroglicah se nabereta naboja enakega predznaka, zato deluje med njima odbojna električna sila in kroglici se razmakneta. Nato z isto krpo podrgnemo plastično palico, ki se naelektri negativno. Če se z ravno prav naelektreno palico dotaknemo odklonjenih kroglic, se naboj na njima izniči in kroglici se vrmeta v prvotno lego. Razdalja od zgornjega prijemališča vrvic do središča kroglice je okrog $L = 40$ cm. Pri prvi (pozitivni) naelektritvi sta se kroglici razmaknili, tako da je bila razdalja med njunima središčema okrog $r = 20$ cm.



Levo: nenabiti kroglici.

Desno: kroglici naelektrimo z nabojem enakega predznaka, zato se razmakneta.

Izberimo npr. desno kroglico in zapišimo sile, ki delujejo nanjo: sila teže \vec{F}_g , elektrostatska sila \vec{F}_e in sila vrvice \vec{F}_v . Ker kroglica miruje, so sile nanjo v ravnovesju.



Sile, ki delujejo na naboj, so v ravnovesju.

Odklon vrvice od navpičnice naj bo φ . Potem velja

$$\tan \varphi = \frac{F_e}{F_g} \quad \rightarrow \quad \tan \varphi = \frac{e^2 / (4\pi\epsilon_0 r^2)}{mg}.$$

Ker sta kroglici enako veliki, se je na njiju porazdelil enak naboj e . Če izmerimo še druge podatke, lahko naboj e izračunamo. Naklonski kot vrvice je $\varphi = \arcsin\left(\frac{r/2}{L}\right) = 14,5^\circ$. Opazimo, da v resnici vrvice s kroglicama nista povsem enako nagnjeni glede na navpičnico. To je zato, ker sta masi kroglic različni $m_1 = 4,27 \text{ g}$ in $m_2 = 6,25 \text{ g}$. Zato vzamemo v računu vrednost $m \approx 5 \text{ g}$ in dobimo za naboj na eni kroglici $e \approx 0,46 \mu\text{As}$.

11.2 Električno polje

Pri obravnavi in ponazoritvi električne sile navadno vpeljemo pojem električnega polja. Pravimo, da vsako naelektreno telo v svoji okolici ustvari električno polje. **Električno polje je prostor, v katerem na električni naboj deluje elektrostatska sila.** To je vektorsko polje³, ki ima v vsaki točki prostora točno določeno velikost in smer. Najpogosteje ga opišemo z jakostjo električnega polja \vec{E} (enota V/m) ali z gostoto električnega polja \vec{D} (enota As/m²).

Povedali smo že, da na naboj v električnem polju deluje sila. **Električna sila na naboj je produkt naboja in jakosti električnega polja na tistem mestu**

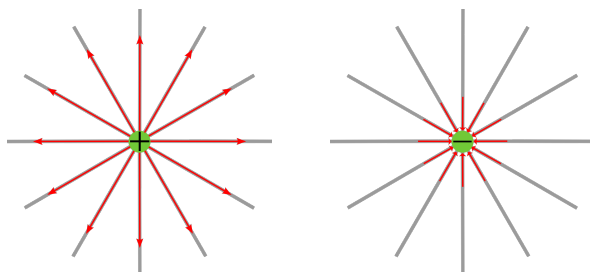
$$\vec{F}_e = e\vec{E}. \quad (11.3)$$

Sila na pozitiven naboj kaže v smeri električnega polja, sila na negativen naboj pa v nasprotni smeri. Pri izračunu električnega polja na mestu naboja pa ne smemo upoštevati njegovega lastnega prispevka k skupnemu električnemu polju.

Jakost električnega polja \vec{E} okoli točkastega naboja v izhodišču lahko izračunamo iz enačbe (11.1) in dobimo

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (11.4)$$

Opazimo, da kaže v vsem prostoru okrog pozitivnega naboja električno polje radialno navzven, to je proč od naboja, pri negativnem naboju pa radialno navznoter, torej proti naboju.



Slika 11.2: Smer električnega polja (rdeče puščice) in silnice (sive črte) v okolici pozitivnega in negativnega točkastega naboja.

Pogosto nas pri zapisu električnega polja zanima samo velikost vektorja. Takrat se enačba (11.4) poenostavi v

$$E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (11.5)$$

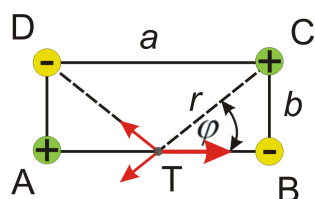
Za električno polje velja načelo superpozicije. To pomeni, da je jakost električnega polja na danem mestu vsota električnih polj posameznih nabojev. Ker je jakost električnega polja vektor, se **posamezni prispevki k električnemu polju vektorsko seštejejo.**

Sliki (11.2) prikazujeta električno polje okoli pozitivnega in negativnega naboja. Slika je zaradi enostavnosti ravninska, a si mislimo krogelno simetrijo polja v 3D-prostoru. Vektorji lokalnega električnega polja (rdeče puščice) potekajo radialno v vse smeri, podobno kot bodice pri ježku.

³Koncept vektorskega polja je za magnetno polje vpeljal angleški fizik Michael Faraday (1791-1867), [Wikipedija](#).

Na sliki so prikazane tudi električne silnice (sivi poltrakovi). **Silnice dobimo tako, da od točke do točke sledimo smeri vektorja jakosti električnega polja.** Jakost električnega polja je tako v vsaki točki tangenta na silnico. Če rišemo samo silnice, na prvi pogled izgubimo informacijo o velikosti električnega polja, saj nam silnice pokažejo samo njegovo smer. A velikost polja je podana posredno: čim bližje skupaj so si silnice, tem večje je tam polje. Seveda pa smo si izbrali samo določeno število silnic za prikaz, saj sicer silnice napolnjujejo ves prostor.

Računski zgleđ 11.2.1 V ogliščih pravokotnika s stranicama 10 cm in 4 cm so štiri naboji. Po velikosti so enaki $e = 10$ pAs, po predznaku pa se razlikujejo. Dva sta pozitivna, dva pa negativna kot kaže slika. Kolikšno je skupno električno polje v točki T na razpolovišču stranice AB in v katero smer kaže? Kaj pa če bi bili vsi štiri naboji enaki in pozitivni?



Slika 11.3: Naboji v pravokotniku in električno polje. Z rdečimi puščicami so prikazani prispevki električnih polj vseh štirih nabojev.

Podatki:

$$a = 10 \text{ cm}$$

$$b = 4 \text{ cm}$$

$$e = 10^{-11} \text{ C}$$

$$E = ?$$

Električni polji v točki T zaradi nabojev v ogliščih A in B sta si enaki po velikosti in tudi smeri, saj imata naboja različna predznaka. Imamo torej dvojni prispevek enega naboja (smer desno, debela rdeča puščica). Temu moramo dodati še prispevka zaradi nabojev v C in D. Iz geometrije je razvidno, da kaže njuno skupno polje v T v levo smer. Njegova velikost pa je dvakratna projekcija jakosti polja enega naboja na vodoravno os. Skupaj torej

$$E = 2(E_A - E_C \cos \varphi) = 2 \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(a/2)^2} - \frac{1}{r^2} \frac{a}{2r} \right) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{8}{a^2} - \frac{a}{r^3} \right)$$

in

$$E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{8}{a^2} - \frac{a}{((a/2)^2 + b^2)^{3/2}} \right) = 37,7 \text{ V/m.}$$

Skupno polje kaže v desno, ker je skupni prispevek nabojev v A in B večji kot prispevek nasprotnega predznaka od nabojev v C in D.

Če so vsi štiri naboji pozitivni, je skupni prispevek nabojev v A in B enak nič, skupni prispevek pozitivnih nabojev v C in D pa kaže v točki T navpično navzdol. Račun velikosti polja je podoben kot prej, le da gledamo drugo projekcijo zadnjih dveh prispevkov

$$E = 2E_C \sin \varphi = 2 \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{b}{r} = \frac{eb}{2\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{eb}{2\pi\epsilon_0 ((a/2)^2 + b^2)^{3/2}} = 27,4 \text{ V/m. } \square$$

11.3 Električna potencialna energija

Vzemimo točkasto telo z maso m in nabojem e , ki je v električnem polju z jakostjo \vec{E} . Če se premakne iz izhodišča do končne lege \vec{r} , električna sila opravi delo. Izračunajmo ga:

$$A_e = \int_0^r \vec{F}_e d\vec{r} = \int_0^r e\vec{E} d\vec{r}. \quad (11.6)$$

Izkaže se, da je **električna sila konservativna**. To pomeni, da je **delo električne sile po zaključeni zanki v prostoru vedno enako nič**. Povedano drugače: delo električne sile je odvisno samo od začetne in končne točke, ne pa od vmesne poti. Spomnimo se, da velja podobno tudi za gravitacijsko silo in iz analogije vpeljemo tudi pri električnem polju potencialno energijo W_{pot} . V skladu s tem zapišemo izrek o ohranitvi energije (enačba 7.11), ki pravi, da je delo zunanjih sil (razen električne) enako spremembi potencialne in kinetične energije.

$$A = \Delta W_e + \Delta W_k = W_e - W_{e0} + \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (11.7)$$

Pri tem težnostne potencialne energije nismo zapisali, prav tako nismo pisali drugih, npr. prožnostne energije. Če obravnavamo sistem, kjer težnostna potencialna energija ni zanemarljiva, ali pa imamo v sistemu vzmeti, ki bi prevzele prožnostno energijo, moramo gornji enačbi seveda dodati še ustrezne člene.

Izračunajmo za primer električno potencialno energijo točkastega naboja $-e_1$ v polju drugega točkastega naboja e_2 . Pozitivni naboj e_2 naj bo v izhodišču koordinatnega sistema, negativni naboj $-e_1$ pa na osi x . Počasi ga premaknemo od razdalje x_1 do večje razdalje x_2 . Ker vleče električna sila naboja skupaj, moramo na negativni naboj delovati z nasprotno enako silo. Delo je potem

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F dx = -\frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^2} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 x} \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 x_2} - \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 x_1} = \Delta W_e. \quad (11.8)$$

Ker je električna sila konzervativna, si lahko izhodišče poljubno izberemo. Po dogovoru je potencialna energija enaka nič, ko sta telesi neskončno narazen. Zato velja, da je **električna potencialna energija enaka delu, ki ga moramo opraviti, da naboj e_1 iz neskončnosti prinesemo na oddaljenost r od naboja e_2** . Električna potencialna energija za točkasto telo z nabojem e_1 v polju drugega naboja e_2 je tako

$$W_e = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (11.9)$$

Podobno kot gravitacijska potencialna energija (enačba 7.22) je tudi W_e dveh točkastih nabojev obratno sorazmerna z razdaljo r . Za razliko od gravitacijske energije, ki je vedno negativna, je električna potencialna energija lahko pozitivna kot negativna, odvisno od predznakov obeh nabojev. **Če sta naboja enakega predznaka, je električna sila med njima odbojna in energija pozitivna. Med naboji nasprotnih predznakov je sila privlačna in energija negativna.**

Računski zglad 11.3.1 Štiri enake nabite kroglice ($e = 2 \text{ nC}$, $m = 1 \text{ mg}$) postavimo v oglišča kvadrata s stranico 20 cm . Ko jih spustimo, se začnejo zaradi odbojnih sil oddaljevati. Kolikšen je začetni pospešek posamezne kroglice? Kolikšno hitrost dosežejo kroglice, ko so daleč narazen?

Podatki:

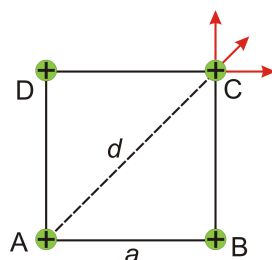
$$a = 20 \text{ cm}$$

$$e = 2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

$$m = 1 \text{ mg}$$

$$a = ?$$

$$v = ?$$



Slika 11.4: Naboji v ogliščih kvadrata in električna sila na naboj v točki C. Z rdečimi puščicami so prikazani prispevki električnih sil drugih treh nabojev na ta naboj.

Najprej izračunajmo skupno električno silo preostalih treh nabojev na naboj v oglišču C. Zaradi simetrije kaže ta sila desno navzgor pod kotom 45° glede na vodoravno os (glej sliko). Sila naboja v A na naboj v C že kaže v pravi smeri, pri silah nabojev v B in D na naboj v C pa moramo vzeti projekcijo na diagonalno smer. Skupna sila je

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(a\sqrt{2})^2} + 2\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a^2} (1 + 2\sqrt{2}).$$

Izračunamo silo in pospešek $a = F/m = 1,72 \text{ m/s}^2$. Pospešek je največji na začetku, nato pa se zaradi zmanjševanja sile z razdaljo med naboji zmanjšuje.

Končno hitrost izračunamo z energijskim zakonom. V začetku naboji mirujejo in imajo električno potencialno energijo, ko pa so naboji daleč narazen, med njimi ni električne energije, imajo pa kinetično energijo. Vsa začetna električna energija se je torej pretvorila v kinetično. Ko računamo električno potencialno energijo, moramo upoštevati prispevke vseh parov nabojev: štiri po stranicah in dva para po diagonalah.

$$W_e = 4\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} + 2\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} = \frac{e^2}{\pi\epsilon_0 a} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Pri končni kinetični energiji upoštevamo 4 enake prispevke, saj se vsi naboji zaradi simetrije gibljejo enako hitro. Tako dobimo

$$4\frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{\pi\epsilon_0 a} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \rightarrow v = \sqrt{\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 am} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)} = 0,7 \text{ m/s. } \square$$

11.4 Električni potencial

Podobno kot smo med seboj povezali električno silo \vec{F}_e in električno polje \vec{E} , povežemo z električno potencialno energijo W_e električni potencial V . **Električni potencial je električna energija na enoto naboja**

$$V = \frac{W}{e}. \quad (11.10)$$

Pri izračunu potenciala na mestu naboja upoštevamo in seštejemo prispevke vseh prisotnih nabojev (z ustreznim predznakom), razen potenciala naboja samega. **Potencial je skalar, zato potencial več nabojev izračunamo kot vsoto posameznih prispevkov.** Enota za potencial je volt (V).

Izrazimo potencial še z jakostjo električnega polja. Upoštevamo enačbo (11.6) in izračunamo električno potencialno energijo na enoto naboja. Do integracijske konstante natančno dobimo

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (11.11)$$

Če združimo enačbi (11.9) in (11.10), lahko zapišemo potencial enega samega naboja

$$V = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (11.12)$$

★ Zapišimo še splošnejšo zvezo med silo in energijo ter zvezo med električnim poljem in potencialom, zaenkrat v skalarni obliki.

$$F_e = -\frac{dW_e}{dr} \Leftrightarrow W_e = - \int F_e dr + C_1 \quad \text{ozioroma} \quad W_e = - \int \vec{F}_e \cdot d\vec{r} + C_1 \quad (11.13)$$

in

$$E = -\frac{dV}{dr} \Leftrightarrow V = - \int E dr + C_2 \quad \text{ozioroma} \quad V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} + C_2. \quad (11.14)$$

Nedoločeni integracijski konstanti C_1 in C_2 sta določena z robnimi pogoji izbranega problema. Pogosto niti nista pomembna, saj so ključne le spremembe energije in potenciala, kjer se nedoločena konstanta izniči. Zapisali smo tudi splošneši vektorski zapis s skalarnim produktom.

V vektorski obliki gornji enačbi po komponentah v kartezičnem koordinatnem sistemu zapišemo

$$\begin{aligned} F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} & \quad E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial W}{\partial y} & \quad \Leftrightarrow \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial W}{\partial z} & \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned} \quad (11.15)$$

Z znakom ∂ označimo parcialni odvod funkcije več spremenljivk po eni od njih. V našem primeru sta energija W in potencial V funkcija treh koordinat x , y in z . Parcialni odvod pomeni, da odvajamo količino le po eni od teh koordinat, ostali dve pa obravnavamo kot konstante.

V vektorski analizi zapišemo gornje enačbe v strnjeni obliki z gradientom

$$\vec{F} = -\nabla W \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} = -\nabla V \quad (11.16)$$

Računski zgleđ 11.4.1 V ogliščih pravokotnika s stranicama 10 cm in 4 cm so štirje naboji $e = 10$ pAs. Kolikšen je potencial v točki T?

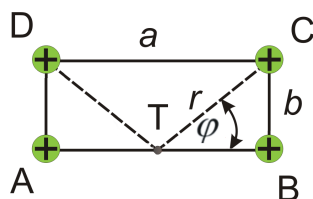
Podatki:

$$a = 10 \text{ cm}$$

$$b = 4 \text{ cm}$$

$$e = 10^{-11} \text{ As}$$

$$V = ?$$

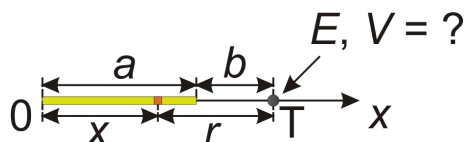


Slika 11.5: Geometrija za izračun potenciala v točki T

Potencial je skalar, zato prispevke vseh širih nabojev enostavno seštejemo

$$V = 2(E_A + E_D) = 2 \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a/2} + \frac{1}{r} \right) = \frac{e}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2((a/2)^2 + b^2)^{1/2}} \right) = 6,41 \text{ V}. \square$$

Računski zgleđ 11.4.2 Po tanki palici z dolžino a je enakomerno porazdeljen naboj e . Kolikšna sta jakost električnega polja in potencial v točki T, ki je od desnega konca palice oddaljena za b ?



Slika 11.6: Geometrija za izračun jakosti električnega polja in potenciala v točki T. Z oranžno barvo je označen delček palice dx , ki nosi naboj de .

Najprej izračunamo polje \vec{E} . Ker so delčki palice različno oddaljeni od točke T, so njihovi prispevki k polju različno veliki in treba je integrirati. Palico razdelimo na majhne delčke dx , ki jih lahko obravnavamo kot točkaste naboje, nato pa seštejemo vse prispevke. Električno polje je vektor, vendar vsi prispevki kažejo v isto smer, zato lahko seštejemo le njihove velikosti. Vsak košček palice z dolžino dx nosi naboj $de = edx/a$. Posamezen košček dolžine dx je od točke T oddaljen za $r = a + b - x$. Celotno električno polje je

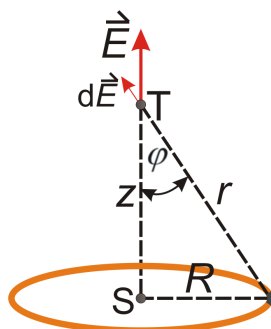
$$E = \int \frac{de}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^a \frac{dx}{(a+b-x)^2} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{1}{(a+b-x)} \Big|_0^a = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} \right) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 b(a+b)}.$$

Podobno izračunamo električni potencial

$$V = \int \frac{de}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^a \frac{dx}{a+b-x} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} \ln(a+b-x) \Big|_0^a = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} (\ln(a+b) - \ln b) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} \ln \frac{a+b}{b}. \square$$

Električno polje na osi nabitega obroča

Obravnavajmo zdaj primer, kjer naboj ni točkast, ampak je porazdeljen po tankem obroču s polmerom R . Naj bo na obroču enakomerno porazdeljen pozitivni naboj e . Izračunajmo jakost električnega polja in potencial v točki T na geometrijski osi obroča, ki je od središča oddaljena za z . Pri kateri oddaljenosti z je električno polje največje?



Slika 11.7: Električno polje v točki T na geometrijski osi enakomerno nabitega tankega obroča. Prikazana sta prispevek $d\vec{E}$ delčka obroča in celotno polje \vec{E} vseh prispevkov.

Izračunajmo najprej električni potencial, saj je račun preprostejši. Vse točke obroča so od točke T enako oddaljene (za r), zato integriranje ni potrebno. Celoten potencial je

$$V = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}. \quad (11.17)$$

Potencial je torej največji v središču obroča pri $z = 0$: $V_0 = e/(4\pi\epsilon_0 R)$. Ko se oddaljujemo od obroča, potencial monotono pojema (slika 11.8). Pri zelo velikih razdaljah lahko polmer R pod korenem zanemarimo in izraz poenostavimo

$$V = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 z} \approx \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (11.18)$$

V gornjem izrazu prepoznamo izraz za potencial točkastega naboja (enačba 11.12), saj lahko obroč od zelo daleč obravnavamo kot točko.

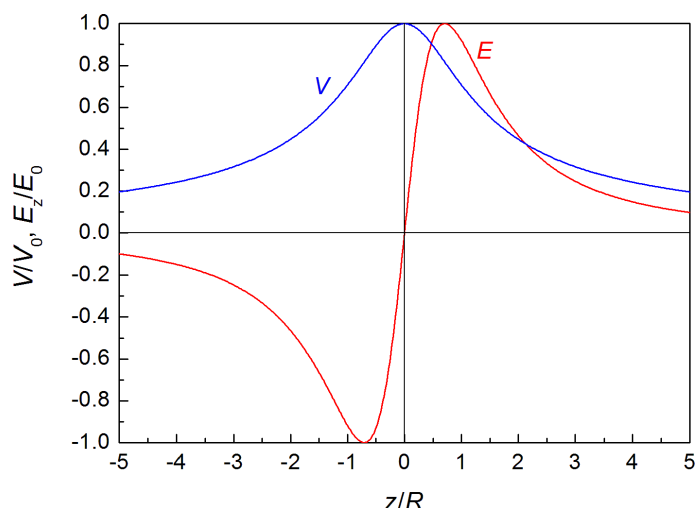
Pri električnem polju je treba biti bolj pazljiv, saj je jakost električnega polja vektor. Pri vektorski vsoti majhnih prispevkov koščkov obroča ostane v točki T samo navpična komponenta polja, saj se komponente v ravnini obroča izničijo. Pri izračunu polja moramo tako upoštevati le projekcijo prispevkov v navpični smeri. Naj bo φ kot med navpičnico in poševnico na sliki. Ker sta kot in razdalja za vse točke obroča enaka, integriranje ni potrebno in lahko zapišemo

$$E_z = \frac{e \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{z}{r} = \frac{ez}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (11.19)$$

V splošnem je jakost električnega polja preprosteje izračunati kot negativni odvod potenciala, kar sledi neposredno iz enačbe (11.11).

Poiščimo še točko, kjer je jakost električnega polja največja. V središču obroča je enaka nič, pri velikih oddaljenostih pa gre prav tako proti nič. Iz tega sledi, da nekje vmes zavzame največjo vrednost. Ekstrem poiščemo z odvajanjem, tako da poiščemo točko, v kateri je odvod enak nič

$$\frac{dE_z}{dz} = 0 = \frac{e \left((R^2 + z^2)^{3/2} - 3z^2 (R^2 + z^2)^{1/2} \right)}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^3}. \quad (11.20)$$



Slika 11.8: Normalizirana grafa potenciala $V(z)$ (modra črta) in jakosti električnega polja $E_z(z)$ (rdeča črta).

Enačbo rešimo in dobimo vrednost z_0 , kjer je jakost električnega polja največja

$$z_0 = \frac{R}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad E_0 = \frac{e}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (11.21)$$

Na sliki je poleg potenciala prikazan tudi graf $E_z(z)$, normaliziran na E_z/E_0 in z/R . Razvidno je, da je električno polje negativni odvod potenciala po koordinati z . Kjer ima V maksimum, to je pri $z = 0$, je polje E enako nič. E ima ekstrem v točkah, kjer je krivulja $V(z)$ najbolj strma.

Računski zglede 11.4.3 Obravnavajmo še enkrat nabit obroč. V središče obroča postavimo pozitiven točkast naboj e_t z maso m in ga nekoliko odmaknemo iz labilne ravnovesne lege, da odleti proč. Kolikšno hitrost ima daleč proč od obroča? Obroč miruje.

Ko pozitivni naboj malo izmaknemo iz središča kroga, delujejo nanj odbojne električne sile, ki ga odrinejo daleč stran. Ker ni dela zunanjih sil, se energija sistema obroč-naboj ohranja. Začetna električna potencialna energija se torej pretvori v kinetično energijo naboja

$$\Delta W = W_e - W_{e0} + W_k - W_{k0} = 0 - e_t V_0 + \frac{1}{2} m v^2 - 0 = 0.$$

Sledi

$$\frac{e e_t}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{2} m v^2 \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{e e_t}{2\pi\epsilon_0 R m}}.$$

Na enak način rešimo tudi druge podobne naloge. Ko, recimo, iščemo najmanjšo hitrost, s katero moramo usmeriti točkasti naboj proti središču obroča, da ga prebije (ravno še pride skozenj z zanemarljivo hitrostjo v središču). Ali pa nadomestimo pozitiven točkast naboj z negativnim in se vprašamo, s kolikšno hitrostjo ga moramo izstreliti iz središča obroča, da ubeži privlačni električni sili? Bralec naj primera za vajo reši sam.

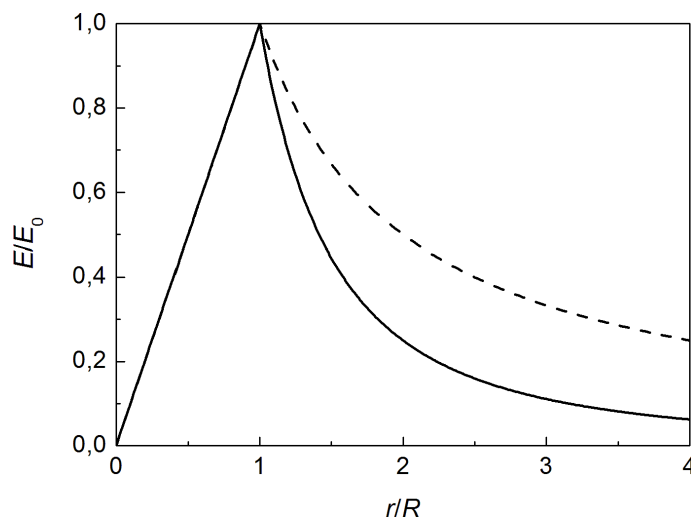
Zanimiva je obravnava nihanja negativnega naboja okrog središčne lege (če mu dopustimo le gibanje po geometrijski osi). Bralec naj pokaže, da je nihanje sinusno samo za majhne odmike $z \ll R$. Takrat lahko z v izrazu za električno polje zanemarimo v primerjavi s polmerom R in sila na naboj je sorazmerna z odmikom z , a ima nasproten predznak, kar je pogoj za sinusno nihanje. Bralec naj sam izračuna ustrezen nihajni čas. \square

Električno polje nabite krogle

Poglejmo, kako je z električnim poljem enakomerno nabite kroglice. Kroglica naj ima polmer R , po njej pa je (volumsko) enakomerno porazdeljen naboj e . Vpeljemo volumsko gostoto naboja $\rho = e/V$, ki je znotraj naboja homogena. Da se pokaže, da je **polje \vec{E} zunaj nabite krogle (za $r > R$) enako, kot če bi naboj točkast in zbran v središču krogle**. Pri tem ne gre za limitni primer velike oddaljenosti, ampak velja ugotovitev za vsako točko nad površino krogle. Da se pokaže, da velja enako tudi v primeru neenakomerne, a krogelno simetrične porazdelitve naboja. Med dvema nabitima kroglama tako deluje Coulombova sila (enačba 11.1), pri čemer za razdaljo r vzamemo razdaljo med središčema krogel. To ugotovitev smo že upoštevali pri poskusu v začetku poglavja. Povejmo še, da je **v notranjosti enakomerno nabite krogelne lupine (poljubne debeline) električno polje enako nič**.

Izračunajmo zdaj jakost električnega polja znotraj enakomerno nabite krogle s polmerom R in skupnim nabojem e . Vzemimo točko, ki je $r < R$ oddaljena od središča krogle. Kroglo razdelimo na dva dela. Prvi del naj bo krogla s polmerom r , drugi pa krogelna lupina debeline $R - r$. Ker je prispevek krogelne lupine znotraj lupine enak nič, nam lupine ni treba upoštevati. Polje krogle pa je enake oblike kot polje točkastega naboja

$$E = \frac{e_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{e \frac{V_r}{V_R}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{e \frac{r^3}{R^3}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{er}{4\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (11.22)$$



Slika 11.9: Graf $E(r)$ za enakomerno nabito kroglo (polna črta) in valj (črtkana črta). Za $r < R$ se grafa ujemata

Pri tem smo seveda upoštevali le tisti delež celotnega naboja, ki je znotraj krogle z radijem r . Jakost električnega polja znotraj enakomerno nabite krogle torej enakomerno narašča s polmerom in doseže največjo vrednost na površini krogle

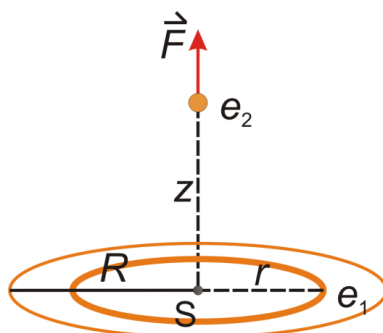
$$E_0 = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (11.23)$$

Zunaj krogle jakost električnega polja pada inverzno s kvadratom oddaljenosti od središča krogle. Zapišemo lahko tudi strnjeno

$$E = E_0 \frac{r}{R} \quad \text{za } r < R \quad \text{in} \quad E = E_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad \text{za } r > R. \quad (11.24)$$

Električno polje nabite plošče

Kolikšna je električna sila med tanko okroglo ploščo (polmer R , enakomerno porazdeljen naboj e_1) in točkastim nabojem e_2 , ki leži na geometrijski osi plošče in je za z oddaljen od plošče)?



Slika 11.10: Geometrija in prikaz izpeljave sile med nabito okroglo ploščo in točkastim nabojem

Pomagamo si z rezultatom iz računskega zгледа, kjer smo izračunali jakost električnega polja na geometrijski osi nabitega tankega obroča s polmerom R (enačba 11.19)

$$E_z = \frac{ez}{4\pi\epsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (11.25)$$

V tem primeru ploščo razdelimo na tanke obročce, katerih električno polje poznamo. Posamezen kolobar z radijem r in debelino dr ima naboj

$$de_1 = e_1 \frac{dS}{S} = e_1 \frac{2\pi r dr}{\pi R^2}, \quad (11.26)$$

skladno z razmerjem ploščin kolobarja in celega kroga. Celotno električno poljsko jakost dobimo tako, da seštejemo prispevke vseh kolobarjev - integriramo

$$E = \frac{e_1 z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2\pi r dr}{\pi R^2 (r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{e_1 z}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{2r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (11.27)$$

Ta integral rešimo, tako da uvedemo integracijsko spremenljivko $u = r^2 + z^2$ in $du = 2r dr$:

$$E = \frac{e_1 z}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int u^{-3/2} du = \frac{e_1 z}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left(-2u^{-1/2} \right) = -\frac{e_1 z}{2\pi\epsilon_0 R^2} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \Big|_0^R. \quad (11.28)$$

Sledi

$$E = \frac{e_1}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right). \quad (11.29)$$

Da dobimo silo med ploščo in nabojem, moramo električno poljsko jakost pomnožiti z nabojem (enačba 11.3)

$$F = \frac{e_1 e_2}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right). \quad (11.30)$$

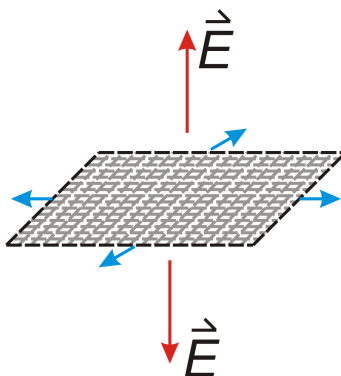
Pri velikih ploščah je smiselno vpeljati še ploščinsko gostoto električnega naboja. Potem zapišemo električno poljsko jakost v preglednejši obliki

$$\sigma = \frac{e}{S} = \frac{e}{\pi R^2} \quad \rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right). \quad (11.31)$$

Še posebej zanimiv je limitni primer, ko je plošča zelo velika v primerjavi z oddaljenostjo z . Dokler nas zanima električno polje v neposredni bližini plošče in daleč od njenih robov, se izkaže, da je oblika plošče nepomembna. V limiti $z \ll R$ se gornja enačba prepíše v

$$E = \frac{e}{2\epsilon_0 S} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (11.32)$$

Električno polje nad veliko enakomerno nabito ploščo je konstantno in neodvisno od oddaljenosti od plošče.



Slika 11.11: Električno polje zelo velike električno nabite plošče

Električno polje nabitega valja

Nazadnje si oglejmo še električno polje nabitega valja. Imamo neskončno dolg enakomerno pozitivno nabiti valj s polmerom R . Električni naboj na dolžinsko enoto valja naj bo $\mu = de/dL$. Zanima nas električno polje tako v notranjosti valja kot zunaj njega.

Zaradi simetrije kaže polje \vec{E} radialno navzven in je odvisno le od oddaljenosti od geometrijske osi valja (r). Velikost električnega polja lahko izračunamo z integralom, lahko pa uporabimo Gaussov izrek⁴, ki je uporaben v elektrostatiki v primeru velike geometrijske simetrije problema. Podrobnejša izpeljava je v nadaljevanju, označenem z zvezdico. Tu navedimo le preprost rezultat

$$E = E_0 \frac{r}{R} \quad \text{za } r < R \quad \text{in} \quad E = E_0 \frac{R}{r} \quad \text{za } r > R. \quad (11.33)$$

Polje je največje na robu valja

$$E_0 = \frac{\mu}{2\pi\epsilon_0 R}. \quad (11.34)$$

Odvisnost $E(r)$ je torej zelo podobna kot pri nabiti krogli. Znotraj valja polje linearno narašča, le da za $r > R$ jakost električnega polja za valj počasneje pojema kot za kroglo. Odvisnost polja od razdalje od osi r je prikazana na sliki 11.9.

⁴Nemški matematik Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), [Wikipedija](#)



Za izračun jakosti električnega polja pogosto uporabimo Gaussov stavek

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{e}{\epsilon_0}.$$

Povejmo z besedami: **integral jakosti električnega polja po zaključeni ploskvi je do konstante enak naboju, ki ga ta ploskev zajema.** Gaussov stavek je ena od štirih Maxwellovih enačb, ki so osnova elektromagnetizma. Podrobneje je opisan v poglavju 12.4, Maxwellove enačbe pa obravnavamo v dodatku (poglavje 27).

Oglejmo si Gaussov stavek na primeru dolgega enakomerno nabitega valja z radijem R . Nabiti valj obdamo z namišljenim valjem z radijem r in dolžino d , ki ima isto os kot nabiti valj. Zaradi simetrije bo električno polje kazalo radialno navzven, zato bo skalarni produkt $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ na plašču valja kar enak $E dS$, na osnovnih ploskvah pa je skalarni produkt enak nič. Celotni integral na levi strani Gaussovega stavka bo tako

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{plašč}} E dS = E 2\pi r d.$$

Po drugi strani je to do konstante enako naboju v notranjosti integracijske ploskve - večjega valja

$$e = \mu d \quad \rightarrow \quad E = \frac{\mu}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

kar je ravno enačba (11.33).

Bralec naj za vajo sam uporabi Gaussov stavek na veliki ravni nabiti plošči s površinsko gostoto naboja σ in izpelje enačbo (11.32).

Računski zgleđ 11.4.4 Dve veliki enakomerno pozitivno nabiti plošči sta postavljeni vzporedno druga nad drugo. Na spodnji plošči je naboj $10 \mu\text{As}$, na zgornji pa $6 \mu\text{As}$. Dimenziji plošč sta $100 \text{ cm} \times 80 \text{ cm}$. Kolikšno je električno polje na vsaki strani plošč in med njima, ne preblizu robov?

Podatki:

$$e_1 = 10 \mu\text{As}$$

$$e_2 = 6 \mu\text{As}$$

$$a = 100 \text{ cm}$$

$$b = 80 \text{ cm}$$

$$E_z = ?$$

$$E_n = ?$$

Vsaka od plošč ustvari v svoji okolici homogeno električno polje

$$E_1 = \frac{e_1}{2\epsilon_0 S} = \frac{e_1}{2\epsilon_0 ab} = 0,71 \text{ MV/m}$$

in

$$E_2 = \frac{e_2}{2\epsilon_0 S} = \frac{e_2}{2\epsilon_0 ab} = 0,42 \text{ MV/m}.$$

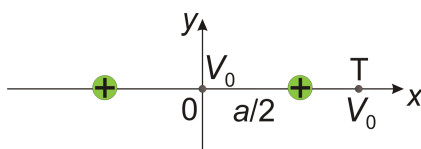
Zunaj plošč kažeta obe polji v isto smer in se seštejeta $E_z = E_1 + E_2 = 1,13 \text{ MV/m}$. Med ploščama se polji odštejeta $E_n = E_1 - E_2 = 0,28 \text{ MV/m}$. \square

11.5 Ekvipotencialne ploskve

Na nekaj primerih smo si ogledali, kako se električni potencial spreminja z oddaljenostjo od izvora polja (nabite plošče, krogle, valja ...). Potencial lahko izračunamo v vsaki točki prostora, vendar je tak način predstavitve polja nepraktičen. Zato vpeljemo ekvipotencialne ploskve. **Z ekvipotencialnimi ploskvami povežemo točke v prostoru z enakim potencialom.** Vsaki vrednosti potenciala ustreza druga ekvipotencialna ploskev, zato je takšnih ploskev v prostoru neskončno in so si poljubno blizu. Zaradi preglednosti vedno narišemo le nekaj ekvipotencialnih ploskev.

Oglejmo si primer točkastega naboja. Spomnimo se, da potekajo električne silnice radialno iz točkastega naboja (slika 11.2). Potencial okoli točkastega naboja smo tudi že izračunali (enačba 11.12) in pokazali, da je obratno sorazmeren z razdaljo od naboja. Točke z enakim potencialom torej ležijo na koncentričnih krogelnih ploskvah s središčem v naboju. To ugotovitev lahko posplošimo in v splošnem velja, da so **ekvipotencialne ploskve vedno pravokotne na silnice.**

Računski zglede 11.5.1 Pozitivna naboja ($e = 5 \text{ nAs}$) sta na medsebojni razdalji $a = 40 \text{ cm}$. Kolikšen je električni potencial na sredini med njima? Kje na premici, na kateri ležita oba naboja, je še enak potencial? Nariši ekvipotencialne ploskve okoli teh dveh nabojev.



Slika 11.12: K izračunu električnega potenciala okoli dveh pozitivnih nabojev. V točkah O in T je enak potencial V_0 .

Podatki:

$$a = 40 \text{ cm}$$

$$e = 5 \text{ nAs}$$

$$V_0 = ?$$

$$x = ?$$

Koordinatni sistem izberemo tako, da sta naboja pri $x = \pm a/2$. Električni potencial na sredi med nabojev je

$$V_0 = 2 \frac{e}{4\pi\epsilon_0(a/2)} = \frac{e}{\pi\epsilon_0 a} = 450 \text{ V.}$$

Izračunajmo še točke na zveznici, kjer je potencial enak. Omejimo se zaenkrat le na eno stran, recimo desno od nabojev. Velja

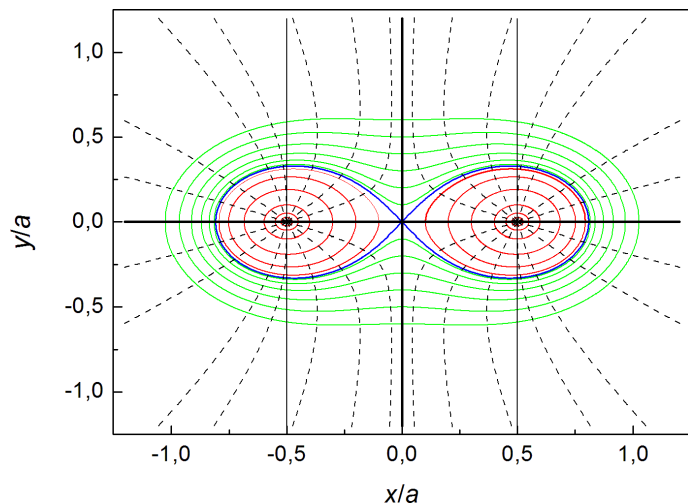
$$\frac{e}{4\pi\epsilon_0(x - a/2)} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0(x + a/2)} = V_0 = \frac{e}{\pi\epsilon_0 a}.$$

Enačbo pomnožimo s skupnim imenovalcem, jo preuredimo in dobimo kvadratno enačbo

$$x^2 - \frac{a}{2}x - \frac{a^2}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{a}{4}(1 + \sqrt{5}) = 32,36 \text{ cm.}$$

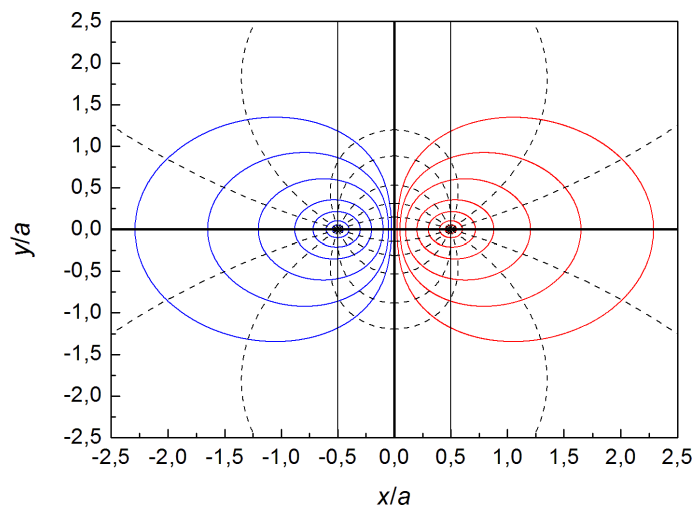
Točka T z enakim potencialom je torej 12,36 cm desno od desnega naboja. Zaradi simetrije pa je druga taka točka 12,36 cm levo od levega naboja.

Narišimo še električne silnice in ekvipotencialne ploskve okoli para enako predznačenih nabojev. Ekvipotencialne ploskve označimo z barvnimi polnimi črtami, silnice pa s črnimi črtkanimi črtami. Za orientacijo smo odebelerili koordinatni osi in narisali vzporednice z osjo y , ki gresta skozi oba naboja.



Slika 11.13: Električne silnice (črčkane) in ekvipotencialne ploskve (barvane črte) okoli enako predznačenih nabojev. Tanki navpični črti skozi oba naboja sta narisani zaradi orientacije. □

Oglejmo si še primer, ko sta naboja različno predznačena. **Paru enako velikih, a nasprotno predznačenih nabojev, pravimo električni dipol.**



Slika 11.14: Električne silnice (črčkane) in ekvipotencialne ploskve (barvane črte) okoli dipola. Negativni naboj je pri $x = -a/2$, pozitivni pri $x = +a/2$.

Zaradi preglednosti rišemo le krivulje, ki so presečišča ekvipotencialnih ploskev z ravnino xy . Ekvipotencialne ploskve so sicer 3D ploskve, ki jih dobimo z vrtenjem narisanih krivulj okrog premice zveznice med nabojema. Na slikah vidimo, da ekvipotencialna ploskev ni vedno v enem povezanem kosu. V primeru dveh enakih točkastih nabojev je ekvipotencialna ploskev iz enega kosa (zelene ploskve) ali pa iz dveh (rdeče ploskve), odvisno od velikosti potenciala. Podrobnejši opis in fizikalno interpretacijo slik najdete v dodatku (poglavje 23).

11.6 Električna napetost

Spoznali smo, da se v okolici električnega naboja ustvari električno polje, ki ga opišemo z jakostjo električnega polja ali s potencialom. Ti dve količini sta določeni v vsaki točki prostora. \vec{E} popiše vektorsko polje (vsaki točki prostora priredimo nek vektor), V pa skalarno (vsaki točki prostora priredimo skalarno vrednost). Preko potenciala vpeljemo še električno napetost. **Napetost U je definirana med dvema točkama v prostoru in je po velikosti enaka razliki potencialov v teh dveh točkah.**

$$U_{12} = V_2 - V_1. \quad (11.35)$$

Pogosto napetost U imenujemo tudi napetostna razlika. Enota za napetost je enaka kot enota za potencial: volt.

Podobno kot pri gravitaciji je tudi pri električnem potencialu pomembna le razlika. Kljub temu pa pogosto vpeljemo referenčno ploskev ali točko, kjer je potencial po dogovoru enak nič. Navadno je to v neskončni oddaljenosti od naelektrenega telesa.

Imejmo homogeno električno polje, to je tako, ki se po prostoru ne spreminja niti po velikosti niti po smeri. Po enačbi (11.11) lahko izračunamo napetost med dvema točkama v homogenem polju:

$$U_{12} = V_2 - V_1 = - \int_{-\infty}^{x_2} \vec{E} \cdot \vec{dr} - \left(- \int_{-\infty}^{x_1} \vec{E} \cdot \vec{dr} \right) = - \int_{x_1}^{x_2} \vec{E} \cdot \vec{dr}, \quad (11.36)$$

pri čemer smo za referenčno točko vzeli neskončno oddaljenost. Če se premaknemo vzporedno s smerjo polja \vec{E} , se gornji izraz poenostavi

$$U_{12} = -E \int_{x_1}^{x_2} dx = -E(x_2 - x_1) = -Ed, \quad (11.37)$$

pri čemer je $d = x_2 - x_1$. V smeri polja se torej potencial zmanjšuje in dobimo negativno napetost. Če pa se premikamo v nasprotni smeri polja, dobimo nasprotni predznak, kar pomeni pozitivno napetost $U = Ed$. Če odmislimo predznak napetosti, velja v splošnem v homogenem polju

$$U = Ed. \quad (11.38)$$

Napetost torej v homogenem električnem polju linearno narašča z razdaljo med opazovanima točkama.

12. Snov v električnem polju

Glede na gibljivost električnega naboja v snovi ločimo snovi v tri skupine: izolatorje (npr. plastika, steklo), polprevodnike (npr. Si, Ge) in prevodnike (npr. Cu, Al, Ag, Au, slana voda). V izolatorjih se nosilci električnega naboja praktično ne morejo gibati, v prevodnikih pa se gibljejo skoraj prosto. V posebno skupino sodijo superprevodniki, po katerih se nosilci naboja gibljejo povsem prosto, to je brez upora. Če različne snovi postavimo v električno polje, opazimo različne odzivne pojave.

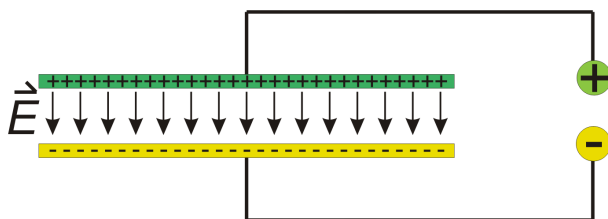
12.1 Električni kondenzator

Za proučevanje odziva snovi na zunanje električno polje pogosto uporabimo ploščati električni kondenzator. Ploščati kondenzator je sestavljen iz dveh kovinskih plošč, ki sta blizu skupaj, a se ne dotikata. Med ploščama je zrak ali vakuum, lahko pa tudi kak drug neprevodnik (izolator). Ploščina vsake plošče je S , razmik med njima pa d . Njuna oblika ni bistvena, dokler sta obe plošči enaki, vzporedni in dovolj blizu. Plošči naelektrimo, tako da ju povežemo na nasprotna pola vira napetosti. Napetost med ploščama kondenzatorja je v ravnovesju enaka napetosti priključene baterije oziroma drugega vira enosmerne napetosti. Ko priključimo napetost, se na eni plošči tako nabere pozitivni naboj e , na drugi pa negativni $-e$. **Električni kondenzator je torej naprava za shranjevanje električnega naboja.**

Preprost izračun pokaže, da je zunaj kondenzatorja električno polje enako nič, znotraj pa je enako dvakratniku polja, ki ga ustvarja posamezna plošča (11.32)

$$E = 2 \frac{e}{2\epsilon_0 S} = \frac{e}{\epsilon_0 S}. \quad (12.1)$$

To seveda ne velja ob robovih, kjer se polje močno spreminja.



Slika 12.1: Električno polje v ravnem ploščatem kondenzatorju. Popačenje električnega polja ob robu plošč ni prikazano.

Polje v kondenzatorju kaže od pozitivno nabite plošče proti negativno nabiti plošči. Je (razen na robovih) homogeno in lahko po enačbi (11.38) izračunamo napetost med ploščama

$$U = Ed, \quad (12.2)$$

kjer je napetost na pozitivno nabiti plošči večja od napetosti na negativno nabiti plošči. Če povežemo obe enačbi, dobimo

$$e = \epsilon_0 S \frac{U}{d}. \quad (12.3)$$

Naboj na kondenzatorju je torej sorazmeren z napetostjo, ki je priključena na plošči. Če vpeljemo še kapaciteto ploščatega kondenzatorja

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}, \quad (12.4)$$

dobimo pomembno zvezo

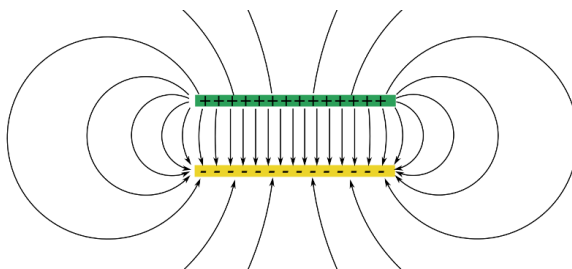
$$e = CU. \quad (12.5)$$

Kapaciteta kondenzatorja je razmerje med nabojem in napetostjo na kondenzatorju. Enota za kapacitivnost je farad po Faradayu¹: $F = \text{As/V}$. Izkaže se, da velja enačba (12.5) v splošnem za poljubno obliko kondenzatorjev, le pravo kapaciteto C moramo upoštevati. Kapaciteta je v splošnem odvisna od velikosti plošč in medsebojnega razmika. Manjši kot je razmik med ploščama, večja je kapaciteta kondenzatorja.

Vzemimo idealiziran kondenzator z neskončnima ravnima ploščama. Ker je električni potencial definiran le do konstante natančno, ga lahko postavimo na nič v poljubni točki. Izberimo potencial nič na sredini med obema ploščama. Potential med ploščama linearno narašča od negativne plošče, na kateri je potencial $-U/2$, do pozitivne plošče, na kateri je potencial $U/2$. Nad pozitivno ploščo je potencial povsod enak $U/2$, pod negativno ploščo pa $-U/2$, saj tam ni električnega polja in se zato potencial ne spreminja. **Znotraj idealnega ploščatega kondenzatorja so ekvipotencialne ploskve ravnine in vzporedne s ploščama**, medtem ko sta zunaj njega »ekvipotencialni ploskvi« cel del 3D-prostora.

Da se na ploščah nabere naboj, smo ju morali priključiti na napetost. Dokler je napetost priključena (in se kapaciteta kondenzatorja ne spreminja), ostaja naboj na kondenzatorju konstanten. Ko je kondenzator napolnjen, lahko vir napetosti odklopimo. Če sta naboja na ploščah povsem izolirana od okolice, se naboj tudi po tem še vedno ohranja. V realnih primerih pa se kondenzator, ki ni priključen na izvor napetosti, prej ali slej izprazni.

★ Omenili smo že, da je električno polje ob robovih končnega kondenzatorja nekoliko deformirano. Oglejmo si tako polje bolj podrobno. Ena plošča kondenzatorja je nabita pozitivno, druga pa negativno. Kondenzator je zato od daleč videti kot električni dipol in silnice so podobne dipolnim (slika 11.14).



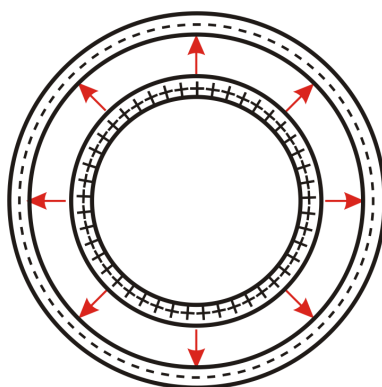
Električne silnice okoli kondenzatorja s končno velikimi ploščami

¹Angleški fizik Michael Faraday (1791-1867), [Wikipedija](#)

Računski zgle 12.1.1 IZpelji kapaciteto kroglnega in valjnega kondenzatorja.

Najprej obravnavajmo krogelni kondenzator, ki je sestavljen iz dveh tankih, kocentričnih krogelnih lupin s polmeroma R_1 in R_2 , $R_1 < R_2$. Notranja lupina (elektroda) naj bo pozitivno nabita, zunanja pa negativno. V prejšnjem poglavju smo spoznali, da je električno polje v notranjosti enakomerno nabite krogle enako nič, zato k polju med ploščama prispeva samo notranja lupina, ki pa jo lahko zaradi simetrije obravnavamo kot točkast naboj. Izračunajmo najprej potencial (oziroma napetost) med ploščama. Uporabimo enačbo (11.36) in zapišemo napetost kot razliko potencialov

$$U = - \int_{R_2}^{R_1} E dr = - \int_{R_2}^{R_1} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{R_2}^{R_1} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$



Slika 12.2: Smer električnega polja v nabitem krogelnem kondenzatorju

Zakaj smo integrirali od R_2 do R_1 ? Integriramo od negativnega naboja k pozitivnemu, torej v nasprotni smeri električnega polja, če želimo dobiti pozitivno napetost. Kapaciteta je kvocient naboja in napetosti

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{1/R_1 - 1/R_2}.$$

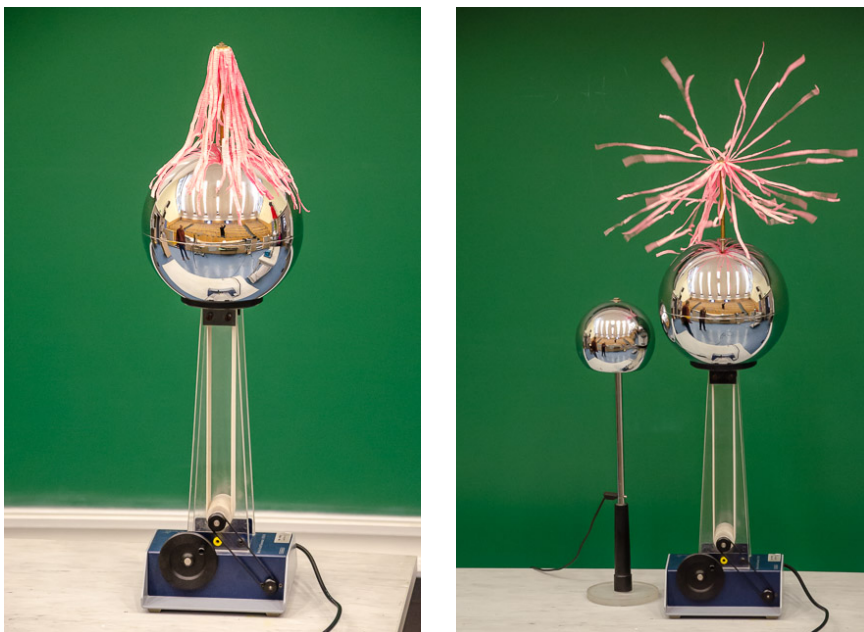
Pri valjnem kondenzatorju računamo podobno. Sestavljen je iz dveh kocentričnih valjev s polmeroma R_1 in R_2 dolžine L , ki je veliko večja od polmerov. Podobno kot pri krogli prispeva k polju med valjema samo notranja pozitivna plošča (elektroda), zunanja pa ne. Uporabimo izraz za električno poljsko jakost okoli nabitega valja (enačba 11.33) in izračunamo napetost

$$U = - \int_{R_2}^{R_1} E dr = - \int_{R_2}^{R_1} \frac{e}{2\pi\epsilon_0 L r} dr = \frac{e}{2\pi\epsilon_0 L} \ln r \Big|_{R_2}^{R_1} = \frac{e}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

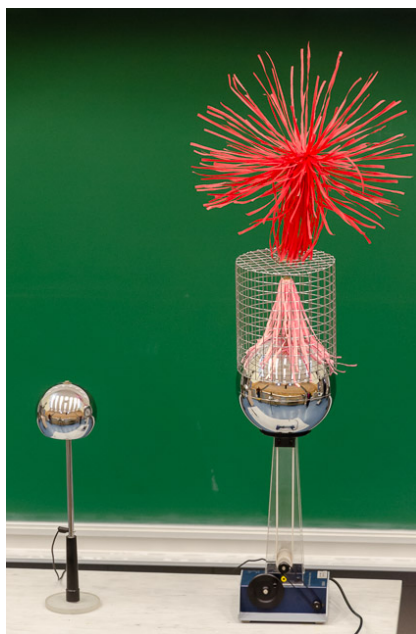
Kapaciteta valjnega kondenzatorja je

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)}. \quad \square$$

Poskus 12.1.1 — Van de Graaffov generator in Faradayeva kletka. Van de Graaffov generator^a je kovinska krogla, na katero lahko s posebnimi ščetkami prenašamo naboj. Na vrhu krogle so rdeči papirnati trakci. Ko kroglo naelektrimo, se naelektrijo tudi trakci in se zaradi električne odbojne sile dvignejo. Če trakce zapremo s kovinsko mrežo, mreža zaslanja električno polje in laski se ne dvignejo. **Kletki iz kovine ali kovinske mreže, ki zastira električno polje, pravimo Faradayeva kletka.** Premer krogle na slikah je 20 cm.



Nenaelektrni in naelektrni papirnati trakci

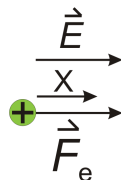


Če papirčke zapremo v kovinsko (Faradayevo) kletko, kletka zaslanja električno polje in trakci se ne naelektrijo.

^aAmeriški fizik Robert Jemison Van de Graaff (1901-1967), [Wikipedija](#)

12.2 Energija kondenzatorja in električnega polja

Obravnavajmo naboj e v homogenem električnem polju z jakostjo E . Naboj e naj bo pozitiven, torej nanj deluje električna sila F_e v smeri električnega polja (slika 12.3).



Slika 12.3: Izpeljava električnega dela

Zanima nas delo, ki ga ob danem premiku naboja opravi električna sila. Spomnimo se, da je delo v primeru konstantne sile kar enako skalarnemu produktu sile in premika (enačba 7.1). Delo električne sile pri premiku x v smeri polja je enako

$$A_e = F_e x = eEx = -e\Delta V = -eU. \quad (12.6)$$

Bodimo pozorni na predznake v zapisani enačbi. Električno delo A_e je v tem primeru pozitivno, saj gre za premik naboja v smeri električne sile in je razlika potencialov (napetost) negativna.

Oglejmo si za primer polnjenje kondenzatorja. Da privedemo električni naboj de' na plošči kondenzatorja, med katerima je pozitivna potencialna razlika $U = \Delta V$, moramo opraviti delo

$$dA_e = Ude'. \quad (12.7)$$

Napetost U med ploščama kondenzatorja je odvisna od naboja, ki smo ga na plošči privedli že pred tem: $U = e'/C$. Celotnega delo, ki ga potrebujemo, da kondenzator napolnimo z nabojem e , je potem

$$A_e = \int_0^e Ude' = \int_0^e \frac{e'}{C} de' = \frac{e^2}{2C}. \quad (12.8)$$

Delo, ki smo ga porabili za naelektritev kondenzatorja, je enako energiji, ki jo ima kondenzator. Električna potencialna energija nabitega kondenzatorja je torej

$$W_e = \frac{e^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2. \quad (12.9)$$

Gornja enačba velja za kondenzator poljubne oblike. Energijo ploščatega kondenzatorja lahko izračunamo, če upoštevajmo njegovo kapaciteto (enačba 12.4). **Energija kondenzatorja je shranjena v električnem polju in je enakomerno porazdeljena po prostornini med ploščama.**

Smiselno je vpeljati še gostoto energije, to je energijo na volumsko enoto. Izračunamo jo tako, da energijo kondenzatorja delimo s prostornino med ploščama $V = Sd$

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{CU^2}{2V} = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2dSd} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(\frac{U}{d}\right)^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2.$$

Tu gre za pomembno novo fizikalno interpretacijo električne energije. Zapišimo to pomembno enačbo še enkrat

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2. \quad (12.10)$$

Enačbo za gostoto energije električnega polja smo izpeljali za ploščati kondenzator, velja pa splošno, tudi za polja drugih konfiguracij električnega naboja, kar vključuje nehomogeno (prostorsko spreminjajoče se) električno polje.

Računski zgled 12.2.1 Izračunaj električno energijo krogelnega kondenzatorja s polmeroma elektrod R_1 in R_2 .


V krogelnem kondenzatorju električno polje ni homogeno, saj se spreminja z oddaljenostjo od izhodišča r . Kljub temu lahko uporabimo enačbo za gostoto energije (enačba 12.10) in z integracijo po prostoru dobimo energijo

$$W_e = \int w_e dV = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 4\pi \int_{R_1}^{R_2} E^2 r^2 dr.$$

Pri tem smo volumski inegral nadomestili z integralom po tankih kocentričnih krogelnih kupinah s prostornino $dV = 4\pi r^2 dr$. Vstavimo še jakost električnega polja v kondenzatorju, ki je kar enako kot polje okoli točkastega naboja, in dobimo

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 4\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} r^2 dr = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{e^2}{2C},$$

pri čemer smo upoštevali izraz za kapaciteto kroglastega kondenzatorja. Z računom smo dobili že znan izraz za energijo. \square

 Naj bo kondenzator na začetku prazen, nato pa ga zvežemo z akumulatorjem s stalno napetostjo U in počakamo, da se napolni. Kondenzator je pridobil električno energijo $W_e = e^2/2C$. Kaj pa akumulator? Na njem je bila stalna napetost U , skozi njega pa je pretekel enak naboj e , kot se je nabral na kondenzatorju. Torej je bilo oddano električno delo akumulatorja $A_e = Ue = CU^2 = e^2/C$. To električno delo je dvakrat večje, kot ga je prejel kondenzator glede na enačbo! Kam je šla torej polovica dela akumulatorja?

Odgovor se morda na začetku zdi nenavaden: polovico dela akumulatorja porabi električni upor v vezju. Uporu se ne moremo izogniti in upor vedno »zapravi« polovico dela akumulatorja, ne glede na to, kako ga zmanjšamo. Problem bomo natančneje opisali pri obravnavi polnjenja in praznjenja kondenzatorja, zaenkrat ga le opišimo. Električni tok se pri polnjenju kondenzatorja postopno zmanjšuje. Napetost akumulatorja se razdeli na trenutno napetost na uporniku in kondenzatorju. Ti dve napetosti se ves čas spreminjata: na začetku, ko je tok največji in je kondenzator še prazen, je vsa napetost na uporniku; na koncu, ko je tok že zanemarljiv, je vsa napetost na kondenzatorju. Ocenimo, da je med polnjenjem na uporniku povprečna napetost enaka $U/2$. Skozi upornik seveda steče enak naboj kot skozi kondenzator, zato je delo na uporniku enako polovici dela akumulatorja, ne glede na velikost upora. Če upor zmanjšamo, se delo torej ne spremeni, spremeni pa se čas polnjenja kondenzatorja, saj je tok skozi vezje večji.

Opisana kvalitativna razlaga je poučen zgled, kako v fiziki kvalitativni odgovor ali grob matematični model pripelje do natančnega ali vsaj kvalitativno pravilnega rezultata.

Električna sila med ploščama kondenzatorja

Napolnimo ploščati kondenzator z nabojem e , nato pa odklopimo napetostni vir in poskrbimo za dobro izolacijo med ploščama. Kolikšna privlačna električna sila deluje med ploščama?

Uporabimo lahko enačbo $\vec{F}_e = e\vec{E}$, pri čemer moramo za \vec{E} vzeti električno polje ene same plošče. Dobimo

$$F_e = eE = \frac{e^2}{2\epsilon_0 S}. \quad (12.11)$$

Delo pri razmiku plošč s stalnim nabojem

Koliko dela opravimo, ko povečamo razmik plošč nabitega kondenzatorja od d_1 na d_2 ? Med razmikanjem plošč je kondenzator odlopljen od vira napetosti, zato se naboj na njem ohranja.

Iščemo delo zunanje sile, ki je nasprotno enako delu električne sile med ploščama. Mislimo si, da levo ploščo držimo na mestu, desno pa premaknemo za $s = d_2 - d_1$. Po enačbi (12.11) je zunanja sila, ki je v ravnovesju z električno silo, konstantna, zato je dovedeno delo kar enako produktu sile in premika

$$A = \frac{e^2}{2\epsilon_0 S}(d_2 - d_1) = \frac{e^2}{2C_2} - \frac{e^2}{2C_1} = \Delta W_e. \quad (12.12)$$

Dobili smo pričakovan rezultat: dovedeno delo je pozitivno in enako spremembi električne energije kondenzatorja. Poudarimo še to, da se z odmikanjem plošč kapaciteta kondenzatorja zmanjšuje. Ker pa sta plošči izolirani, je naboj e ves čas enak, povečuje pa se napetost med ploščama U .

Delo pri razmiku plošč s stalno napetostjo

Kot zadnji primer si oglejmo delo pri razmikanju plošč ploščatega kondenzatorja, ki je ves čas priključen na napetost U . Počasi povečujemo razmik plošč od d_1 na d_2 in izračunajmo delo zunanje sile.

Zdaj sila med ploščama ni konstantna, zato je treba enačbo (12.11) preoblikovati. Z odmikanjem plošč se kapaciteta kondenzatorja zmanjšuje, zato se zmanjšuje tudi naboj e , saj je napetost med ploščama konstantna. Delo je

$$A = \int_{d_1}^{d_2} \frac{e^2}{2\epsilon_0 S} dx = \int_{d_1}^{d_2} \frac{C^2 U^2}{2\epsilon_0 S} dx = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2} \int_{d_1}^{d_2} \frac{dx}{x^2} = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{d_1}^{d_2} \quad (12.13)$$

in

$$A = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d_1} - \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d_2} = \frac{1}{2} C_1 U^2 - \frac{1}{2} C_2 U^2 = -\Delta W_e. \quad (12.14)$$

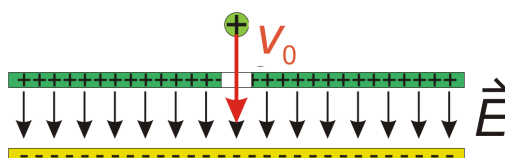
Dovedeno delo je pozitivno in nasprotno enako spremembi električne energije kondenzatorja, ki je zdaj negativna zaradi zmanjšane naboja. Kondenzator je »vrnil« akumulatorju (in nekaj upor) dvakrat več energije, kot jo je dobil od zunanje sile.

12.3 Gibanje električnega naboja v kondenzatorju

Poglejmo, kako se nabiti delci gibljejo v homogenem električnem polju, na primer v kondenzatorju. Na nabit delec v polju deluje električna sila, ki je sorazmerna z nabojem in jakostjo polja. V grobem ločimo dva primera, odvisna od smeri gibanja električno nabitega delca: delec vstopi v kondenzator v smeri pravokotno na plošči ali pa vzporedno s ploščama.

Prehod delca pravokotno na plošči

Če želimo, da prileti delec v kondenzator v smeri pravokotno na plošči, mora biti v vsaj eni od plošč luknjica, skozi katero delec vstopa. Hitrost delca ob vstopu v kondenzator naj bo v_0 , znotraj kondenzatorja pa se delec giblje vzporedno z električnim poljem (slika 12.4).



Slika 12.4: Prehod pozitivno nabitega delca skozi luknjico v kondenzator. Smer gibanja delca je pravokotna na plošči. Pozitivno nabit delec se v kondenzatorju pospeši in zaleti v negativno naelektreno ploščo.

Obravnavati moramo več možnosti, ki so odvisne od predznaka naboja delca in od tega, katera plošča kondenzatorja je pozitivna in katera negativna. Električno polje kondenzatorja lahko delec pospešuje ali pa upočasnjuje. Mi bomo primer obravnavali splošno, nato pa interpretirali za obe možnosti. Hitrost delca v odvisnosti od razdalje x (poti v kondenzatorju) najlepše izračunamo z izrekom o kinetični energiji (enačba 11.7). Ker ni dela zunanjih sil (poleg električne), se skupna kinetična in električna potencialna energija ohranja

$$\Delta W_k + \Delta W_e = 0. \quad (12.15)$$

Dobimo

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \pm |eU \frac{x}{d}|, \quad (12.16)$$

kjer je m masa delca in e njegov naboj, U je napetost med ploščama, d pa razdalja med njima. Če preleti delec celo razdaljo med ploščama, je absolutna vrednost električnega dela podana s celo napetostjo U , pri manjši razdalji x pa pride v poštev le delež x/d te napetosti, saj napetost linearno narašča s koordinato x . Hitrost je tako

$$v = \sqrt{v_0^2 \pm \left| \frac{2eUx}{md} \right|}. \quad (12.17)$$

Če bi hoteli računati, kako se hitrost delca spreminja s časom in ne s potjo, si ne bi mogli pomagati z energijskim zakonom, temveč bi zapisali električno silo in po drugem Newtonovem zakonu izračunali hitrost. Vpliv teže na delec pri tem računu zanemarimo.

Poglejmo še, kateri predznak upoštevamo v izbranem primeru. Če prileti nabit delec v kondenzator skozi ploščo, ki je nasprotno nabita kot delec, se delec upočasnjuje. Vstopna plošča ga namreč privlači, nasprotna plošča pa odbija. Če je vstopna hitrost dovolj velika, lahko delec preleti kondenzator in pride do nasprotne plošče, sicer se nekje obrne in vrne proti vstopni plošči.

Če je vstopna plošča enako nabita kot delec, se delec pospešuje. Vstopna plošča ga namreč odbija, nasprotna plošča pa privlači. Kondenzator ima luknjico tudi v nasprotni, izstopni plošči. Delec bo zapustil kondenzator s hitrostjo, ki je večja od vstopne

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = eU \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2eU}{m}}. \quad (12.18)$$

Tako se pospešujejo osnovni delci (elektroni in protoni) v velikih trkalnikih, npr. v CERNu², a tam je treba zaradi velikih hitrosti upoštevati popravke relativistične fizike.

Računski zglede 12.3.1 Kolikšno napetost potrebujemo, da pospešimo elektron na desetino svetlobne hitrosti? Kaj pa za elektron? Začetno hitrost zanemarimo.

Podatki:

$$e_0 = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ As}$$

$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$v = c/10 = 3 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$$U_1 = ?$$

$$U_2 = ?$$

Nekako do desetine svetlobne hitrosti lahko računamo z nerelativističnimi enačbami. Iz enačbe (12.18) dobimo

$$U_1 = \frac{m_e v^2}{2e_0} = 2,56 \text{ kV}$$

in

$$U_2 = \frac{m_p v^2}{2e_0} = 4,70 \text{ MV}.$$

V zvezi s pospeševanjem osnovnih delcev v električnem polju in tudi v splošnem za podajanje njihovih energij namesto joulov pogosto uporabljamo praktično enoto elektronvolt (eV). **Delec z osnovnim nabojem, ki preleti potencialno razliko 1 V, pridobi ali izgubi kinetično energijo 1 eV** ne glede na svojo maso. Iz enačbe $\Delta W_k = e_0 U$ sledi $1 \text{ eV} \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. V našem primeru pravimo, da ima elektron, ki ga pospešimo do hitrosti $c/10$, kinetično energijo 2,65 keV (kiloelektronvoltov), proton pa 4,70 MeV (megaelektronvoltov). □

★ Kot zanimivost omenimo, kako je z enačbami, ko delec pospešimo skoraj do svetlobne hitrosti c , saj takrat navadne enačbe klasične fizike ne veljajo več. Električno delo izrazimo enako kot pri klasičnem računu $A_e = eU$, relativistični izraz za kinetično energijo pa je

$$W_k = mc^2(\gamma - 1),$$

kjer je γ relativistični faktor

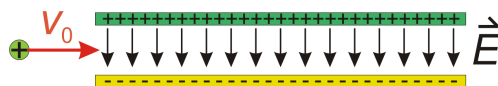
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}.$$

Če želimo pospešiti elektron do hitrosti $v = 0,999c$, potrebujemo napetost 10,9 MV, pri protonu pa 20,0 GV. Že te številke nazorno kažejo, kako težko je priti blizu svetlobne hitrosti, vendar se v velikih trkalnikih vseeno še precej bolj približajo c kot mi v računu.

²Raziskovalni laboratorij v bližini Ženeve v Švici [Wikipedija](#)

Prehod delca vzporedno s ploščama

Oglejmo si še primer, ko vstopi nabit delec v kondenzator v smeri vzporedno s ploščama. Ker na tak delec deluje sila, ki je pravokotna na smer začetne hitrosti, se delec odkloni od prvotne poti. Njegov tir v kondenzatorju je parabola, podobno kot pri vodoravnem metu. Odklon zato računamo z drugim Newtonovim zakonom, težo delca pa spet zanemarimo.



Slika 12.5: Prehod pozitivno nabitega delca v kondenzator. Smer gibanja delca je ob vstopu vzporedna s ploščama, v kondenzatorju pa se tir delca ukrivi proti nasprotno nabiti plošči, v tem primeru navzdol.

Delec se odkloni proč od tiste plošče, ki ima istovrstni naboj kot delec. Naj kaže os x v smeri začetne hitrosti delca, torej $v_x = v_0$. Ta komponenta hitrosti se pri gibanju delca skozi kondenzator ne spreminja, zato je čas preleta delca (če se prej ne zaleti v eno od plošč) skozi kondenzator enak $t = L/v_0$, kjer je L dolžina plošče v smeri leta delca. Računajmo s pozitivnim nabojem delca e (bralec lahko za vajo naredi izračun tudi za negativno nabiti delec). Na delec tedaj deluje sila v smeri pravokotno na plošči

$$F_y = eE = e \frac{U}{d}, \quad (12.19)$$

kjer je U napetost med ploščama, d pa razmik med njima. Zaradi te sile se delec pospešuje v smeri y s pospeškom

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{eU}{md}. \quad (12.20)$$

V času $t = L/v_0$ pridobi delec še komponento hitrosti

$$v_y = a_y t = \frac{eUL}{mdv_0}, \quad (12.21)$$

proti nasprotno nabiti plošči pa se pomakne za

$$y = \frac{a_y t^2}{2} = \frac{eUL^2}{2mdv_0^2}. \quad (12.22)$$

Tak način odklanjanja nabitih delcev od prvotne smeri se pogostop uporablja v tehniki za različne namene. Izračunajmo še kot odklona ob izstopu iz kondenzatorja

$$\varphi = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{eUL}{dmv_0^2}. \quad (12.23)$$

Zapišimo še enkrat premik v prečni smeri ob izstopu iz kondenzatorja (če prej delec na trči v eno od plošč)

$$y = \frac{eUL^2}{2dmv_0^2}. \quad (12.24)$$

Računski zgleđ 12.3.2 Elektron s hitrostjo $v_0 = 10^6$ m/s prileti v kondenzator vzporedno s ploščama. Dolžina plošč je $L = 20$ cm, njun razmik pa je $d = 2$ cm. Elektron prileti v kondenzator na sredini med ploščama. Kolikšna sme biti največ napetost U , da elektron ravno še pride iz kondenzatorja? Za kolikšen kot se odkloni od začetne smeri pri tej napetosti?

Podatki:

$$e_0 = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ As}$$

$$v_0 = 10^6 \text{ m/s}$$

$$L = 20 \text{ cm}$$

$$d = 2 \text{ cm}$$

$$U, \varphi = ?$$

Da elektron ravno še pride iz kondenzatorja, pomeni, da se na celotni dolžini kondenzatorja v prečni smeri premakne za polovico razmika med ploščama. V enačbo (12.24) vstavimo $y = d/2$

$$U = \frac{d^2 m v_0^2}{e L^2} = 57 \text{ mV}.$$

Ustrezni odklon po enačbi (12.23) je $\varphi = 5,7^\circ$. \square

Računski zgleđ 12.3.3 Natrijeve ione Na^+ z zanemarljivo začetno hitrostjo najprej pospešimo s prvim kondenzatorjem z napetostjo 10 kV (kot na sliki 12.4, le z luknjico v obeh elektrodah). Potem jih pošljemo skozi drugi kondenzator (kot na sliki 12.5), da ukloni njihov tir navzdol. Napetost med ploščama tega kondenzatorja je 50 V, plošči, dolgi 10 cm, sta v razmiku 1 cm. Ioni vstopijo v drugi kondenzator na sredini med ploščama. Ali pridejo skozi kondenzator? Če pridejo, za koliko nižje od prvotne smeri zadenejo 2 m oddaljen zaslon?

Podatki:

$$e_0 = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ As}$$

$$U_1 = 10 \text{ kV}$$

$$U_2 = 50 \text{ V}$$

$$d = 1 \text{ cm}$$

$$L = 10 \text{ cm}$$

$$X = 2 \text{ m}$$

$$Y = ?$$

Upoštevamo enačbo (12.18), kjer zanemarimo v_0 , in izračunamo hitrost v_1 , ki jo ima ion po prehodu skozi prvi kondenzator. Ta hitrost bo vstopna hitrost za drugi kondenzator. Premik izračunamo po enačbi (12.24) in dobimo

$$y = \frac{e U_2 L^2}{2 d m v_1^2} = \frac{U_2 L^2}{4 d U_1} = 0,125 \text{ cm}.$$

Ion torej pride skozi kondenzator, saj je $y < d/2$. Navpični premik na zaslonu je $Y = X \cdot \tan \varphi$. V enačbi (12.23) upoštevamo v_1 za vstopno hitrost v drug kondenzator in dobimo

$$\tan \varphi = \frac{U_2 L}{2 d U_1} = \frac{Y}{X} \quad \text{in} \quad Y = \frac{U_2 L X}{U_1 2 d} = 5 \text{ cm}.$$

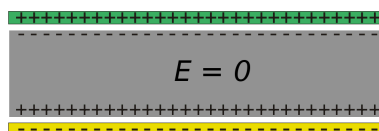
Rezultata sta neodvisna od mase in naboja delca. Zato samo z odklonom Y na zaslonu na ta način ne moremo ugotoviti, za kateri ion gre. \square

12.4 Dielektričnost in polarizacija

Do zdaj smo obravnavali kondenzatorje, ki so imeli med ploščami vakuum ali zrak. Oglejmo si, kaj se zgodi, če damo med plošči kondenzatorja snov.

Prevodnik v kondenzatorju

Če je snov, ki jo damo med nabiti plošči kondenzatorja električno prevodna, opazimo znižanje napetosti na kondenzatorju. Zakaj? V prevodniku so namreč prosti nosilci naboja, na katere v zunanjem polju deluje sila. Ta električna sila povzroči, da se naboji premaknejo na površino materiala (glej sliko 12.6). Dokler na nosilce naboja deluje sila, se premikajo. Premikanje traja toliko časa, da polje povsod v prevodniku pade na $E = 0$. **V statičem primeru v notranjosti prevodnika ni električnega polja.** To velja tudi za votline znotraj prevodnika, kar smo že spoznali, ko smo obravnavali Faradayevo kletko. Polje obstaja le še v režah med prevodnikom in kondenzatorskima ploščama, zato se napetost U zniža.

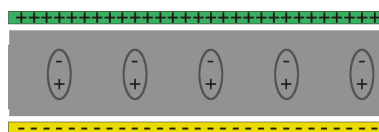


Slika 12.6: Na površini prevodnika, ki ga damo v nabit kondenzator, se naberejo prosti nosilci naboja, ki izničijo zunanje električno polje.

Omenimo še, kaj se zgodi, ko električni prevodnik nabijemo z nabojem e . Naboji istega predznaka se med seboj odbijajo, zato se porazdelijo kar se da narazen, to je po površini prevodnika. **Znotraj prevodnika je v ravnovesju električno polje enako nič, površina prevodnika pa predstavlja ekvipotencialno ploskev električnega polja.**

Dielektrik v kondenzatorju

Osredotočimo se na primer, ko med nabiti plošči kondenzatorja postavimo izolator (dielektrik). V izolatorju so naboji vezani in se ne morejo prosto premikati po snovi. Lahko pa se razmaknejo lokalno in tako ustvarijo električne dipole: pare negativnih in pozitivnih nabojev.



Slika 12.7: V dielektriku, ki ga damo v nabit kondenzator, se naboji lokalno razmaknejo in nastali inducirani dipoli zmanjšajo zunanje električno polje.

Pravimo, da se dipoli inducirajo. Vpeljimo še kvantitativno količino, ki opisuje dipole. **Mera za dipol je dipolni moment \vec{p} , ki je produkt naboja e in vektorja razdalje \vec{r} med pozitivnim in negativnim nabojem**

$$\vec{p} = e\vec{r}. \quad (12.25)$$

Enota za dipolni moment je Asm. Vpeljimo še volumsko gostoto induciranih dipolov. **Volumsko gostoto inducirane električnega dipolnega momenta imenujemo polarizacija**

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{V}. \quad (12.26)$$

Enota za polarizacijo ima enoto As/m².

Zaradi pojava induciranih dipolov (polarizacije) se jakost električnega polja v dielektriku zniža. Privzamimo, da je to znižanje linearno in ga zapišimo s sorazmernostnim faktorjem ϵ

$$E = \frac{E_0}{\epsilon}. \quad (12.27)$$

Pri tem je E_0 polje, ki bi ga imeli na istem mestu sicer brez dielektrika, količino ϵ pa imenujemo dielektričnost snovi. **Dielektričnost opiše odziv snovi na električno polje.** Za dielektričnost velja $\epsilon > 1$. Na primer, dielektričnost papirja je $\epsilon = 2$, metanola $\epsilon = 33$, vode $\epsilon = 80$, zraka pa $\epsilon = 1,00059$, zato je v računih ni treba upoštevati.

Izračunajmo zdaj kapaciteto kondenzatorja, ki je v celoti zapolnjen z dielektrikom. Izhajajmo iz enačbe (12.2) in vstavimo zmanjšano električno polje (12.27)

$$U = Ed = \frac{E_0}{\epsilon} d = \frac{ed}{\epsilon \epsilon_0 S} = \frac{e}{C}. \quad (12.28)$$

Od tod lahko razberemo kapaciteto kondenzatorja z dielektrikom

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}. \quad (12.29)$$

Ker je $\epsilon > 1$, se kapaciteta kondenzatorja z dielektrikom vedno poveča v primerjavi s praznim kondenzatorjem. To pomeni, da je pri enaki napetosti na plošči možno spraviti večji naboj. Temu ustrezno se poveča tudi volumska gostota električne potencialne energije, ki v snovi naraste na

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E^2. \quad (12.30)$$

★ Gostota električnega polja in Gaussov zakon

V prejšnjem poglavju (11.4) smo na hitro že spoznali obliko Gaussovega zakona za izračun jakosti električnega polja v primeru prostorsko simetrično razporejenega naboja. Vpeljimo zdaj gostoto električnega polja in zapišimo Gaussov zakon bolj natančno.

Za opis električnega polja v praznem prostoru je zadoščala jakost električnega polja \vec{E} . V snovi pa potrebujemo zaradi pojava polarizacije še dodatno količino, gostoto električnega polja \vec{D} . Tudi gostota električnega polja je vektor, definirana v vsaki točki prostora. Bistvena razlika med gostoto in jakostjo električnega polja je, da se **gostota električnega polja ne spremeni, če damo v polje dielektrik, jakost električnega polja pa se zmanjša za faktor ϵ .**

V splošnem je povezava med gostoto in jakostjo električnega polja

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}. \quad (12.31)$$

Povečanje gostote električnega polja je ravno zaradi pojava polarizacije, kar lahko zapišemo kot

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (12.32)$$

Iz gornjih enačb neposredno sledi zveza med polarizacijo, dielektričnostjo in jakostjo električnega polja

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \vec{E}. \quad (12.33)$$

Oglejmo si primer. Jakost električnega polja v okolici točkastega naboja že poznamo (enačba 11.4). Gostota polja v okolici točkastega naelektrenega telesa, ki se nahaja v izhodišču koordinatnega sistema, pa je

$$\vec{D} = \frac{e}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (12.34)$$

Še enkrat se spomnimo, da je gostota polja neodvisna od dielektričnosti snovi, v kateri opazujemo električno polje.

Integrirajmo zdaj velikost gostote električnega polja točkastega naboja (ali enakomerno nabite krogle) po krogli, ki obdaja telo

$$\int D dS = D \cdot 4\pi r^2 = \frac{e}{4\pi r^2} 4\pi r^2 = e. \quad (12.35)$$

Izkaže se, da dobimo enak rezultat, če integriramo po katerikoli zaključeni ploskvi okoli naboja, le da moramo v tem primeru upoštevati skalarni produkt med vektorjem gostote polja in vektorjem normale na ploskev

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_S d\Phi_e = e. \quad (12.36)$$

Gornjo enačbo imenujemo Gaussov zakon. **Integral skalarnega produkta vektorja gostote električnega polja in vektorja normale na ploskev po zaključeni ploskvi je enak naboju notraj te ploskve.** Vektor $d\vec{S}$ ima velikost površinskega elementa, usmerjen pa je pravokotno na površinski element. Količino Φ , ki nastopa v integralu, imenujemo električni pretok in jo lahko ponazorimo s pretokom silnic polja skozi izbrano ploskev S . Enota za pretok je As . Ker lahko polje okoli razsežnih naelektrenih teles zapišemo kot superpozicijo polj posamičnih majhnih delov, velja Gaussov zakon tudi za bolj zapletene razporeditve električnih nabojev. Kot smo že spoznali v prejšnjem poglavju, si z Gaussovim zakonom pomagamo pri izračunu polja v okolici simetričnih konfiguracij električnega naboja.

Gaussov zakon je ena od štirih Maxwellovih enačb, ki so opisane v dodatku (poglavje 27).



13. Električni tok

Do zdaj smo obravnavali primere, kjer so naboji mirovali in je bilo v ravnovesju električno polje znotraj prevodne snovi enako nič. V tem poglavju se bomo srečali s primeri, kjer naboji ne mirujejo, ampak se v povprečju premikajo v dani smeri. Premikanju nabojev bomo rekli električni tok. Vpeljali bomo Ohmov in Kirchoffova zakona, s katerimi opisujemo preprosta vezja. Na koncu bomo pogledali, kaj se zgodi, če v vezje dodamo kondenzator.

13.1 Električni tok

O električnem toku govorimo, kadar se električni naboj v povprečju premika z enega mesta na drugo. **Tok v vodniku z danim presekom definiramo kot naboj, ki se v časovnem intervalu pretoči skozi dan presek.** Ker se pretok nabojev s časom lahko spreminja, zapišemo tok v diferencialni obliki

$$I = \frac{de}{dt}. \quad (13.1)$$

Pri konstantnem toku se gornja enačba poenostavi v

$$I = \frac{e}{t}. \quad (13.2)$$

Enota za električni tok je ampere (A), po francoskem znanstveniku Ampèru¹.

★ Mikroskopska slika električnega toka

Povežimo električni tok z mikroskopsko sliko, to je z gibanjem nosilcev naboja v neki snovi. Pri prevajanju električnega toka v kovinah so nosilci naboja elektroni. Naj bo naboj enega nosilca enak e_1 . Po absolutni vrednosti je to velikokrat kar osnovni naboj $e_0 = 1,60 \cdot 10^{-19}$ As ali pa njegov majhen mnogokratnik. V polprevodnikih je prevajanje električnega toka bolj zapleteno, saj so nosilci naboja tako elektroni z nabojem $e_1 = -e_0$ kot njihove vrzeli z nabojem $e_1 = +e_0$. V raztopljenem elektrolitu so nosilci naboja ioni, npr. v raztopni magnezijevega klorida $MgCl_2$ nosijo magnezijevi ioni naboj $e_1 = +2e_0$ zaradi valence 2, klorovi ioni pa naboj $e_1 = -e_0$. Mikroskopsko bomo električni tok opisali s ploščinsko gostoto toka

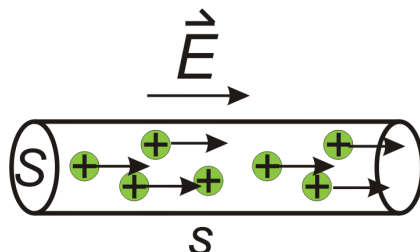
$$j = \frac{dI}{dS}. \quad (13.3)$$

z enoto A/m^2 . Če se gostota toka v neki snovi ne spreminja (je homogena), zapišemo gornji izraz enostavneje

$$j = \frac{I}{S}. \quad (13.4)$$

¹Francoski fizik André-Marie Ampère (1775-1836), [Wikipedija](#)

Pričakujemo, da sta električni tok in njegova gostota premo sorazmerna s hitrostjo gibanja nosilcev naboja, saj se v istem času pretoči tolikokrat več naboja, kolikorkrat se poveča hitrost nosilcev. Privzemimo, da poznamo še en podatek, to je gostoto nosilcev naboja $n = N/V$, kar pomeni njihovo število na prostorninsko enoto.



Mikroskopska slika prevajanja električnega toka po žici. Prikazano je gibanje pozitivnih nabojev. Negativni naboji bi se gibali v levo smer, a električni tok bi bil tudi tedaj usmerjen desno, tako kot električno polje.

Povežimo gornje količine, pri čemer privzamemo homogen in konstantek tok (enačbi 13.2 in 13.4). Dobimo

$$j = \frac{I}{S} = \frac{e/t}{S} = \frac{Ne_1}{tS}. \quad (13.5)$$

V danem času t se je skozi dani prerez S pretočilo N nosilcev naboja. Uporabimo lahko še zvezo $N = nV$, saj se gostota nabojev n ne spreminja, tudi če se naboji premikajo. Za prostornino vzemimo prostornino valja z gornje slike $V = sS$, kjer je $s = vt$ pot, ki jo opravijo elektroni. Sledi

$$j = \frac{nVe_1}{tS} = \frac{nSse_1}{tS} = \frac{nSvte_1}{tS} \quad (13.6)$$

in

$$j = ne_1v. \quad (13.7)$$

Podatka n in e_1 v gornji enačbi sta navadno zelo dobro določena, več težav imamo z določanjem hitrosti v , saj je odvisna od številnih makroskopskih parametrov, tudi od temperature snovi.

Oglejmo si hitrost nosilcev naboja v bolj natančno. Ta hitrost ni resnična hitrost gibanja nosilcev naboja. Elektroni v kovini, na primer, se zaradi termične energije naključno gibljejo v vse smeri z značilno termično hitrostjo v_T . S to hitrostjo se gibljejo tudi brez priključene napetosti. Termična hitrost znaša tipično okoli 10^6 m/s, vendar je v povprečju enaka nič in tok ne teče.

Ko priključimo napetost, se začnejo nosilci naboja v povprečju gibati v smeri električne sile, ki deluje na njih. Samo ta dodatna hitrost v , ki je posledica zunanega polja, prispeva k električnemu toku skozi snov. Smer te hitrosti je vzporedna s smerjo gostote toka j , ki jo lahko imamo za vektor \vec{j} . Če so nosilci naboja pozitivni, kot na primer vrzeli (primanjkljaji elektrona v kristalni mreži), kažeta vektorja \vec{j} in \vec{v} v isto smer, za negativne nosilce, kot so elektroni v kovinah, pa v nasprotno smer. Za hitrost v velja $v \ll v_T$, saj je tipična vrednost za $v \approx 0,2$ mm/s.

Večje kot je električno polje, hitreje se bodo gibali nosilci naboja. Zato vpeljemo še eno količino, gibljivost z enoto $\text{m}^2/(\text{Vs})$. **Gibljivost neposredno povezuje hitrost nosilcev naboja v z jakostjo električnega polja**

$$v = \mu E. \quad (13.8)$$

Poskusimo zdaj povezati električni tok z električno poljsko jakostjo oziroma napetostjo. Izhajamo iz enačbe (13.7) in vstavimo gibljivost (enačba 13.8). Dobimo

$$j = ne_1v = ne_1\mu E = ne_1\mu \frac{U}{L}. \quad (13.9)$$

Pri tem smo upoštevali, da je homogeno električno polje enako kvocientu napetosti in dolžine električnega prevodnika. Nazadnje gostoto toka j pomnožimo s prerezom prevodnika S (če se le ta po dolžini ne spreminja), da dobimo celoten tok I

$$I = ne_1\mu \frac{S}{L}U = \frac{U}{R}. \quad (13.10)$$

13.2 Električna upornost in električna moč

Z mikroskopskim modelom smo pokazali, da je električni tok skozi vodnik/upornik sorazmeren z napetostjo. To lahko zapišemo v obliki Ohmovega zakona², ki pravi, da je **napetost na uporniku sorazmerna s tokom skozi upornik, sorazmernostni faktor pa je upornost**

$$U = RI, \quad (13.11)$$

pri čemer je upornost upornika

$$R = \frac{L}{ne_1\mu S} = \frac{\zeta L}{S}. \quad (13.12)$$

Spotoma smo vpeljali še specifično upornost ζ

$$\zeta = \frac{1}{ne_1\mu}, \quad (13.13)$$

ki je lastnost snovi. Upornost upornika R torej narašča linearno z njegovo dolžino L in poje obratno sorazmerno s prečnim presekom S . Iz tega sledi pomemben zaključek: če dva enaka upornika zvežemo enega za drugim, se njuna dolžina podvoji in prav tako njuna upornost. V splošnem je **upornost več zaporedno vezanih upornikov enaka vsoti posameznih upornosti**

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \quad (13.14)$$

Če pa damo dva enaka upornika enega poleg drugega (vzporedno), se podvoji presek, skozi katerega teče tok, in skupna upornost se razpolovi. V splošnem je **obratna vrednost upornosti več vzporedno vezanih upornikov enaka vsoti obratnih vrednosti posameznih upornosti**

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \quad (13.15)$$

Enota za upornost R je $V/A = \Omega$ (ohm), enota za specifično upornost ζ pa je Ωm . Za praktične namene, npr. za žice, uporabljamo $\Omega \text{ mm}^2/m$, saj je dolžina žice navadno podana v metrih, njen prečni presek pa v mm^2 .

Zapišimo še eno količino, ki se pogosto uporablja, to je specifično prevodnost snovi σ . Specifična prevodnost je inverzna vrednost specifične upornosti

$$\sigma = \frac{1}{\zeta} = ne_1\mu. \quad (13.16)$$

Enota za specifično upornost je $1/(\Omega m) = S$ (siemens)³.

²Nemški fizik in matematik Georg Simon Ohm (1789-1854), [Wikipedija](#)

³Nemški elektrotehnik in izumitelj Ernst Werner von Siemens (1816-1892), [Wikipedija](#)

Računski zgleđ 13.2.1 Kolikšen je upor presekanega stožca z dolžino 20 cm, začetnim prere-zom 5 mm^2 , končnim prere-zom 15 mm^2 in specifično upornostjo $60 \text{ } \Omega\text{mm}^2/\text{m}$?

Podatki:

$$L = 20 \text{ cm}$$

$$S_1 = 5 \text{ mm}^2$$

$$S_2 = 15 \text{ mm}^2$$

$$\zeta = 60 \text{ } \Omega\text{mm}^2/\text{m}$$

$R = ?$

Ker se prečni presek upornika spreminja, imamo spet vajo v integriranju. Spoznali smo, da se upori zaporedno vezanih upornikov seštevajo (enačba 13.14), zato si stožčasti upornik lahko mislimo razdeljen v zelo kratke zaporedne odseke, katerih upornost seštejemo. Upoštevamo, da se polmer r presekanega stožca linearno spreminja po njegovi dolžini od r_1 do r_2 , koordinato $x = 0$ pa vzamemo na ožjem koncu (skiciraj!)

$$R = \zeta \int_0^L \frac{dx}{S(x)} = \zeta \int_0^L \frac{dx}{\pi \left(r_1 + (r_2 - r_1) \frac{x}{L} \right)^2}.$$

Vpeljimo novo integracijsko spremenljivko $t = r_1 + (r_2 - r_1) \frac{x}{L}$ in $dt = (r_2 - r_1) \frac{dx}{L}$. Dobimo

$$R = \zeta \int_{r_1}^{r_2} \frac{L}{\pi(r_2 - r_1) t^2} dt = \zeta \frac{L}{\pi(r_2 - r_1)} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Damo na skupni imenovalec in polmera izrazimo s prese-koma. Dobimo

$$R = \frac{\zeta L}{\sqrt{S_1 S_2}} = 1,38 \text{ } \Omega.$$

Pravilnost izraza preverimo, tako da vzamemo $S_2 = S_1$ in rezultat primerjamo z enačbo (13.12). \square

Preden končamo razdelek, povejmo še nekaj o električni moči. Če enačbo (12.7) za majhno elek-trično delo $dA_e = Ude$ delimo s kratkim časom dt in upoštevamo $I = de/dt$ dobimo električno moč. **Električna moč je produkt napetosti in toka med dvema točkama**

$$P_e = UI. \tag{13.17}$$

Enota za moč je watt⁴, od koder sledi uporabna zveza za enote $W=VA$. Moč, ki se torej porablja na uporniku, je sorazmerna tako z napetostjo kot tokom skozi upor. Ker ti dve količini nista neodvisni, moč, ki se porablja na uporniku z upornostjo R , pogosto zapišemo

$$P = RI^2 = \frac{U^2}{R}, \tag{13.18}$$

pri čemer smo uporabili Ohmov zakon (enačba 13.11). Zaradi te moči se upornik segreva in oddaja odvečno toploto v okolico, če ni toplotno izoliran.

⁴Škotski inženir James Watt (1736-1819), [Wikipedija](#)

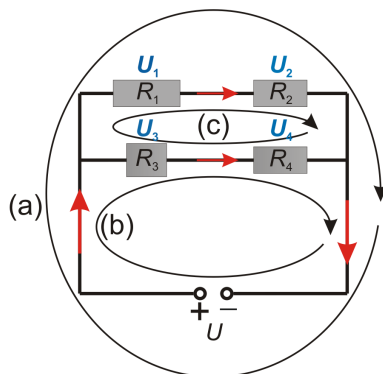
13.3 Kirchhoffova zakona

Oglejmo si preprosta električna vezja z enim ali več viri enosmerne napetosti in uporniki (vključno z veznimi žicami, ki so same tudi uporniki). Zanimajo nas tokovi in napetosti na posameznih upornikih. Pri tem veljata dva Kirchhoffova zakona⁵:

1) **V vsakem razvejišču električnega vezja je vsota vstopnih tokov enaka vsoti izstopnih tokov.** Zakon je posledica bolj splošnega zakona o ohranitvi naboja, iz katerega sledi, da se električni naboj v razvejišču ne kopiči - kolikor ga v dani časovni enoti priteče, ga mora tudi odteči.

2) **V poljubni sklenjeni zanki (krožni poti) v vezju je vsota napetosti enaka nič.** Tudi to trditev zlahka razumemo. Napetost med dvema točkama je vedno razlika njunih električnih potencialov. Če se po krožni poti vrnemo v isto točko, je razlika potencialov seveda enaka nič.

Pri interpretaciji drugega pravila moramo paziti na predznake napetosti. Le v preprostih primerih so predznaki napetosti na vseh elementih vezja zares očitni. Če gremo na primer po veji, ki vsebuje baterijo in upornike ves čas v smeri električnega toka, tako kot ga baterija poganja (od + proti -), vzamemo napetost na bateriji pozitivno, na upornikih pa negativne napetosti.



Slika 13.1: Vzoredno/zaporedna vezava štirih upornikov. Rdeče puščice prikazujejo smer toka.

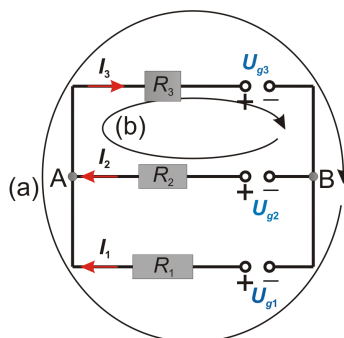
Takšna je npr. zanka (a) in (b) pri kombinirani vzoredno/zaporedni vezavi upornikov na sliki (13.1). Velja $U + U_1 + U_2 = 0$, pri čemer je $U > 0$ napetost izvira in $U_1, U_2 < 0$ padci napetosti na upornikih.

Kaj pa, če gremo po zanki (c), ki nima baterije, v smeri, kot je prikazana? Drugi Kirchhoffov zakon velja za padce na upornikih $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 0$. Po dogovoru v tej zanki velja $U_1, U_2 < 0$, kot v zanki (a), vendar pa $U_3, U_4 > 0$, zato, ker gremo v nasprotni smeri, kot teče električni tok skozi ta dva upornika. Pravilo, da je napetost na uporniku vedno negativna, torej ne velja.

Podoben zaplet lahko nastane z napetostmi na baterijah. Baterija sama poganja tok v vezju v smeri od + proti -. Nato priključimo v krog drugo baterijo, ki temu nasprotuje in bi poganjala tok v nasprotni smeri. Če gremo skozi baterijo v nasprotni smeri, kot bi navadno poganjala tok, moramo vzeti napetost na njej bateriji kot negativno (npr. baterija 3 na sliki (13.2)).

⁵Nemški fizik Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), [Wikipedija](#)

Računski zgleđ 13.3.1 Na sliki (13.2) je vezje z vzporedno vezavo treh baterij in upornikov. Gonilne napetosti baterij so $U_{g1} = 12\text{ V}$, $U_{g2} = 18\text{ V}$ in $U_{g3} = 6\text{ V}$; upornosti pa so $R_1 = 200\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$ in $R_3 = 50\ \Omega$. Kolikšni so tokovi v posameznih vejah vezja?



Slika 13.2: Vzporedna vezava treh baterij in upornikov

Podatki:

$$U_{g1} = 12\text{ V}$$

$$U_{g2} = 18\text{ V}$$

$$U_{g3} = 6\text{ V}$$

$$R_1 = 200\ \Omega$$

$$R_2 = 100\ \Omega$$

$$R_3 = 50\ \Omega$$

$$I_1, I_2, I_3 = ?$$

Za začetek privzamimo, da bateriji 1 in 2 »premagata« tretjo baterijo, to je, da gre tok po tretji veji v nasprotno smer, kot bi sicer tekel skozi baterijo 3. Vsi trije tokovi namreč ne morejo teči v levo, saj bi tako v razvejišče A tokovi samo pritekali, iz B pa samo odtekali. Predvidene smeri tokov so prikazane na sliki. Nič hudega ni, če tok po kateri veji v resnici teče v nasprotno smer, kot predvidevamo! V tem primeru dobimo za ta tok v rešitvi negativen predznak in po njem sklepamo na pravo smer toka.

V vezju imamo tri neznanke - tri tokove. Potrebujemo torej tri enačbe, da sistem lahko enolično rešimo. Prvo enačbo dobimo iz prvega Kirchhoffovega zakona za točko A: $I_1 + I_2 = I_3$. Drugi dve dobimo iz drugega Kirchhoffovega zakona. Izberimo dve zanki v smeri urnega kazalca, in sicer (a) s prvo in tretjo baterijo ter (b) z drugo in tretjo baterijo. V enačbah za napetosti pravilno upoštevamo predznake napetosti in Ohmov zakon za upornike. Dobimo

$$U_{g1} - R_1 I_1 - R_3 I_3 - U_{g3} = 0$$

in

$$U_{g2} - R_2 I_2 - R_3 I_3 - U_{g3} = 0$$

Bralec naj za vajo sam reši sistem. Rešitev je

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3)U_{g1} - R_3 U_{g2} - R_2 U_{g3}}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 8,57\text{ mA},$$

$$I_2 = \frac{(R_1 + R_3)U_{g2} - R_3 U_{g1} - R_1 U_{g3}}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 77,14\text{ mA},$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = 85,71\text{ mA}.$$

Ker imajo vsi trije tokovi pozitiven predznak, pomeni, da smo pravilno uganili smeri tokov. □

★ Vežje na sliki (13.2) je samo preprost zgled za vezja, sestavljena iz množice uporov in več virov napetosti. Če imajo vsi viri konstantno gonilno napetost, lahko vedno zapišemo sistem linearnih enačb z enolično rešitvijo, ki jih navadno rešujemo z Gaussovo metodo na računalniku. Če pa dajejo viri sinusno izmenično napetost (vsi z enako frekvenco), lahko v vezje vključimo tudi tuljave in kondenzatorje. Tudi v tem bolj zapletenem vezju dobimo sistem linearnih enačb za tokove, a v kompleksnih številih, ki jih prav tako lahko rešimo. Seveda moramo nazadnje vzeti realni del kompleksnega merskega števila za tok. S tem dobimo hkrati amplitude sinusnega nihanja in fazne premike za vse tokove.

Oglejmo si še primer, v katerem je sicer samo ena baterija, a poljubno zapleteno vezje upornikov. Upornikom lahko predpišemo en sam nadomestni upor, pri katerem teče skozi baterijo enak tok kot pri sestavljenem vezju uporov.

Najprej vzamemo baterijo z napetostjo U in N zaporedno vezanih uporov od R_1 do R_N . Po enačbi (13.14) sklepamo, da za nadomestni upor velja $R = R_1 + R_2 + \dots + R_N$. To je v skladu z drugim Kirchhoffovim zakonom, po katerem velja $U - R_1 I - R_2 I - \dots - R_N I = 0$, saj gre skozi celotno zanko enak tok I . Obrnemo zapis $U = (R_1 + R_2 + \dots + R_N)I$, kar je isto kot $U = RI$ in $R = R_1 + R_2 + \dots + R_N$ za nadomestni upor.

Vzemimo baterijo z napetostjo U in N vzporedno vezanih uporov R_1 do R_N . Po enačbi (13.15) sklepamo, da za nadomestni upor velja $1/R = 1/R_1 + 1/R_2 + \dots + 1/R_N$. Po prvem Kirchhoffovem zakonu velja, da se tok I skozi baterijo razcepi na tokove skozi upornike $I = I_1 + I_2 + \dots + I_N = U/R_1 + U/R_2 + \dots + U/R_N$, ker je po drugem Kirchhoffovem zakonu napetost na vsakem uporniku nasprotno enaka napetosti na bateriji. Namesto I pišemo U/R , krajšajmo U in res sledi, da se pri vzporedno vezanih upornikih seštevajo inverzni upori.

Pri zelo razvejeni kombinirani vezavi najprej seštevamo zaporedno vezane upore, potem kombiniramo vzporedne vezave itd. Nadomestni upor pri vezavi na sliki (13.1) je tako

$$R = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}, \quad (13.19)$$

kar bo bralec zlahka sam izpeljal.

13.4 Praznjenje in polnjenje kondenzatorja

Zamislimo si kondenzator, ki ga z virom enosmerne napetosti napolnimo do napetosti U_0 . Na kondenzatorju se je nabral naboj $e_0 = CU_0$. Nato vir napetosti odstranimo in kondenzator zvežemo v vezje z upornikom (slika 13.3). Ker smo preko upornika povezali pozitivno in negativno nabito ploščo kondenzatorja, se ob sklenitvi skozi upornik pretoči naboj - steče električni tok. Pravimo, da se kondenzator prek upornika z upornostjo R izprazni. Tok je največji na začetku in ga označimo z I_0 . Izkaže se, da tok eksponentno pojema s časom. Kako hitro, pa je odvisno od kapacitete C in upora R :

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (13.20)$$

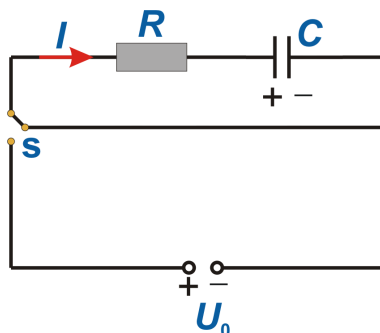
kjer je začetni tok $I_0 = U_0/R = e_0/\tau$, značilni čas praznjenja kondenzatorja pa je

$$\tau = RC. \quad (13.21)$$

Podobna zveza velja za naboj in napetost na kondenzatorju

$$e = e_0 \exp(-t/\tau) \quad \text{in} \quad U_c = U_0 \exp(-t/\tau) \quad (13.22)$$

Zaradi jasnosti smo eksponentno funkcijo zapisali kot \exp , da ne bi prišlo do zamenjave z nabojem e . Napetost na uporniku je nasprotno enaka napetosti na kondenzatorju.

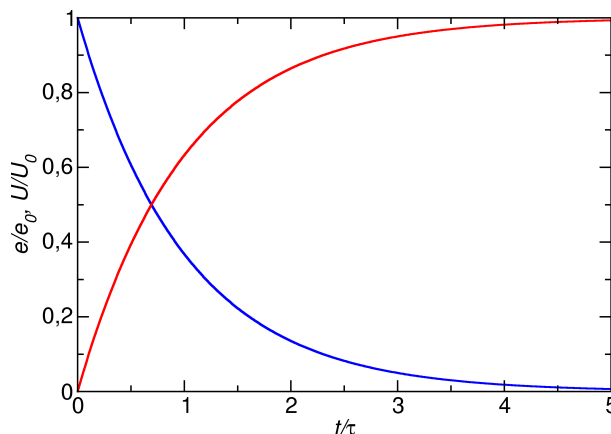


Slika 13.3: Shema vezja baterija, kondenzator in upornik. Najprej je kondenzator preko upornika povezan z baterijo, ko pa ga napolnimo, preklopimo stikalo S in kondenzator se prazni prek upornika.

Oglejmo si še primer, ko kondenzator napolnimo preko upornika. Izkaže se, da tudi pri polnjenju kondenzatorja z baterijo z napetostjo U_0 prek upornika z upornostjo R velja enačba (13.20) za električni tok. Z nabojem in napetostjo na kondenzatorju pa je drugače, saj se povečujeta

$$e = e_0(1 - \exp(-t/\tau)) \quad \text{in} \quad U_c = U_0(1 - \exp(-t/\tau)). \quad (13.23)$$

Napetost smo zapisali pozitivno, čeprav je kondenzator zdaj vezan na napetostni vir in je napetost na njem po strogi definiciji pravzaprav negativna.



Slika 13.4: Odvisnost naboja in napetosti na kondenzatorju med praznjenjem (modra črta) in polnjenjem (rdeča črta). Obe vrednosti sta normalizirani na začetno oziroma končno vrednost, čas pa je normaliziran s τ .

Kako pa je z energijo pri polnjenju kondenzatorja, o čemer smo se vprašali že prej, pri poglavju o električni energiji (poglavje 12.2)? Na osnovi gornjih enačb se da pokazati, da gre pol dela baterije za energijo kondenzatorja, pol pa se porabi za gretje upornika.

Računski zgleđ 13.4.1 Ploščati kondenzator z velikostjo plošč po 1 dm^2 in v razmiku 1 mm najprej napolnimo, potem pa izpraznimo prek bakrene žice s presežom $0,1 \text{ mm}^2$ in dolžino 2 m . V kolikšnem času pade napetost na kondenzatorju na $1/100$ začetne vrednosti? Kolikšna je začetna gostota toka skozi žico, če je začetna napetost 60 V ?

Podatki:

$$S_C = 1 \text{ dm}^2$$

$$d = 1 \text{ mm}$$

$$S = 0,1 \text{ mm}^2$$

$$L = 2 \text{ m}$$

$$\zeta = 0,0175 \text{ } \Omega\text{mm}^2/\text{m}$$

$$U = U_0/100$$

$$U_0 = 60 \text{ V}$$

$$t = ?$$

$$j = ?$$

Izračunajmo najprej relaksacijski čas

$$\tau = RC = \frac{\zeta L}{S} \frac{\epsilon_0 S_C}{d} = 3,1 \cdot 10^{-11} \text{ s.}$$


Nadaljujmo račun z logaritmiranjem enačbe

$$U_0/100 = U_0 \exp(-t/\tau) \rightarrow t = \tau \ln 100 = 1,43 \cdot 10^{-10} \text{ s.}$$

Začetna gostota toka po žici je

$$j_0 = \frac{I_0}{S} = \frac{U_0}{RS} = \frac{U_0}{\zeta L} = 1,71 \text{ GA/m}^2 = 1,71 \text{ kA/mm}^2.$$

Gostota toka je zelo velika, vendar traja praznjenje zelo kratek čas, zato se žica verjetno ne bi stalila. \square

 Zapišimo in rešimo še diferencialno enačbo za praznjenje in polnjenje kondenzatorja. Pri praznjenju imamo v vezju zgolj kondenzator in upornik. Vsota napetosti v zanki mora biti enaka nič

$$U_C + U_R = 0.$$

Uporabimo zvezo $e = CU_C$ (enačba 12.5) in Ohmov zakon $U_R = RI$ (enačba 13.11). Dobimo

$$\frac{e}{C} + RI = 0 \rightarrow \frac{e}{C} + R \frac{de}{dt} = 0,$$

pri čemer smo upoštevali, da je električni tok odvod naboja po času. Enačbo pomnožimo z dt in delimo z e ter nesemo en člen na drugo stran

$$\frac{1}{C} dt = -R \frac{de}{e}.$$

Levo in desno stran enačbe lahko integriramo od začetka praznjenja do časa t . Na levi strani dobimo

$$\int_0^t \frac{1}{C} dt = \frac{t}{C}$$

ter na desni

$$-R \int_{e_0}^e \frac{de}{e} = -R \ln e \Big|_{e_0}^e = -R \ln(e/e_0).$$

Odpravimo logaritem in dobimo znano zvezo

$$e = e_0 \exp(-t/\tau),$$

pri čemer je $\tau = RC$.

Zelo podobno postopamo pri polnjenju kondenzatorja, le da imamo tam v krogu sklenjen še izvir napetosti (baterijo). Vsota napetosti v zanki mora biti po 2. Kirchhoffovem zakonu enaka nič

$$U_0 - U_C - U_R = 0,$$

pri čemer smo padce napetosti označili z negativnim predznakom. Sledi

$$U_0 - \frac{e}{C} - RI = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{U_0 C - e}{C} - R \frac{de}{dt} = 0.$$

Tudi zdaj drugi člen nesemo na desno stran, pomnožimo z dt in delimo z $(U_0 C - e)$:

$$\frac{1}{C} dt = R \frac{de}{U_0 C - e}.$$

Levo stran integriramo in dobimo

$$\int_0^t \frac{1}{C} dt = \frac{t}{C},$$

na desni pa

$$R \int_0^e \frac{de}{U_0 C - e}.$$

Vpeljemo novo spremenljivko $x = U_0 C - e$ in $dx = -de$:

$$R \int_{U_0 C}^{U_0 C - e} \frac{-dx}{x} = -R \ln x \Big|_{U_0 C}^{U_0 C - e} = -R \ln \frac{U_0 C - e}{U_0 C} = R \ln \frac{U_0 C}{U_0 C - e}.$$

Odpravimo logaritem in dobimo že poznano zvezo

$$e = U_0 C (1 - \exp(-t/\tau)) = e_0 (1 - \exp(-t/\tau)).$$

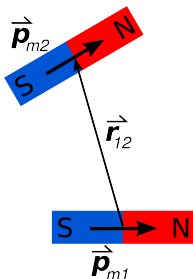
14. Magnetostatika

Podrobneje bomo spoznali magnetno polje in pojave, povezane z njim. Čeprav so pojmi in pojavi precej podobni tistim, ki smo jih spoznali pri obravnavi električnega polja, je med elektrostatiko in magnetostatiko bistvena razlika. V elektrostatiki poznamo električne naboje in ko združimo dva nasprotno predznačena električna naboja, dobimo električni dipol. Magnetni naboji pa ne obstajajo, poznamo samo magnetne dipole. V tem poglavju bomo spoznali permanentne magnetne dipole in njihovo magnetno polje ter druge izvore magnetnega polja na osnovi električnega toka. Zapisali bomo tudi magnetno silo, navor in magnetno potencialno energijo.

14.1 Magnetni dipoli

Že pred več kot 2500 leti so odkrili, da nekatere snovi (na primer magnetit Fe_3O_4) delujejo na druge snovi s silo. Snovi, ki imajo tovrstne lastnosti, uporabljamo za izdelavo t.i. trajnih magnetov. Če naredimo iz take snovi tanko palčko ali iglo, se nastala magnetnica v zemeljskem magnetnem polju usmeri v smeri sever-jug. Del, ki se zasuče proti severu, označimo kot severni magnetni pol (N), nasprotni pa kot južni magnetni pol (S). Vsak magnet ima vedno oba pola: severnega in južnega. Tudi če ga prerežemo na pol, bo še vedno imel dva pola. **Magnetov z enim samim polom ni.**

Količina, s katero opišemo magnet, je magnetni dipolni moment \vec{p}_m z enoto Am^2 . Magnetni dipolni moment (ali na kratko kar dipol) je vektor in kaže v smeri od južnega proti severnemu polu magneta. Iz izkušenj vemo, da se nasprotna pola magneta privlačita, enaka pola pa se odbijata. Sila med dvema magnetnima dipoloma je torej tudi odvisna od njune medsebojne orientacije.



Slika 14.1: Sila med dvema magnetnima dipoloma je odvisna od velikosti magnetnih momentov, orientacije posamičnih dipolov glede na zveznico, medsebojne orientacije dipolov ter od razdalje med njima.

Zapišimo silo med dvema magnetnima dipoloma. Spomnimo se, da je bil zapis sile med dvema nabojema (Coulombov zakon, enačba 11.1) preprost, sile med dvema električnima dipoloma pa nismo zapisali. Enačba za silo med dvema dipoloma (tako električnima kot magnetnima) je razmeroma zapletena, saj ima vsak dipol ne samo velikost, ampak tudi smer. **Sila med dipoloma \vec{p}_{m1} in \vec{p}_{m2} je odvisna od velikosti magnetnih momentov, njihovih smeri in razdalje med dipoloma**

$$\vec{F}_{12} = \frac{3\mu_0}{4\pi r^5} \left((\vec{p}_{m1} \cdot \vec{r}_{12}) \vec{p}_{m2} + (\vec{p}_{m2} \cdot \vec{r}_{12}) \vec{p}_{m1} + (\vec{p}_{m1} \cdot \vec{p}_{m2}) \vec{r}_{12} - \frac{5(\vec{p}_{m1} \cdot \vec{r}_{12})(\vec{p}_{m2} \cdot \vec{r}_{12})}{r^2} \vec{r}_{12} \right). \quad (14.1)$$

Sila \vec{F}_{12} označuje silo prvega magneta na drugega, sila drugega magneta na prvega pa je nasprotno enaka $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$. V zgornjem zapisu je $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ razdalja med magnetoma, $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ pa je vektor od prvega proti drugemu magnetu. **Konstanta μ_0 je induksijska konstanta in znaša $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am.** Omenimo, da je ta fizikalna konstanta določena z matematično natančnostjo in ne z meritvami.

Gornji zapis za silo med dvema magnetnima dipoloma velja na razdaljah, ki so velike v primerjavi z dimenzijami magnetov, tako da jih lahko obravnavamo kot točkaste magnetne dipole. Izračun sile med magnetoma, ki sta ali na majhni oddaljenosti ali tako velika, da moramo upoštevati njune razsežnosti, je še bolj zapleten.

Računski zgled 14.1.1 Izračunajmo silo med dvema magnetnima dipoloma. Prvi dipol naj bo postavljen v izhodišču koordinatnega sistema in naj bo obrnjen v smeri y . Njegov dipolni moment zapišemo kot $\vec{p} = (0, p)$. Drugi magnetni dipol pa naj bo enako velik in enako obrnjen na točki na osi x . Njegovo lego zapišemo kot $\vec{r} = (x, 0)$. Poišči še silo med njima, če drugega prestavimo v točko $(0, y)$.

Izhajamo iz enačbe (14.1). Skalarni produkti med dipolnim momentom in \vec{r} so vsi enaki nič, saj sta vektorja med seboj pravokotna. V prvem primeru ostane samo en člen

$$\vec{F}_{12} = \frac{3\mu_0}{4\pi x^5} (0 + 0 + p^2 \vec{r} - 0) = \frac{3\mu_0 p^2}{4\pi x^5} \vec{r}.$$

Sila kaže vzdolž osi x in je odbojna. Njena velikost je

$$|\vec{F}_{12}| = \frac{3\mu_0 p^2}{4\pi x^4}.$$

Ko drugi magnet prestavimo na os y , dobimo

$$\vec{F}_{12} = \frac{3\mu_0}{4\pi y^5} \left(py\vec{p} + py\vec{p} + p^2\vec{r} - \frac{5p^2 y^2}{y^2} \vec{r} \right).$$

Sila torej kaže v smeri y , njena velikost pa je

$$|\vec{F}_{12}| = \frac{3\mu_0}{4\pi y^5} (3p^2 y - 5p^2 y) = -\frac{3\mu_0 p^2}{2\pi y^4}.$$

Opazimo, da je sila med dipoloma v tem primeru privlačna in po velikosti dvakrat večja od prve. \square

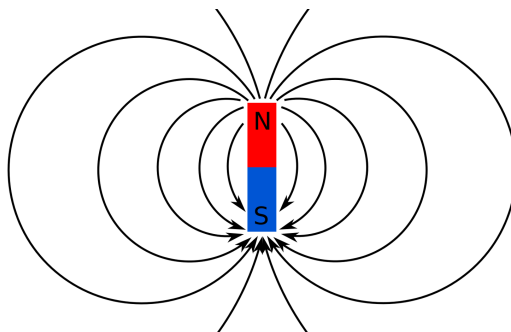
14.2 Magnetno polje

Spoznali smo, da med dvema magnetnima dipoloma deluje sila na daljavo. Iz analogije z električnim poljem vpeljemo koncept magnetnega polja. **Magnetno polje je prostor, v katerem na namagneteno telo deluje magnetna sila ali navor.** Magnetno polje je vektorsko polje, ki ima v vsaki točki prostora določeno velikost in smer. Najpogosteje ga opišemo z gostoto magnetnega polja

$$\vec{B}(r) = \begin{pmatrix} B_x(x, y, z) \\ B_y(x, y, z) \\ B_z(x, y, z) \end{pmatrix}. \quad (14.2)$$

Enota za gostoto magnetnega polja je tesla¹ $T = Vs/m^2$. Vpeljemo še jakost magnetnega polja $\vec{H}(r)$ (enota A/m). Pomembnosti vpeljave se bomo zavedli, ko bomo obravnavali snov v magnetnem polju, podobno kot je razlika med gostoto in jakostjo električnega polja postala pomembna, ko smo v električno polje dodali snov.

Smer polja \vec{B} na izbranem mestu je določena s smerjo, v katero v ravnovesni legi kaže severni pol prosto vrtljive magnetnice. Podobno kot električno polje tudi magnetno polje najlažje grafično ponazorimo s silnicami. Silnice so črte, ki jih dobimo tako, da sledimo smeri vektorja magnetnega polja. Za eksperimentalno ponazoritev namesto majhnih magnetnic uporabimo opilke iz železa.



Slika 14.2: Silnice nakazujejo smer magnetnega polja okoli magnetnega dipola. Njihova oblika je enaka kot okoli električnega dipola (slika 11.14).

Zapišimo gostoto magnetnega polja okoli magnetnega dipola, ki ga postavimo v izhodišče koordinatnega sistema. Za razdalje, ki so velike v primerjavi z dimenzijami dipola, velja

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{p}_m \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3} \right). \quad (14.3)$$

To je splošen zapis, mi si ga oglejmo na primeru, ko je magnetni moment obrnjen v smeri osi z , saj s to izbiro ne izgubimo na splošnosti. Naj bo torej $\vec{p} = (0, 0, p)$. Vpeljimo še polarni kot ϑ (kot med krajevnim vektorjem točke in osjo z) in r kot razdaljo med točko v prostoru in izhodiščem, v katerem leži dipol.

¹Srbsko-ameriški izumitelj Nikola Tesla (1856-1943), [Wikipedija](#)

Po komponentah zapišemo polje

$$B_x = \frac{\mu_0 p}{4\pi} \left(\frac{3 \cos \vartheta \sin \vartheta}{r^3} \right) \quad (14.4)$$

$$B_y = \frac{\mu_0 p}{4\pi} \left(\frac{3 \cos \vartheta \sin \vartheta}{r^3} \right) \quad (14.5)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 p}{4\pi} \left(\frac{3 \cos^2 \vartheta}{r^3} - \frac{1}{r^3} \right) = \frac{\mu_0 p}{4\pi r^3} (3 \cos^2 \vartheta - 1), \quad (14.6)$$

pri čemer smo izračunali projekcijo krajevnega vektorja točke na kordinatne osi. Opazimo, da sta člena B_x in B_y enaka - prav je tako, saj je sistem rotacijsko simetričen okoli osi z . Zato zadošča, da ga rišemo le v ravninskem preseku, npr. ravnini xz . Zanimivo je še preveriti, kako se pri enaki oddaljenosti r velikost gostote polja spreminja s polarnim kotom ϑ . Bralec naj za vajo dokaže, da je polje največje pri kotu 0 ali π .

★ Zveza med magnetno silo in magnetnim poljem ni tako preprosta, kot je bila v primeru električnega polja (enačba 11.3). Pri obravnavi električnega polja je smer električnega polja in hkrati tudi smer sile na naboj vedno kazala v smeri silnic polja. Od tod tudi ime - silnice. Pri magnetnem polju pa se ob takim poimenovanju lahko pojavijo dvomi. Smer magnetne sile na magnetni dipol ali gibajoči naelektreni delec se ne ujema s smerjo magnetnega polja v točki, kjer se delec trenutno nahaja, temveč je sila pravokotna na magnetno polje. Po drugi strani je v nehomogenem magnetnem polju sila na magnetni dipol v določenih primerih res lahko vzporedna s poljem. **V nehomogenem magnetnem polju deluje na dipol magnetna sila, ki dipol vleče v smeri večjega polja** in je po velikosti enaka

$$\vec{F} = \left(\frac{d(\vec{p}_m \cdot \vec{B})}{dx}, \frac{d(\vec{p}_m \cdot \vec{B})}{dy}, \frac{d(\vec{p}_m \cdot \vec{B})}{dz} \right).$$

14.3 Izvori magnetnega polja

Ena vrsta izvorov magnetnega polja so trajni magneti, ki smo jih že omenili. Poleg trajnih magnetov poznamo tudi elektromagnete, pri katerih **magnetno polje nastane kot posledica pretakanja električnega naboja** - električnega toka. Take magnete lahko preprosto vklapljammo in izklapljammo ter spreminjamo gostoto magnetnega polja, ki ga povzročijo.

Polje okoli ravnega dolgega vodnika

Okrog dolgega ravnega vodnika, po katerem teče tok I , nastane magnetno polje. Gostota polja je odvisna od oddaljenosti od vodnika r in pojema obratno sorazmerno z naraščajočim r

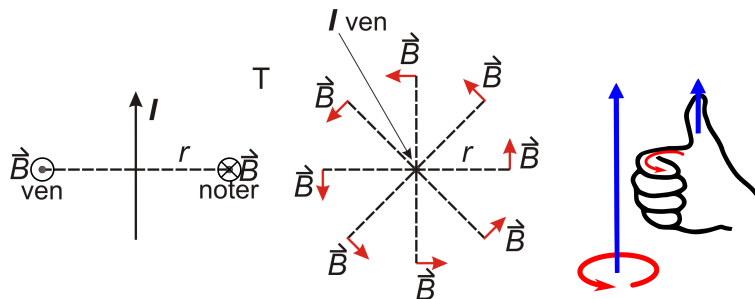
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (14.7)$$

Silnice okrog vodnika so krogi s središčem v žici, smer polja pa določimo po pravilu desne roke (slika 14.3). Če palec roke usmerimo v smeri električnega toka, ukrivljeni preostali prsti kažejo v smeri magnetnega polja okoli žice. Pravilo pogosto imenujemo tudi pravilo desnega vijaka. Če vrtimo desni vijak v smeri magnetnega polja okrog vodnika, teče električni tok v isto smer, kot se giblje vijak.

Žična zanka, po kateri teče tok I , povzroča na velikih razdaljah enako magnetno polje kot točkasti dipol z dipolnim momentom

$$\vec{p}_m = I\vec{S}, \quad (14.8)$$

pri čemer je vektor \vec{S} pravokoten na ravnino zanke, njegova velikost pa je enaka ploščini zanke. Smer dipolnega momenta določimo po pravilu desne roke oziroma desnega vijaka.

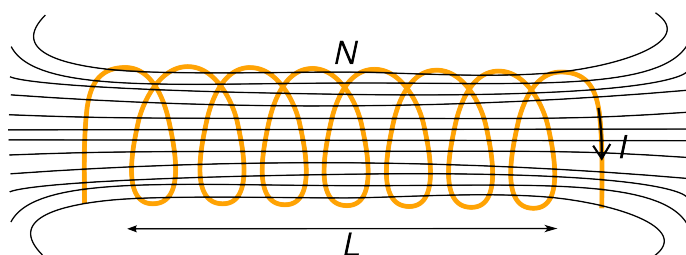


Slika 14.3: Smer magnetnega polja okoli neskončnega ravnega vodnika, po katerem teče tok

Polje znotraj in okoli tuljave

Sestavimo zdaj večje število zank v tuljavo in izračunajmo polje znotraj tuljave in okoli nje. Naj ima tuljava N gosto navitih ovojev po katerih teče tok I , njena dolžina naj bo l . **Znotraj tuljave je magnetno polje praktično homogeno in usmerjeno v smeri osi tuljave.** Gostota magnetnega polja je

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l}. \quad (14.9)$$



Slika 14.4: Večje število zank, po katerih teče tok, sestavimo v tuljavo. Magnetno polje znotraj tuljave je praktično homogeno, zunaj tuljave pa zanemarljivo.

Zunaj tuljave je magnetno polje veliko manjše in ga v približnih računih navadno zanemarimo. To je podobno kot smo zanemarili električno polje v zunanosti ploščatega ravnega kondenzatorja. Sicer je magnetno polje zunaj tuljave dipolno in določeno z dipolnim momentom, ki ga lahko pripišemo tuljavi

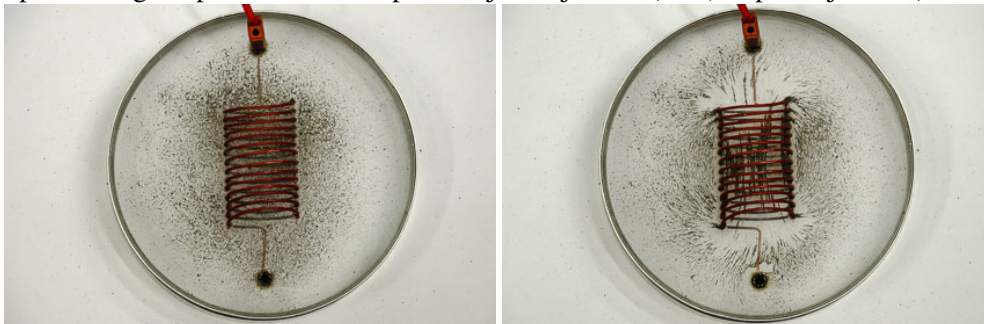
$$\vec{p}_{mt} = N I \vec{S}, \quad (14.10)$$

pri čemer je I tok, ki teče skozi tuljavo, S pa prečni presek njenih navojev.

Poskus 14.3.1 — Magnetno polje okoli ravnega dolgega vodnika. Na papir enakomerno potresemo železne opilke. Navpično skozi ravnino papirja napeljemo žico in skozi njo spustimo električni tok. Opazujemo, kaj se zgodi z opilki. Ko vključimo električni tok, se opilki okrog žice uredijo v koncentrične kroge in s tem nakažejo potek magnetnih silnic. Podobno se zgodi, če namesto ravnega vodnika vzamemo tuljavo ali pa kar trajni magnet.



Opilki okrog navpične ravne žice pred vključitvijo toka (levo) in po vključitvi (desno).



Opilki okrog tuljave pred vključitvijo toka (levo) in po vključitvi (desno).

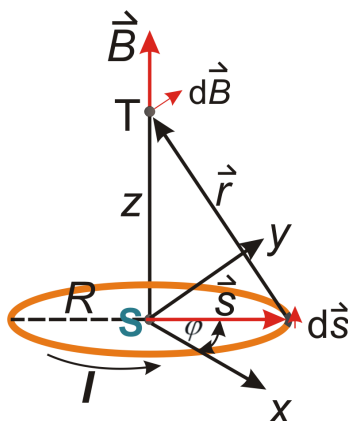
★ Biot-Savartov zakon

Zapisali smo gostoto magnetnega polja okoli dolge ravne žice, po kateri teče električni tok. Če žica ni ravna, je zapis oziroma izračun magnetnega polja precej bolj zapleten. Za vodnik poljubne oblike izračunamo gostoto magnetnega polja v izbrani točki po Biot-Savartovi enačbi²

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (14.11)$$

Z \vec{r} smo označili vektor med izbranim odsekom vodnika z dolžino dl in izbrano točko, smer odseka pa je določena s smerjo toka. Integral s krožcem označuje integral po sklenjeni zanki.

Uporabimo Biot-Savartovo enačbo za izračun gostote magnetnega polja v točki T na geometrijski osi krožne tokovne zanke z radijem R .



K izračunu gostote magnetnega polja na osi krožne tokovne zanke

²Francoska fizika Jean-Baptiste Biot (1774-1862) (Wikipedija) in Félix Savart (1791-1841) (Wikipedija)

Po zanki naj teče tok I . Smer toka (oziroma zanke) je vedno pravokotna na vektor \vec{r} do točke T , zato se vektorski produkt poenostavi. Upoštevati pa moramo smer prispevkov gostote polja $d\vec{B}$.

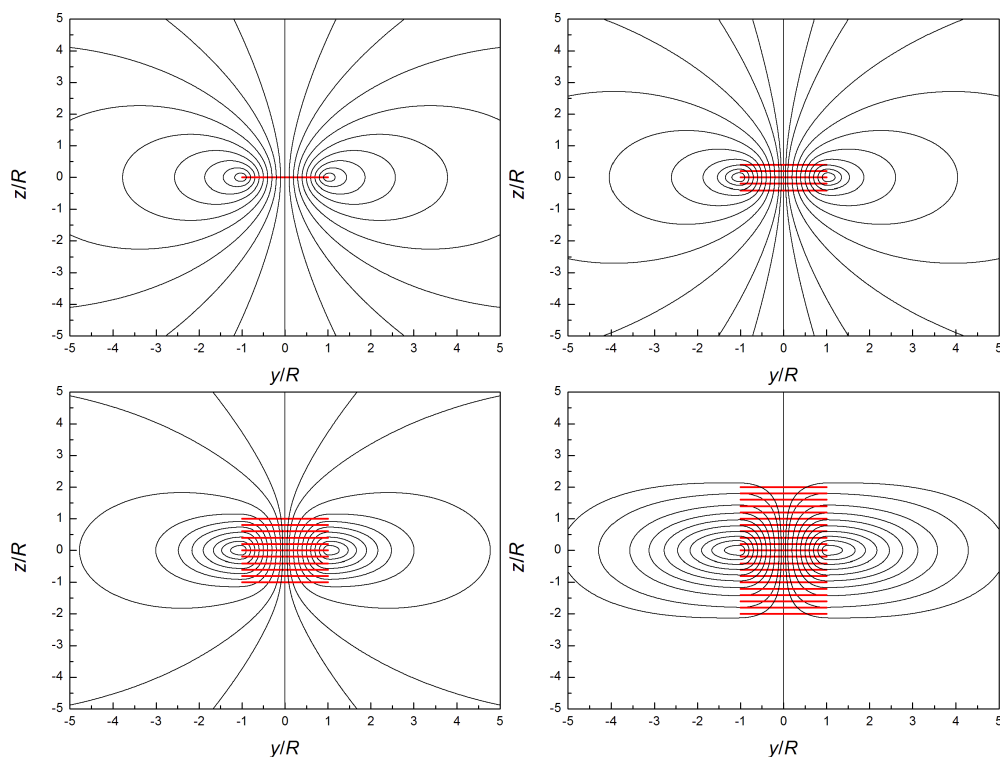
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{ds r R}{r^3} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \oint \frac{ds}{r^3} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \frac{2\pi R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (14.12)$$

Koordinata z določa lego točke na geometrijski osi, pri čemer je $z = 0$ v središču zanke. Magnetno polje kaže zaradi simetrije navpično navzgor na celi geometrijski osi (nad in pod obročem), če teče tok po zanki v nasprotni smeri urnega kazalca. Polje je največje v središču zanke pri $z = 0$:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (14.13)$$

Imejmo zdaj tuljavo z N ovoji in dolžino l , po katerih teče tok I . Tuljava ima geometrijsko obliko spirale, vendar ne naredimo velike napake, če si jo mislimo kot N vzporednih krožnih zank v enakih razdaljah, pri čemer je razmik med sosednjima zankama enak $l/(N-1)$. Magnetno polje dobimo tako, da seštejemo prispevke k magnetnemu polju posameznih zank. Magnetno polje na osi lahko analitično izračunamo, za poljubno točko v prostoru pa moramo Biot-Savartov zakon integrirati numerično. Učinkovita in priljubljena numerična metoda integriranja je po Simpsonovi formuli³.

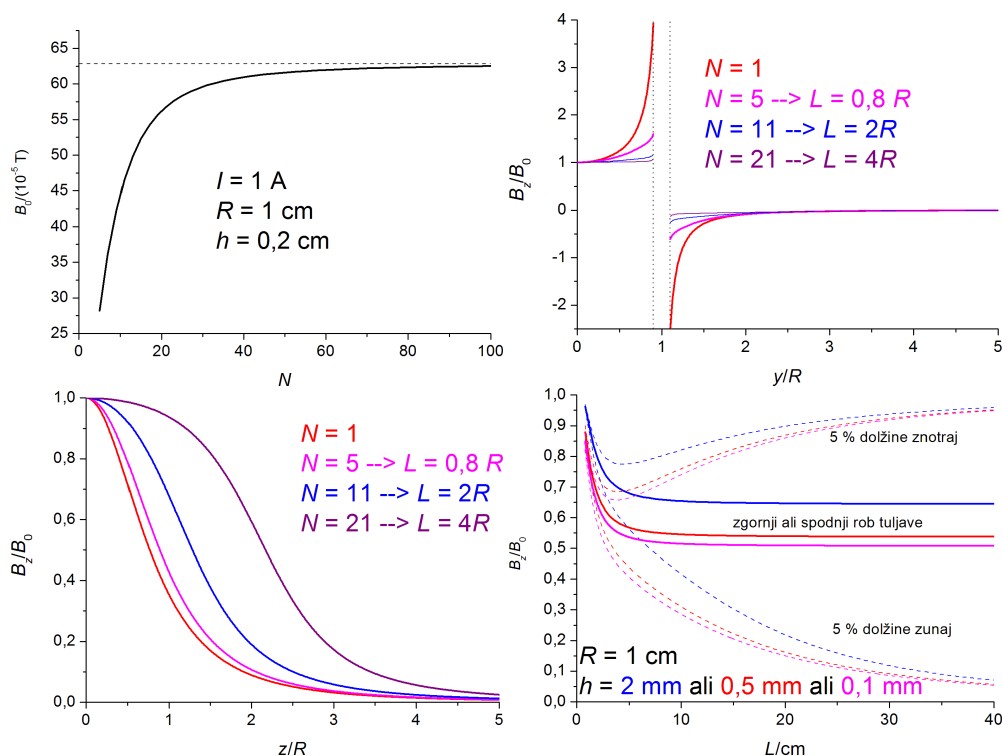
Za prvi zgled izberemo zanko, pri čemer je središče zanke v izhodišču. Magnetno polje v mnogih točkah prostora smo izračunali numerično, pri čemer smo sledili magnetnim silnicam. Slike jasno kažejo na to, da v tuljavi z malo ovoji magnetno polje še zdaleč ni homogeno, vsaj ne po smeri. Zato enačba (14.9) dobro velja le za zares dolgo tuljavo.



Magnetne silnice okoli zanke in tuljav s 5, 11 in 21 ovoji. Z rdečimi črtami so označene zanke oziroma ovoji, po katerih teče tok.

³ Wikipedija

Poglejmo, kako se velikost gostote magnetnega polja v sredini tuljave ($x = y = z = 0$) spreminja s številom navojev. Označimo jo z B_0 , izračunamo pa jo analitično po enačbi (14.12), le da moramo sešteti prispevke vseh N zank. Za konkretno vrednost polja smo vzeli $I = 1$ A in $R = 10$ cm, spreminjali pa smo število ovojev v razmiku po 2 mm. Za majhno število ovojev je polje B_0 približno sorazmerno z N , ker so vse zanke še blizu simetrijski ravnini $z = 0$ in približno enako prispevajo k skupnemu polju. Za velik N postane vrednost polja približno enaka vrednosti, podani z enačbo (14.9). Tedaj polje B_0 ni več odvisno od števila ovojev, temveč samo od razmika med dvema ovojema, l/N .



(a) Magnetno polje B_0 v sredini tuljave v odvisnosti od števila ovojev N . (b) Odvisnost polja B_z na osi y od N in koordinate y ($h = R/5$). Polje je normalizirano na polje v sredini tuljave B_0 . (c) Odvisnost polja B_z na osi z od N in koordinate z ($h = R/5$). (d) Odvisnost polja B_z na osi z ob robu tuljave od l ($h = R/5, R/20$ in $R/100$); pri $l = 40$ cm temu ustreza število ovojev $N = 201, 801$ oz. 4001 .

Kako pa se spreminja magnetno polje vzdolž y in z osi? Zaradi simetrije kaže polje na teh oseh vedno v smeri osi z , zato ga označimo z B_z . Najprej pogledjmo polje na osi y , to je pravokotno na tuljavo (slika b). Numeričen izračun pokaže, da je že pri razmeroma majhnem številu navojev ($N \approx 10$) polje znotraj tuljave praktično homogeno, zunaj tuljave pa zelo majhno. Pri izračunu smo zaradi večje preglednosti izpustili območje tik okoli navojev, saj je tam polje zelo povečano.

Drugačno obnašanje pa je vzdolž osi z , kjer je polje precej nehomogeno (slika c). To je zato, ker je tudi tuljava z 21 ovoji kratka v primerjavi s polmerom R , zato je ne moremo obravnavati kot dolgo tuljavo, za katero v večjem območju notranjosti velja preprosta enačba (14.9). Vzemimo še večje število ovojev in narišimo polje na geometrijski osi z , a le blizu zgornjega ali spodnjega roba tuljave (slika d). Kot neodvisno spremenljivko smo vzeli dolžino tuljave l . Vidimo, da postane polje v tuljavi pri dovolj veliki dolžini precej homogeno in je meja na robu tuljave relativno ostra. Na primer: pri $R = 1$ cm in $l = 40$ cm (in skoraj neodvisno od h) se polje zmanjša od $\approx 95\%B_0$ na $\approx 5\%B_0$, ko gremo iz notranjosti ($5\%l$ do roba tuljave) v zunanost ($5\%l$ od roba tuljave). Če ima tuljava 20-krat večjo dolžino kot premer, se torej na 90 % dolžine tuljave v notranjosti polje na osi z razlikuje za manj kot 5 % od polja B_0 . Zunaj takšne tuljave pa lahko polje razen v neposredni bližini zanemarimo.

14.4 Magnetna sila

Magnetna sila na premikajoč naboj

V električnem polju na nabit delec deluje električna sila. Kako pa je v magnetnem polju? Magnetnih nabojev ni, zato si z analogijo ne moremo pomagati. Prav tako magnetno polje ne učinkuje na posamezen mirujoč električni naboj. Po drugi strani pa vemo, da je magnetno polje povezano z električnim tokom, to je premikajočim nabojem. Sklepamo, da premikajoč naboj poleg električnega ustvarja tudi magnetno polje in da premikajoči naboji drug na drugega delujejo tudi z magnetno silo. Izkaže se, da je magnetna sila na premikajoč naboj

$$\vec{F}_m = e\vec{v} \times \vec{B}, \quad (14.14)$$

pri čemer je \vec{v} hitrost premikanja naboja, e njegov naboj, \vec{B} pa gostota zunanega magnetnega polja. Med vektorjema hitrosti in magnetnega polja je vektorski produkt. To pomeni, da je magnetna sila na premikajoč naboj vedno pravokotna na smer hitrosti. Torej **magnetna sila ne spreminja velikosti hitrosti, ampak samo njeno smer**. Iz kinematike vemo, da je tako gibanje kroženje oziroma gibanje po spirali. **V magnetnem polju nabit delec torej kroži (ali se giblje po spirali), magnetna sila pa ima vlogo centripetalne sile.**

Omejimo se na primer, ko nabit delec vstopi v homogeno magnetno polje pravokotno na smer polja. Tako se bo gibal po krožnici, saj sta \vec{v} in \vec{B} pravokotna, pri računu velikosti sile pa lahko vzamemo kar navaden produkt. Centripetalna sila je ravno magnetna sila

$$F_c = F_m \quad \rightarrow \quad \frac{mv^2}{R} = evB \quad \rightarrow \quad mv = eRB. \quad (14.15)$$

Tako so pri kroženju povezani masa, hitrost in naboj delca ter magnetno polje in radij kroženja.

Kadar na nabiti delec delujeta hkrati električna in magnetna sila prek električnega in magnetnega polja, združimo enačbi (11.3) in (14.14). Dobimo skupno silo, ki jo imenujemo Lorentzova sila⁴

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}. \quad (14.16)$$

Lorentzova sila je osnova za delovanje masnih spektrometrov.

Računski zgled 14.4.1 Nabiti delec prileti s hitrostjo 10^6 m/s v kondenzator z električnim poljem 1 kV/cm, ki je pravokotno na začetno smer gibanja delca. Zaradi tega se njegov tir krivi, vendar to lahko izničimo z magnetnim poljem. Kolikšno (velikost in smer) mora biti magnetno polje, da se delec giblje po ravnem tiru?

Podatki:

$$v = 10^6 \text{ m/s}$$

$$E = 1 \text{ kV/cm}$$

$$B = ?$$

Električna in magnetna sila na delec morata biti nasprotno enaki, magnetno polje pa pravokotno tako na smer gibanja delca kot na električno polje

$$eE = evB \quad \rightarrow \quad B = \frac{E}{v} = 0,1 \text{ T.}$$

Bralec naj sam izbere predznak naboja in skicira smeri obeh polj ter sil na delec. \square

⁴Nizozemski fizik Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), [Wikipedija](#)

Računski zglede 14.4.2 Če nabiti delec prileti v magnetno polje v smeri, ki ni pravokotna na polje, se giblje po vijačnici namesto po krožnici, njena geometrijska os pa kaže v smeri polja. Proton prileti s hitrostjo $c/10$ v magnetno polje 1 T pod kotom $\varphi = 60^\circ$ glede na polje. Kolikšen sta polmer vijačnice in hod (razmik med sosednjima ovojem)?

Podatki:

$$v = c/10$$

$$m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$$

$$B = 1 \text{ T}$$

$$\varphi = 60^\circ$$

$$R = ?$$

$$h = ?$$

Vektor hitrosti razstavimo na komponento $v_p = v \sin \varphi$, ki je pravokotna na magnetno polje \vec{B} , ter na komponento $v_v = v \cos \varphi$, ki je vzporedna s poljem. Polmer izračunamo kot prej, a le s komponento hitrosti v_p , ki je zdaj krožilna hitrost

$$R = \frac{mv_p}{eB} = 27,1 \text{ cm.}$$

V enakem času kot naredi proton en obrat na vijačnici, se pomakne za en hod naprej. Zato je razmerje med obsegom krožnice in hodom enako razmerju komponent hitrosti. Tako lahko izračunamo še hod

$$\frac{2\pi R}{h} = \frac{v_p}{v_v} \rightarrow h = 2\pi R \frac{v_p}{v_v} = 2\pi R \cot \varphi = 98,3 \text{ cm. } \square$$

Računski zglede 14.4.3 Delec z maso m in nabojem e pospešimo v kondenzatorju z napetostjo U . Potem delec prileti v homogeno pravokotno magnetno polje B . V njem naredi samo manjši lok krožnice, ker je območje polja v smeri x začetnega gibanja delca dolgo samo $L \ll R$. Ta delec vpade na oddaljen zaslon, ki je za X oddaljen od območja magnetnega polja. Kolikšen je odmik Y delca na zaslonu od začetne smeri? Ali je odmik odvisen od mase in naboja delca?

Najprej po enačbi (12.18) izrazimo hitrost, s katero delec prileti iz kondenzatorja, začetno hitrost pa zanemarimo

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

S to hitrostjo prileti delec v magnetno polje in se začne gibati po krožnici s polmerom

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

Kot, ki ga opiše delec pri kroženju, preden prileti iz območja polja, je

$$\sin \varphi = \frac{L}{R} = B \sqrt{\frac{e}{2mU}}.$$

Ker pa je ta kot majhen (zaradi $L \ll R$), velja približno $\sin \varphi \approx \tan \varphi$. Odmik Y na zaslonu je

$$Y = X \tan \varphi = XB \sqrt{\frac{e}{2mU}}.$$

V enačbi nastopa tudi masa delca, zato je poskus uporaben kot model masnega spektrometra. \square

★ Če želimo uporabiti enačbo (14.15) za kroženje delcev v velikih trkalnikih, moramo zaradi relativističnih učinkov enačbo malo popraviti

$$m\gamma v = eRB. \quad (14.17)$$

Pri tem smo relativistične pojave upoštevali v dodatnem faktorju γ

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

ki smo ga že omenili in kjer je c svetlobna hitrost. Če bi delec z maso res lahko dosegel svetlobno hitrost, bi potrebovali neskončen radij za kroženje v magnetnem polju. Polmeri cevi v pospeševalnikih in trkalnikih sicer niso neskončni, so pa veliki, ker so hitrosti delcev zelo blizu svetlobni hitrosti.

Računski zgled 14.4.4 Kolikšen je polmer krožnice, po kateri kroži proton s hitrostjo $c/10$ v magnetnem polju 1 T? Kaj pa, če je njegova hitrost $0,99c$?

Podatki:

$$v_1 = c/10$$

$$v_2 = 0,99c$$

$$m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$$

$$B = 1 \text{ T}$$

$$R_1, R_2 = ?$$

V prvem primeru je hitrost protona še dovolj majhna za klasični račun (enačba 14.15)

$$mv = eRB \quad \rightarrow \quad R = \frac{mv}{eB} = 31,3 \text{ cm.}$$

V drugem primeru pa moramo računati po enačbi (14.17)

$$m\gamma v = eRB \quad \rightarrow \quad R = \frac{m\gamma v}{eB} = 22 \text{ m. } \square$$

Magnetna sila na vodnik s tokom

Spoznali smo že, da magnetno polje deluje s silo na trajne magnete in na gibajoče naboje, zdaj pa pogledjmo, kolikšna magnetna sila deluje na vodnik, po katerem teče električni tok.

Naj se raven kos vodnika z dolžino L in presekom S , po katerem teče tok I , nahaja v homogenemu magnetnemu polju z gostoto B . Tok seveda ne pomeni nič drugega kot množico gibajočih se nabojev, silo na njih pa znamo zapisati. Naj bo v opazovanem delu vodnika N elektronov. Sila na ta del žice bo enaka vsoti sil na vseh teh N elektronov

$$F_m = Ne_0vB = nVe_0vB = nSLe_0vB. \quad (14.18)$$

pri čemer smo zaradi preprostejše obravnave privzeli, da sta hitrost in polje pravokotna. Vpeljali smo še gostoto elektronov $n = N/V = N/SL$. Iz zveze za gostoto toka (enačba 13.7) določimo hitrost elektronov

$$j = ne_0v \quad \rightarrow \quad v = \frac{j}{ne_0}. \quad (14.19)$$

Zložimo vse skupaj in dobimo

$$F_m = nSLe_0vB = nSLe_0B\frac{j}{ne_0} = SLBj = ILB, \quad (14.20)$$

saj je gostota toka $j = I/S$. V splošnem zapišemo enačbo v vektorski obliki.

Sila na vodnik, po katerem teče električni tok, je

$$\vec{F} = I(\vec{L} \times \vec{B}), \quad (14.21)$$

pri čemer je L vektor, ki ima velikost dolžine vodnika in kaže v smeri toka.

Ko poznamo silo magnetnega polja na odsek vodnika, po katerem teče tok, lahko izračunamo silo med vzporednima žicama, po katerih tečeta tokova I_1 in I_2 . Razdalja med žicama je r , silo med njima pa preračunamo na določeno dolžino L vzporedno ležečih odsekov žic. Prva žica naj ustvarja okrog sebe magnetno polje z gostoto (enačba 14.7)

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}, \quad (14.22)$$

to polje pa povzroča silo na drugo žico (enačba 14.21)

$$F = I_2 LB. \quad (14.23)$$

Sila med vzporednima žicama dolžine L je tako

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi R}. \quad (14.24)$$

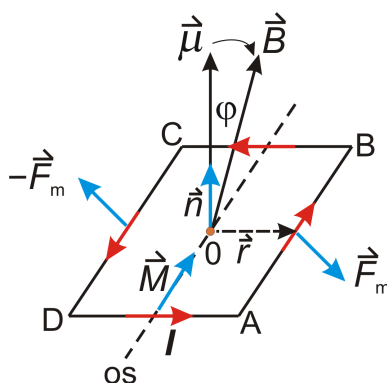
Če tečeta tokova v isto smer, je sila med žicama privlačna, v nasprotnem primeru pa odbojna.

Vzemimo dve žici, po katerih teče tok $I_1 = I_2 = 1$ A. Oddaljeni naj bosta $r = 1$ m in izračunajmo silo, ki deluje med dvema takima žicama na dolžinsko enoto. Po enačbi (14.24) izračunamo, da je $F = 2 \cdot 10^{-7}$ N. Od tod izhaja definicija za osnovno enoto toka amper, ki smo jo navedli v poglavju (4.1).

14.5 Magnetni navor in magnetna potencialna energija

Vzemimo zanko iz električnega vodnika, po katerem teče tok, in jo dajmo v homogeno magnetno polje. Iz enačbe (14.21) hitro sledi, da je celotna sila na tako zanko enaka nič, saj se sile na nasprotno ležeče stranice ravno odštejejo. Iz dinamike razsežnih teles vemo, da težišče takega telesa sicer miruje, lahko pa se vrtili, če nanj delujemo z navorom (poglavje 9.5). Točno to se zgodi v zunanjem magnetnem polju. Ta pojav je osnova za delovanje elektromotorjev.

Imejmo pravokotno zanko s stranicama $a = AB$ in $b = BC$ po kateri teče tok I . Nahaja naj se v homogenem zunanjem magnetnem polju z gostoto \vec{B} (slika 14.5). Enotski smerni vektor, ki je pravokoten na zanko, označimo z \vec{n} , med vektorjema \vec{B} in \vec{n} naj bo ostri kot φ . Prispevki magnetnih sil na vse štiri odseke žice so si zaradi paroma nasprotnih tokov v ravnovesju in njeno težišče miruje. Kako pa je z navori?



Slika 14.5: Magnetni navor na pravokotno zanko, po kateri teče tok

Izberimo si os vrtenja zanke, ki je pravokotna na \vec{B} . K skupnemu navoru prispevata samo odseka AB in CD z dolžino a . Ker sta magnetni sili na ta dva odseka nasprotno enaki, imamo problem navora dvojice sil (slika 9.7). Izračunajmo zato samo eno od teh dveh sil, naj bo to sila na odsek AB . Ta je pravokotna tako na odsek kot na magnetno polje, zato z ročico \vec{r} oklepa kot φ , njena velikost pa je po enačbi (14.21) enaka $F_m = IaB$. Navor glede na os je torej

$$M = IaB \frac{b}{2} \sin \varphi. \quad (14.25)$$

Ker deluje enak navor tudi na odsek CD , je skupen navor na zanko dvakrat večji

$$M = ISB \sin \varphi, \quad (14.26)$$

kjer smo z $S = ab$ označili ploščino zanke. Razvidna je tudi smer delovanja navora. Navor skuša zanko zavrteti v tisto smer, kjer se normalni vektor \vec{n} na zanko ujema s smerjo polja \vec{B} .

Da se pokazati, da te ugotovitve veljajo ne samo za pravokotno zanko, temveč za poljubno ravninsko zanko. Vpeljimo magnetni dipolni moment zanke $\vec{p}_m = IS\vec{n}$ (enačba 14.8) in zapišimo enačbo za magnetni navor v strnjeni obliki

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}. \quad (14.27)$$

Pri tem smo smer dipolnega momenta zanke izbrali kot smer, normalno na ploskev. Dodatno jo izberemo po pravilu desnega vijaka – v smeri gibanja desnega vijaka, če bi ga sukali v smeri električnega toka.

Poskus 14.5.1 — Navor na tuljavo v magnetnem polju Zemlje. Obesimo veliko tuljavo na dolgo vrstico in po njej poženi električni tok. Zaradi magnetnega navora zemeljskega magnetnega polja na magnetni dipol zanke se zanka zasuče. Pri tem se njena geometrijska os poravnava s smerjo polja, torej v smeri sever–jug. Ko tuljavo nekoliko odmaknemo od ravnovesne smeri, tuljava zaniha. Iz nihajnega časa lahko izračunamo velikost magnetnega polja Zemlje. Podatki: tuljava naj ima $N = 300$ ovojev, maso $m = 1,5$ kg in premer $2R = 25$ cm. Obesimo jo na dolgo vrstico in skozi njo poženi električni tok $I = 8$ A.



Tuljava na vrstici za merjenje zemeljskega magnetnega polja

Velikost magnetnega dipolnega momenta tuljave je $p_m = N \cdot \pi R^2 I = 118 \text{ Am}^2$. Izpeljimo zvezo med magnetnim poljem in nihajnim časom takšnega nihala. Obravnava je podobna kot pri sučnem nihalu na polžasto vzmet (poglavje 10.2), le da vrača nihalo v ravnovesno lego magnetni navor. Zapišemo enačbo

$$M = J\alpha = -p_m B \sin \varphi,$$

kjer je J vztrajnostni moment zanke, α kotni pospešek, φ pa odklon od ravnovesne smeri. Za majhne kote vzamemo $\sin \varphi \approx \varphi$ in dobimo

$$\alpha = -\frac{p_m B}{J} \varphi.$$

V gornji enačbi prepoznamo enačbo za sinusno sučno nihanje z nihajnim časom

$$t_0 = 2\pi \left(\frac{J}{p_m B} \right)^{1/2}.$$

Torzijski navor vrvice smo zanemarili. Za vztrajnostni moment zanke vzamemo približek vztrajnostnega momenta tankega obroča pri vrtenju okrog diametralne (ne geometrijske!) osi, to je $J = mR^2/2 = 117 \text{ kg cm}^2$. Izmerimo še nihajni čas $t_0 = 11$ s in lahko izračunamo polje

$$B = 4\pi^2 \frac{J}{p_m t_0^2} \approx 35 \mu\text{T}.$$

Prave vrednosti zemeljskega magnetnega polja so med $30 \mu\text{T}$ in $60 \mu\text{T}$.

Imejmo zdaj v homogenem magnetnem polju zanko, po kateri teče električni tok. V ravnovesju zanka miruje, če pa jo želimo zasukati za nek kot iz ravnovesne lege, moramo opraviti delo. Izračunajmo ga.

Zavrtimo magnetni dipol z magnetnim momentom \vec{p}_m okrog osi, ki je pravokotna tako na dipolni moment kot na magnetno polje. Začetni kot med vektorjema \vec{B} in \vec{p}_m naj bo φ_1 , končni kot po zasuku pa φ_2 . Sukanje naj bo počasno, kar pomeni, da je zunanji navor na dipolni moment praktično nasprotno enak magnetnemu navoru po enačbi (14.27). Delo zunanjega navora izračunamo z integriranjem navora po kotu (enačba 9.8)

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p_m B \sin \varphi d\varphi = -p_m B (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1). \quad (14.28)$$

Delo, ki smo ga dovedli sistemu, lahko pojmujeemo kot razliko energij. To je potencialna energija magnetnega dipola v magnetnem polju. **Magnetna potencialna energija je enaka negativni vrednosti skalarnega produkta magnetnega polja in magnetnega momenta**

$$W_m = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}. \quad (14.29)$$

Čeprav smo to enačbo izpeljali v primeru vrtenja magnetnega dipola na istem mestu, pa velja splošneje, tudi če dipol premikamo sem in tja in tudi, če magnetno polje ni homogeno. Enačba (14.29) je v teoriji magnetizma še pomembnejša od enačbe za navor (14.27), saj si z njo pomagamo pri razlagi raznih magnetnih pojavov v snovi.

Računski zgled 14.5.1 Dolga ravna žica, po kateri teče tok 8 A, v pravokotni smeri prebada horizontalno podlago. V razdalji 5 cm od žice na podlago postavimo prosto vrtljivo majhno magnetnico z magnetnim momentom 15 Am^2 ter počakamo, da se umiri. Nato magnetnico prestavimo na razdaljo 10 cm od žice in jo potem še zavrtimo v nasprotno orientacijo od njene ravnovesne orientacije. Koliko dela opravimo pri celotnem navedenem procesu? Kolikšen je navor magnetnega polja žice na magnetnico v končni legi?

Podatki:

$$I = 8 \text{ A}$$

$$a_1 = 5 \text{ cm}$$

$$p_m = 15 \text{ Am}^2$$

$$a_2 = 10 \text{ cm}$$

$$A = ?$$

$$M = ?$$

Opravljeno delo je po velikosti enako sprememi potencialne magnetne energije. Ker je magnetna energija potencialna, bo sprememba energije odvisna le od začetne in končne lege in ne od poti.

$$A = \Delta W_m = -\vec{p}_{m2} \cdot \vec{B}_2 - (-\vec{p}_{m1} \cdot \vec{B}_1).$$

Z indeksom 1 smo označili začetne vrednosti, z indeksom 2 pa končne. Čeprav se magnetni moment po velikosti ne spremeni, smo ga z indeksom razlikovali, saj mu obrnemo smer. V začetni legi je magnetni dipolni moment poravnal s poljem, zato je namesto skalarnega produkta pozitiven navadni produkt. V končni legi pa je magnetni moment (prisiljeno) obrnjen ravno v nasprotno smer kot kaže polje, zato je namesto skalarnega produkta negativni navadni produkt.

Če upoštevamo vse predznake, uvidimo, da sta pravzaprav oba člena pozitivna, zato

$$A = p_m B_2 + p_m B_1 = p_m \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) = 720 \mu\text{J}.$$

Navor na magnetnico je enak nič tako v začetni kot v končni legi. Res je sicer, da je končna lega v labilnem ravnovesju (maksimum magnetne energije), vseeno pa je navor enak nič. Največji navor bi imeli, če bi postavili magnetno iglo pravokotno na magnetno polje. \square

15. Snov v magnetnem polju

Do zdaj smo obravnavali magnetno polje v praznem prostoru. Oglejmo si, kaj se zgodi, če v magnetno polje damo snov. Za opazovanje odziva snovi na magnetno polje pogosto uporabimo tuljave, zato si jih še enkrat oglejmo.

15.1 Tuljava

Tuljava je navitje žice, po kateri teče električni tok. Električni tok oziroma premikajoči naboji ustvarjajo magnetno polje. Če je tuljava dolga v primerjavi s premerom navitja, je zunaj tuljave gostota magnetnega polja zelo majhna, znotraj tuljave pa je polje večje in praktično homogeno.

Naj ima tuljava N navojev in dolžino l , po njej pa naj teče tok I . Potem je gostota magnetnega polja v tuljavi enaka (enačba 14.9)

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l}, \quad (15.1)$$

kaže pa vzdolž geometrijske osi tuljave. Tuljavi, po kateri teče tok, lahko pripišemo tudi magnetni dipolni moment, ki je dipolni moment zanke, pomnožen s številom ovojev (enačba 14.10).

$$\vec{p}_m = N I \vec{S}. \quad (15.2)$$

Smer dipolnega momenta določimo po pravilu desne roke glede na smer električnega toka.

Poglejmo, kaj se zgodi, če povečamo električni tok skozi tuljavo. Naj bo sprememba toka dI zelo majhna, zato je majhna tudi sprememba magnetnega momenta tuljave. Zaradi spremembe magnetnega momenta se spremeni energija, kar pomeni, da smo morali opraviti delo. Ob majhni spremembi toka je majhno tudi opravljeno delo

$$dA = dW_m = -\vec{p}_m \cdot d\vec{B} = N I S \frac{\mu_0 N dI}{l} = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} I dI = L I dI. \quad (15.3)$$

Količina L , ki smo jo vpeljali, je induktivnost tuljave. **Induktivnost prazne tuljave je lastnost tuljave, saj je podana le z njenimi geometrijskimi parametri: številom navojev, dolžino in presekom tuljave**

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}. \quad (15.4)$$

Pri tem S označuje ploščino enega ovoja in ga ne smemo zamešati s presekom žice, ki tvori navitje. Enota za induktivnost je Vs/A, kar označimo na kratko s simbolom H (henry)¹.

¹ Ameriški fizik Joseph Henry (1797-1878), [Wikipedija](#)

Za izračun dela, ki ga opravimo, da skozi tuljavo steče tok I , moramo majhne prispevke dela dA integrirati. Dobimo

$$A = \int dA = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2. \quad (15.5)$$

To delo ustreza povečanju magnetnega polja v tuljavi. Bolj natančno pravimo, da ustreza povečanju **magnetne potencialne energije tuljave**

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2. \quad (15.6)$$

Vzemimo dolgo tuljavo s presekom S in dolžino l in izračunajmo volumsko gostoto magnetne potencialne energije. To naredimo tako, da magnetno energijo tuljave delimo z volumnom, nato pa zaradi preglednosti zapisa še malo preoblikujemo (upoštevamo enačbo 15.1)

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{LI^2}{2Sl} = \frac{L(Bl)^2}{2Sl(\mu_0 N)^2} = \frac{\mu_0 N^2 S (Bl)^2}{2Sl^2 (\mu_0 N)^2}. \quad (15.7)$$

Dobimo

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (15.8)$$

Izkaže se, da gornji izraz velja tudi za druge primere, npr. za magnetna polja okoli drugih tokovnih navitij oziroma magnetov.

Izpeljali smo magnetno potencialno energijo tuljave, po kateri teče tok, in gostoto magnetne energije. Če primerjamo dobljene rezultate z rezultati za električno polje (enačbi 12.9 in 12.10), vidimo, da obstoja podobnost med dobljenimi izrazi

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} LI^2 & W_e &= \frac{1}{2} CU^2 \\ w_m &= \frac{B^2}{2\mu_0} & w_e &= \frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \end{aligned} \quad (15.9)$$

15.2 Magnetizacija

Glede na odziv v magnetnem polju delimo snovi v tri glavne skupine:

- **paramagnetne**, na primer magnezij, volfram, aluminij;
- **diamagnetne**, na primer voda, živo srebro, baker;
- **feromagnetne**, na primer železo, kobalt, nikelj, zlitine redkih zemelj

Vrsta odziva snovi na zunanje magnetno polje je odvisna od strukture snovi. Bolj natančno lahko rečemo, da je odvisna od interakcije med mikroskopskimi notranjimi magnetnimi momenti v snovi, ki nastanejo kot posledica gibanja elektronov v atomih, in zunanjim magnetnim poljem. Vemo, da magnetno polje na magnetne momente deluje z navorom (enačba 14.27) in jih skuša zasukati v smeri polja. Tako pride do pojavnosti magnetizacije. **Magnetizacija \vec{M} je enaka volumski gostoti inducirani magnetnih momentov v snovi**

$$\vec{M} = \frac{\vec{p}_m}{V}. \quad (15.10)$$

Pri tem opozorimo, da je v dosedanjih poglavjih oznaka \vec{M} pomenila navor, tukaj pa magnetizacijo. Enota za magnetizacijo je A/m. Pozorni bralec je seveda opazil podobnost med magnetizacijo (v primeru magnetnega polja) s polarizacijo (v primeru električnega polja). Obe količini sta podani kot volumska gostota induciranih dipolnih momentov v snovi - magnetnih ali električnih.

Omenili smo že, da lahko magnetno polje opišemo z dvema količinama: gostoto in jakostjo magnetnega polja. V praznem prostoru je zveza med tema dvema količinama preprosta: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$. V snovi pa se zaradi pojava magnetizacije gostota magnetnega polja spremeni. V snovi v splošnem velja zveza

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu \mu_0 \vec{H}. \quad (15.11)$$

Vpeljali smo **magnetno permeabilnost μ , ki opiše odziv snovi na zunanje magnetno polje**. Na podlagi magnetne permeabilnosti tudi natančneje razvrstimo snovi. Snovi, za katere velja $\mu > 1$, so paramagnetne, tiste, za katere velja $\mu < 1$, pa diamagnetne. Večinoma vrednosti μ zelo malo odstopajo od 1. Permeabilnost platine je tako 1,00036, aluminija 1,000023, bakra 0,99999 in bizmuta 0,99982. Obstojajo pa tudi druge snovi, katerih permeabilnost je precej drugačna, ampak več o njih v nadaljevanju.

Iz gornje enačbe izhaja tudi zveza med magnetizacijo in jakostjo magnetnega polja

$$\vec{M} = (\mu - 1) \vec{H}. \quad (15.12)$$

Poglejmo, kaj se zgodi, če v tuljavo damo snov, ki ima magnetno permeabilnost različno od 1. Zaradi magnetizacije se magnetno polje v tuljavi spremeni. Če snov zapolnjuje celotni prostor znotraj tuljave, njeno induktivnost zapišemo kot

$$L = \frac{\mu \mu_0 N^2 S}{l}. \quad (15.13)$$

Prav tako se spremeni tudi gostota energije magnetnega polja v snovi

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{HB}{2}. \quad (15.14)$$

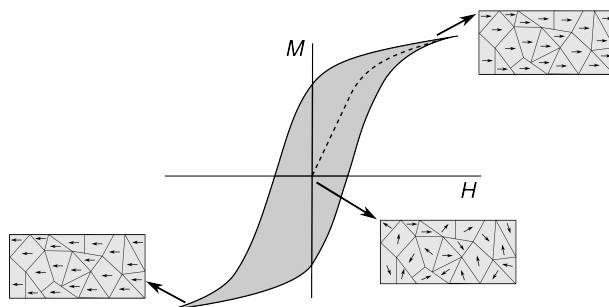
15.3 Feromagnetne snovi

Glede na vrednost magnetne permeabilnosti delimo snovi na diamagnetne ($\mu < 1$) ali paramagnetne ($\mu > 1$). Posebna kategorija paramagnetnih snovi so feromagnetne snovi (ime izhaja iz latinščine: ferrum = železo). Njihova osnovna značilnost je, da **zveza med magnetizacijo \vec{M} in jakostjo polja \vec{H} ni linearna**. Zato tudi zveza med gostoto in jakostjo magnetnega polja ni več linearna oziroma koeficient μ ni konstantna. V feromagnetih je torej permeabilnost μ funkcija velikosti vektorja jakosti polja $\mu = \mu(H)$. Zvezo med jakostjo in gostoto polja v takem primeru zapišemo

$$\vec{B} = \mu(H) \mu_0 \vec{H}. \quad (15.15)$$

Ne glede na odvisnost permeabilnosti od jakosti polja so vrednosti permeabilnosti v feromagnetih precej drugačne od vrednosti v dia- ali paramagnetih, kjer se le malo razlikujejo od 1. V železu ali jeklu, na primer, permeabilnost zlahka doseže vrednosti nekaj tisoč!

Narišimo odvisnosti gostote magnetnega polja od njegove jakosti. Za snovi, pri katerih je permeabilnost konstantna, dobimo premico. V feromagnetih ta odvisnost ni linearna in kaže značilno histerezno krivuljo. Histerezno obnašanje pomeni, da je odziv snovi na magnetno polje odvisen od predhodnega dogajanja v snovi. Povedano drugače: **ko jakost magnetnega polja postopoma povečujemo, se magnetizacija v odvisnosti od polja spreminja drugače, kot pa kadar jakost polja postopoma zmanjšujemo** (slika 15.1).



Slika 15.1: Histerezna zanka v feromagnetni snovi

Pomembna posledica histereznega obnašanja je, da **feromagnetne snovi ostanejo namagnetene** ($\vec{M} \neq 0$), **tudi ko jakost magnetnega polja \vec{H} pade na nič** (poiščite ustrezno točko na grafu!). Če feromagnetno snov namagnetnimo, dobimo trajni magnet. Feromagnetne snovi se uporabljajo tudi kot jedro v elektromagnetih in transformatorjih (več o tem kasneje) ali za spominske naprave (magnetni trakovi, diski).

- ★ Kvalitativna oblika histerezne zanke je za vse feromagnetne snovi enaka, kljub temu pa se njihova točna oblika od snovi do snovi precej razlikuje. Ključna parametra histereze sta remanentna gostota polja (gostota polja, ki ostane, ko jakosti polja ni več $B_r(H = 0)$) in koercitivna jakost polja (jakost polja, ki je potrebna, da gostota pade na nič $H_c(B = 0)$). Glede na karakteristike feromagneta izberemo snov za določeno uporabo. Za trajne magnetne želimo čim širšo histerezo in čim višjo B_r , da imamo močen magnet, ki je neodvisen od zunanega polja. Po drugi strani želimo za transformatorje čim ožjo histerezno zanko in čim manjšo B_r , da je histereza kar se da podobna premici. Za izdelavo magnetnih pomnilnikov (trakovi, diskov) moramo skleniti kompromis med čim večjo B_r in čim ožjo histerezno zanko, da je energija, potrebna za zapisovanje, čim manjša.

Ko feromagnetno snov namagnetimo, postane trajni magnet. Ali jo lahko kako povrnemo v prvotno stanje? Feromagnet lahko razmagnetimo, če ga dovolj segrejemo. Feromagnetni obdržijo svoje lastnosti samo do t.i. Curiejeve temperature², nad temi temperaturami je snov paramagnetna. Curiejeve temperature so praviloma zelo visoke, za železo je 700 °C, za kobalt okoli 1100 °C in za nikelj okoli 350 °C.

- ★ Podobno kot pri feromagnetnih materialih so posebna kategorija dielektrikov feroelektrične snovi. Za šalo omenimo, da je raziskovalcem tu malo zmanjkalo domišljije in so si ime izposodili iz feromagnetizma, čeprav feroelektrične lastnosti nimajo nobene zveze z železom. Pri teh materialih zveza med polarizacijo \vec{P} in \vec{E} ni linearna in zato tudi med \vec{D} in \vec{E} ne. Lahko zapišemo zvezo

$$\vec{D} = \varepsilon(E)\varepsilon_0\vec{E}.$$

Tako kot za feromagnetne snovi je histereza značilna tudi za feroelektrične snovi. Slika histerezne zanke je zelo podobna tisti na sliki (15.1), le da imamo namesto H in M količini E in P .

²Francoski fizik Pierre Curie (1859-1906), [Wikipedija](#)

16. Indukcija

V tem poglavju bomo najprej spoznali magnetni pretok njegovo povezavo z gostoto magnetnega polja. Opisali bomo indukcijo, ki je izredno tehnološko pomemben pojav, saj ravno na osnovi indukcije v elektrarnah in dinamos trojih pridobivajo električno napetost.

16.1 Magnetni pretok

Magnetni pretok skozi neko ploskev definiramo kot produkt velikosti ploskve in gostote magnetnega polja. Če smer polja ni pravokotno na ploskev, upoštevamo samo pravokotno komponento, kar zapišemo s skalarnim produktom

$$\Phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S}, \quad (16.1)$$

pri čemer je ima vektor \vec{S} velikost površine ploskve, njegova smer pa je pravokotno na površinski element. Zapisana enačba velja, če je magnetno polje po celi ploskvi konstantno. Če se spreminja, razdelimo ploščo na majhne delčke, zapišimo prispevke k pretoku za vsak delček posebej in jih seštejemo – integriramo po ploskvi. Dobimo

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (16.2)$$

Enota za magnetni pretok je $Vs = Wb$ (weber)¹.

Magnetni pretok ponazorimo s pretokom silnic polja skozi izbrano ploskev. Za razliko od električnih silnic se magnetne silnice nikjer ne začnejo in ne končujejo. **Magnetne silnice so sklenjene zanke.** To velja tudi pri trajnih magnetih, ker lahko zunanje silnice podaljšamo v notranjost magneta in zanko sklenemo. Pomemba posledica tega je, da je število silnic, ki izvirajo iz danega sistema, enako številu silnic, ki ponikajo vanj. Z drugimi besedami: **magnetni pretok skozi poljubno sklenjeno ploskev je vedno enak nič**

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S d\Phi_m = 0. \quad (16.3)$$

Gornja enačba je posledica dipolne narave magnetnega polja in je ena od štirih zelo pomembnih Maxwellovih enačb, opisanih v dodatku (poglavje 27).

Ugotovili smo, da je magnetni pretok skozi sklenjeno ploskev vedno enak nič. Kako pa je, če ploskev ni sklenjena oziroma če vzamemo zanko iz prevonika, ki v prostoru obdaja ploskev s površino S ? V tem primeru je magnetni pretok povezan z indukcijskim zakonom.

¹Nemški fizik Wilhelm Eduard Weber (1804-1891), [Wikipedija](#)

16.2 Indukcija

Indukcija je pojav, povezan s spremembo magnetnega pretoka. Pri tem je pomembno, da se spreminja pretok, ni pa pomembno, kateri od parametrov povzroči spremembo. To je lahko sprememba v gostoti magnetnega polja, sprememba v velikosti ploskve S ali pa sprememba kota med njima, zaradi česar se spremeni vrednost skalarnega produkta.

Po Lenzovem pravilu² se fizikalni sistem »upira« spremembi magnetnega pretoka. Natančneje: **ob spremembi magnetnega pretoka se pojavi inducirana napetost, ki požene tok v tisti smeri, da zmanjšuje spremembe magnetnega pretoka.** Električni tok, ki steče, namreč ustvari dodatno magnetno polje (recimo mu inducirano magnetno polje), ki delno kompenzira spremembo magnetnega pretoka skozi dano ploskev. Če se torej magnetno polje povečuje, kaže inducirano polje v preprosti geometriji v nasprotno smer, da zmanjša povečevanje magnetnega pretoka skozi ploskev. In nasprotno: če se magnetno polje zmanjšuje, kaže inducirano polje v preprosti geometriji v tisto smer, da zmanjša zmanjševanje magnetnega pretoka skozi ploskev.

Pri obravnavi spremembe magnetnega pretoka je pomembna tudi hitrost spreminjanja. Zato **inducirano napetost določimo s časovnim odvodom magnetnega pretoka**

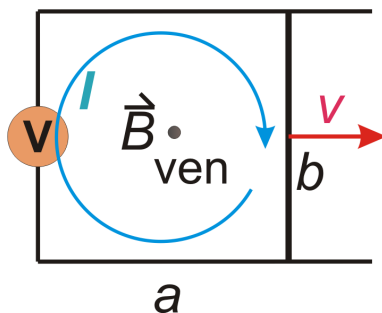
$$U_i = - \frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (16.4)$$

S predznakom minus poudarjamo, da inducirana napetost U_i nasprotuje spreminjanju magnetnega pretoka. Preverimo še enote. Na levi je V, na desni pa $(Vs)/s = V$.

Preverimo veljavnost enačbe (16.4) s preprostim poskusom (slika 16.1). V homogenem magnetnem polju \vec{B} , ki ga dobimo npr. v veliki tuljavi, naj se nahaja žična zanka pravokotne oblike s trenutnima stranicama a in b . Zaradi nazornosti naj bo zanka pravokotna na smer magnetnega polja. Trenutni magnetni pretok skozi pravokotnik je $\Phi_m = BS = Bab$. Ena stranica zanke, recimo tista z dolžino b , je v resnici gibljiva prečka, ki ima dober prevodni stik s preostankom zanke, a lahko drsi po njej praktično brez trenja. To prečko začnemo premikati s hitrostjo v , tako da se ploščina pravokotnika spreminja. Zato se povečuje magnetni pretok, njegov časovni odvod pa je

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(BS)}{dt} = \frac{d(Bab)}{dt} = Bbv, \quad (16.5)$$

saj se spreminja samo dolžina stranice a .



Slika 16.1: Preprost poskus za izpeljavo indukcijskega zakona

²Rusko-nemški fizik Heinrich Lenz (1804-1865), [Wikipedija](#)

Pokazati moramo še, da ima absolutna vrednost inducirane napetosti enako vrednost. Zapišimo magnetno silo na drsečo prečko. Ker smo prečko vlekli s stalno hitrostjo in se je prečka gibala enakomerno, sta morali biti sili na prečko v ravnovesju: sila roke je bila torej po velikosti enaka magnetni sili na prečko. Magnetna sila na prečko pa je (enačba 14.21)

$$F_m = IbB, \quad (16.6)$$

pri čemer je I tok, ki je stekel po zanki zaradi inducirane napetosti U_i . Moč magnetne sile (preznakov ne gledamo), ki porablja moč sile roke, je

$$P = F_m v = IbBv = U_i I, \quad (16.7)$$

pri čemer smo električno moč zapisali kot produkt toka in napetosti (enačba 13.17). Res smo dobili iskani izraz $U_i = Bbv$, kar pomeni, da je enačba (16.4) za ta preprost primer dokazana.

S slike lahko tudi razberemo Lenzovo pravilo. Če zunanje polje \vec{B} kaže navzven in se magnetni pretok skozi žičnato zanko povečuje, steče tok v smeri urnega kazalca. Inducirano magnetno polje, ki nastane zaradi te tokovne zanke, namreč kaže navznoter in tako nasprotuje zunanjemu polju in s tem povečevanju magnetnega pretoka. Kako veliko pa je, bomo izračunali v nadaljevanju v računskem zgledu.

Vzemimo zdaj tuljavo z N ovoji, po kateri teče tok I in tako znotraj nje ustvarja magnetno polje. Magnetni pretok skozi en ovoj tuljave je Φ_1 , skozi celotno tuljavo pa je N -krat večji

$$\Phi_m = N\Phi_1 = N\vec{B} \cdot \vec{S}. \quad (16.8)$$

Če vstavimo še zvezo za magnetno polje znotraj tuljave (enačba 14.9) in izraz za induktivnost tuljave (enačba 15.4), zapišemo magnetni pretok skozi tuljavo kot

$$\Phi_m = N \frac{\mu_0 N I}{l} S = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} I. \quad (16.9)$$

Magnetni pretok skozi tuljavo je produkt induktivnosti tuljave in toka skozi njo

$$\Phi_m = LI. \quad (16.10)$$

Pri tem smo upoštevali, da je smer magnetnega polja, ki ga ustvari tuljava, znotraj tuljave vedno vdolž osi tuljave in vzporedna z normalo na ovoje, zato skalarnega produkta ne pišemo. Inducirana napetost, ki se pojavi na tuljavi, v kateri se spreminja magnetno polje, je tako

$$U_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (16.11)$$

Tuljava je nekakšen vztrajnik za električni tok in se »upira« spreminjanju toka skozi njo, tako kot se telo z maso »upira« spremembi hitrosti gibanja in kot se vztrajnik »upira« spreminjanju kotne hitrosti vrtenja.

Računski zgleđ 16.2.1 Žična zanka (skupaj s drsno prečko) je iz bakrene žice debeline 0,2 mm s specifično upornostjo bakra 17,5 nΩm. Stranici kvadra ob začetku poskusa sta $a = 10$ cm, $b = 5$ cm (glej sliko 16.1). Homogeno zunanje magnetno polje je velikosti 1 T, prečko pa začnemo premikati s hitrostjo 1 cm/s. Kolikšen tok steče skozi zanko?

Podatki:

$$d = 0,2 \text{ mm}$$

$$a = 10 \text{ cm}$$

$$b = 5 \text{ cm}$$

$$v = 1 \text{ cm/s}$$

$$\zeta = 17,5 \text{ n}\Omega\text{m}$$

$$B = 1 \text{ T}$$

$$I = ?$$

$$B_i = ?$$

Izračunajmo najprej inducirano napetost, brez predznaka

$$U_i = Bbv = 0,5 \text{ mV.}$$

Izračunamo še upor zanke

$$R = \frac{\zeta l}{S} = \frac{\zeta 2(a+b)}{\pi d^2/4} = 167 \text{ m}\Omega,$$

od koder sledi tok $I = U/R = 3 \text{ mA}$. □

Računski zgleđ 16.2.2 V tuljavi z N ovoji in prečnim prerezom S je homogeno magnetno polje, ki kaže vzdolž geometrijske osi tuljave. Gostota magnetnega polja eksponentno pojema s časom

$$B = B_0 \exp(-t/\tau).$$

Pri tem je B_0 začetno magnetno polje, τ pa karakteristični čas njegovega pojemanja. Kolikšna inducirana napetost se pojavi vzdolž tuljave?

K skupnemu magnetnemu pretoku prispeva vsak ovoj posebej, zato lahko izračunamo pretok enega ovoja, nato pa ga pomnožimo s številom ovojev. Celotni magnetni pretok je tako

$$\Phi_m = NBS = NB_0S \exp(-t/\tau).$$

Velikost inducirane napetosti je

$$U_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = NB_0S \frac{1}{\tau} \exp(-t/\tau).$$

S časom eksponentno pojema, njena začetna (in največja) vrednost pa je

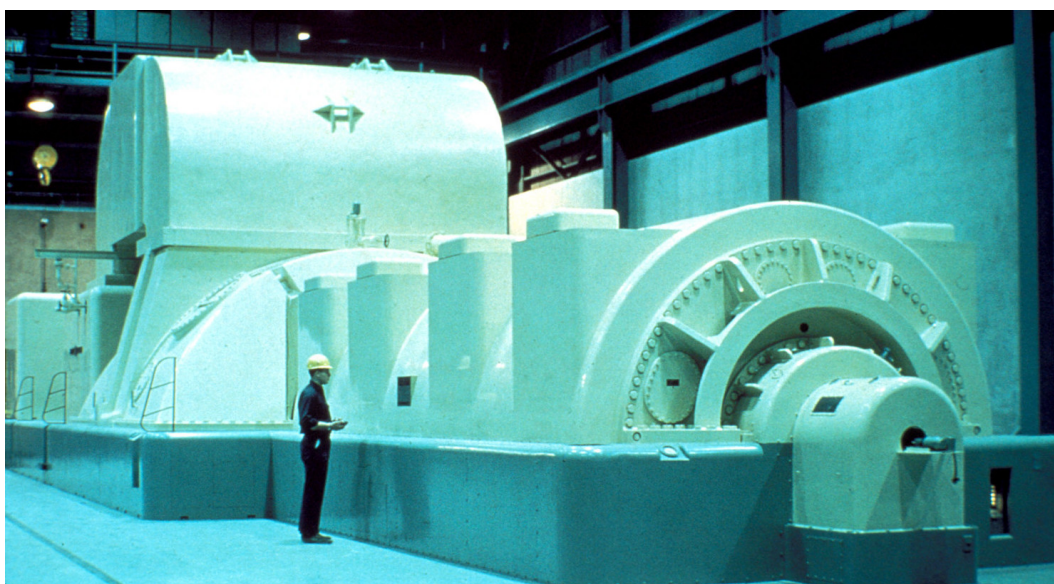
$$U_i(t=0) = \frac{NB_0S}{\tau}. \quad \square$$

Računski zglad 16.2.3 Tuljavo z N ovoji in prečnim prerezom S vrtimo v homogenem zunanjem polju s konstantno kotno hitrostjo ω . Izračunaj inducirano napetost v tuljavi.

V tem primeru se ne spreminjata niti velikost zanke niti velikost magnetnega polja, temveč kot med njima. Ker nastopa v izrazu za magnetni pretok skalarni produkt med \vec{S} in \vec{B} , se magnetni pretok spreminja in pride do pojava inducirane napetosti. Inducirana napetost je

$$U_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d(N\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt} = -\frac{d(NBS \cos(\omega t))}{dt} = NBS\omega \sin(\omega t).$$

Dobimo napetost, ki sinusno niha. Sinusno nihajoči napetosti pravimo izmenična napetost. **Z vrtenjem tuljave v zunanjem magnetnem polju dobimo inducirano izmenično napetost.** Amplituda inducirane napetosti je $U_0 = NSB\omega$, krožna frekvenca pa je enaka kotni hitrosti vrtenja tuljave. Omenjeni pojav je osnova za pridobivanje elektrike v elektrarnah.



Slika 16.2: Vrtenje turbin v elektrarnah se prenese na vrtenje tuljave (rotorja) v magnetnem polju, zato se na njem inducira izmenična napetost. Vir: NRC. □

16.3 Sunek inducirane napetosti

Vemo, da je inducirana napetost enaka odvodu magnetnega pretoka po času (enačba 16.4). Če se polje hitro spreminja, npr. ob izklopu, se tudi inducirana napetost zelo hitro spreminja s časom in je praktično ne moremo pravilno izmeriti. Namesto napetosti zato pogosto vpeljemo drugo količino, sunek napetosti. **Sunek inducirane napetosti je enak spremembi magnetnega pretoka v času trajanja sunka.**

$$\int U_i dt = \Delta\Phi_m. \quad (16.12)$$

Kot smo že vajeni od sunkov gibalne in vrtilne količine, tudi sunek napetosti nima svoje oznake.

Z uporabo indukcije in sunka napetosti lahko izdelamo merilnik za gostoto magnetnega polja B . Tuljavo z znanimi parametri N in S postavimo v magnetno polje na mesto, kjer želimo izmeriti gostoto polja. Tuljavo nato odmaknemo daleč stran, kjer magnetnega polja ni več. Sunek inducirane napetosti, ki ga pri tem dobimo je enak spremembi pretoka in

$$\int_0^t U_i(t)dt = \Delta\Phi_m = NSB - 0 = NSB. \quad (16.13)$$

Če naredimo to na različnih mestih v prostoru, lahko izluščimo $B(r)$, na primer okoli kratke tuljave.

17. Izmenični tok

V tem poglavju bomo obravnavali izmenični tok in napetost, vpeljali impedanco vezja in spoznali delovanje transformatorjev. Izmenični tok je posebej pomemben, saj se v tej obliki prenaša električna energija po daljnovodih, izmenična napetost je tista, ki jo dobimo iz vtičnic, večina elektronskih naprav deluje na izmenični napetosti ... Danes je izmenična napetost nekaj povsem običajnega, proti koncu 19. stoletja pa se je v tehniki bila prava bitka za prevlado enosmernega ali izmeničnega toka¹. Prvega je podpiral Thomas Edison², drugega pa George Westinghouse³ z Nikolo Teslo⁴. Nazadnje je zaradi uporabe transformatorja in zmanjšanjem izgub pri prenosu na daljave zmagal izmenični tok.

17.1 Izmenična napetost, tok in električna moč

V prejšnjem poglavju smo spoznali, da enakomerno vrtenje zanke ali tuljave v zunanem magnetnem polju ustvari sinusno nihajočo inducirano napetost. **Sinusno nihajoči napetosti smo rekli izmenična napetost.** Zapišimo izmenično napetost še z enačbo

$$U = U_0 \cos(\omega t), \quad (17.1)$$

pri čemer sta U_0 amplituda napetosti in $\omega = 2\pi\nu$ krožna frekvenca. Pri tem je na daljšem časovnem intervalu vseeno, ali pišemo sinusno ali kosinusno funkcijo. Če priključimo to napetost na navaden (rečemo mu tudi ohmski) upornik, steče skozi njega električni tok. Za ohmski upornik velja Ohmov zakon (enačba 13.11), zato niha sinusno tudi tok skozi upornik

$$I = I_0 \cos(\omega t), \quad (17.2)$$

pri čemer je I_0 amplituda toka.

V splošnem (npr. za vezja s kondenzatorji ali tuljavami) ne velja Ohmov zakon in tok skozi vezje ni nujno sorazmeren trenutni napetosti na njem. Zato vpeljemo fazni premik δ , ki pove fazno zakasnitev med tokom in napetostjo

$$U = U_0 \cos(\omega t + \delta). \quad (17.3)$$

Če je fazni premik pozitiven in manjši od π , pravimo, da napetost v fazi prehiteva tok, sicer zaostaja. Če fazne razlike ni, pravimo, da sta tok in napetost v fazi.

¹Spor se imenuje vojna tokov (*War of Currents*), [Wikipedija](#)

²Ameriški izumitelj Thomas Alva Edison (1847-1931), [Wikipedija](#)

³Ameriški izumitelj George Westinghouse (1846-1914), [Wikipedija](#)

⁴Srbsko-ameriški izumitelj Nikola Tesla (1856-1943), [Wikipedija](#)

Izračunajmo še električno moč. Spomnimo se, da električno moč zapišemo kot produkt napetosti in toka (enačba 13.17). Ker se tok in napetost s časom spreminjata, se spreminja tudi moč. Zato je smiselno vpeljati povprečno moč

$$\langle P \rangle = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} P(t) dt. \quad (17.4)$$

Izračunamo jo kot povprečje trenutne moči v enem nihajnem času $t_0 = 2\pi/\omega$

$$\langle P \rangle = \frac{\omega U_0 I_0}{2\pi} \int_0^{t_0} \cos(\omega t) (\cos(\omega t) \cos \delta - \sin(\omega t) \sin \delta) dt, \quad (17.5)$$

pri čemer smo uporabili adicijski izrek za sinusno funkcijo $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$. Integral produkta sinusne in kosinusne funkcije v nihajnem času je enak nič. Ostane samo integral s kvadratom kosinusne funkcije, ki je enak

$$\langle P \rangle = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \delta. \quad (17.6)$$

Če je fazna razlika med tokom in napetostjo enaka nič, dobimo največjo povprečno moč $\langle P \rangle_{\max} = U_0 I_0 / 2$. Vsakršna druga fazna razlika med tokom in napetostjo na elementu električno moč zmanjša. V skrajnem primeru, ko je ta razlika $\pi/2$ oziroma četrt nihaja, je povprečna moč enaka nič. Pogovorno uporabljamo izraz »jalova moč«.

Pri izmeničnem toku pogosto vpeljemo še dve količini, to sta efektivni tok in efektivna napetost. Če bi namreč vpeljali povprečni tok, bi bila njegova vrednost enaka nič. Tako pa vpeljemo **efektivni tok, ki je enak korenu povprečnega kvadrata toka**

$$I_{ef} = \sqrt{\langle I(t)^2 \rangle}. \quad (17.7)$$

Za sinusni tok je torej

$$I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \quad (17.8)$$

Podobno lahko vpeljemo tudi efektivno napetost

$$U_{ef} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}. \quad (17.9)$$

Povprečna moč, ki se troši na uporniku je torej enaka, če jo izračunamo s pravim tokom in napetostjo ali pa z efektivnim tokom in efektivno napetostjo

$$\langle P \rangle = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \delta = U_{ef} I_{ef} \cos \delta. \quad (17.10)$$

Še nekaj podatkov o izmenični napetosti. V našem električnem omrežju je efektivna napetost $U_{ef} = 230$ V, frekvenca pa $\nu = 50$ Hz. Bralec naj za vajo sam izračuna amplitudo napetosti U_0 in krožno frekvenco ω . V nekaterih drugih državah (npr. v ZDA) je efektivna napetost $U_{ef} = 120$ V, frekvenca pa $\nu = 60$ Hz.

17.2 Impedanca pri izmeničnem (sinusnem) toku

V tem razdelku bomo obravnavali vezja z upori, kondenzatorji in tuljavami. Izkaže se, da je za računanje najbolj uporaben kompleksen zapis, pri katerem kotne funkcije nadomestimo z eksponentnimi funkcijami z imaginarnim argumentom. Uporabimo znano Eulerjevo formulo⁵

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (17.11)$$

Pri tem je i imaginarna enota, φ pa realno število. Predstavlja geometrijski kot, lahko pa si ga predstavljamo tudi kot fazo. Zapišimo zdaj v kompleksnem zapisu električni tok $I = I_0 \cos(\omega t)$. Najprej ga razširimo z imaginarnim delom, nato pa oba dela združimo v kompleksni tok

$$I = I_0 e^{i\omega t}. \quad (17.12)$$

Z dobljenim kompleksnim tokom računamo naprej, čisto na koncu računa pa moramo vzeti samo realni del količine.

Ohmski upornik

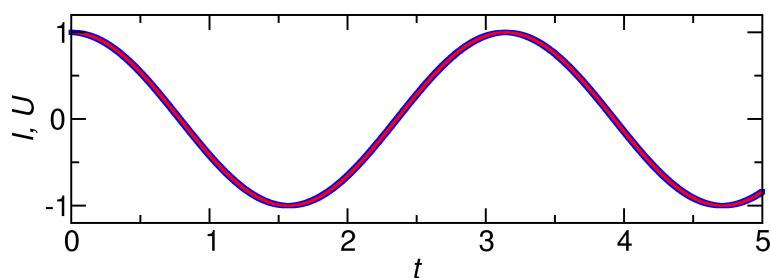
Za ohmski upornik velja, da je na njem padec napetosti U premo sorazmeren z električnim tokom skozenj I , ne glede na vrednost napetosti. Napetost in tok povezuje Ohmov zakon, ki velja tudi v primeru izmenične napetosti

$$U(t) = RI(t). \quad (17.13)$$

Od tod sledi

$$U_0 e^{i\omega t} = RI_0 e^{i\omega t}. \quad (17.14)$$

Fazni zamik med tokom in napetostjo na ohmskem uporniku je enak nič ($\delta = 0$).



Slika 17.1: Pri ohmskem uporniku nihata napetost in tok v fazi.

Kondenzator

Priključimo kondenzator v vezje, po katerem teče izmenični tok. Trenutni naboj na kondenzatorju izračunamo, tako da integriramo tok po času

$$e = \int I dt = \int I_0 e^{i\omega t} dt = \frac{I_0}{i\omega} e^{i\omega t}. \quad (17.15)$$

⁵Švicarski matematik Leonhard Euler (1707-1783), [Wikipedija](#)

Pri tem nismo zapisali mej integriranja in integracijsko konstanto nedoločena integrala smo postavili na nič. Upravičenost te izbire ni očitna, je pa povezana s tem, kako se pri sinusnem toku kondenzator izmenično polni in prazni. To uvidimo, ko se vrnemo od kompleksnega k realnemu zapisu. Zapišimo še napetost na kondenzatorju

$$U = \frac{e}{C} = \frac{I_0}{i\omega C} e^{i\omega t}. \quad (17.16)$$

Podobno kot pri ohmskem uporniku vpeljemo tudi pri kondenzatorju nekakšen efektivni upor kot kvocient med napetostjo in tokom. Zaradi nedvoumnosti ga imenujemo impedanca in označimo s simbolom Z . **Impedanca Z je količnik med električno napetostjo in tokom.** Za kondenzator jo izračunamo iz enačb (17.15) in (17.16)

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}. \quad (17.17)$$

Pomen imaginarnega faktorja v imenovalcu razumemo, če se vrnemo k realnemu zapisu. Zapišimo tok in napetost kot realni del kompleksne količine

$$I = \Re(I_0 e^{i\omega t}) \quad (17.18)$$

in

$$U = \Re\left(\frac{I_0}{i\omega C} e^{i\omega t}\right). \quad (17.19)$$

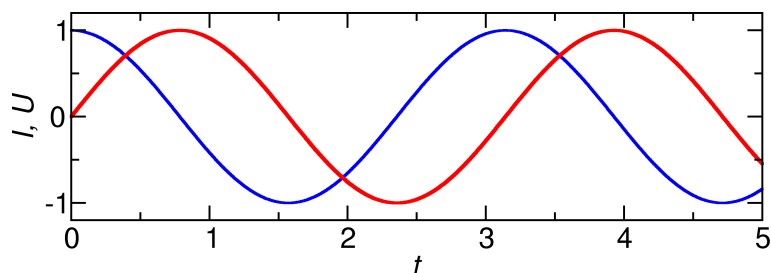
Oznaka \Re pomeni realni del izraza v oklepaju. Za napetost dobimo

$$U = \Re\left(\frac{I_0}{i\omega C} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))\right) = \Re\left(-i \frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t) + \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t)\right). \quad (17.20)$$

Sledi

$$U = \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t) = \frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t - \pi/2). \quad (17.21)$$

Če smo električni tok zapisali s kosinusno funkcijo časa, je napetost na kondenzatorju sinusna funkcija. Imaginarni faktor v izrazu za impedanco kondenzatorja (enačba 17.17) pomeni, da je **fazna razlika med tokom in napetostjo na kondenzatorju $-\pi/2$** , kar v časovnem merilu pomeni četrtno nihajnega časa. Kaj je tisto, kar v fazi ali času prehiteva, tok ali napetost, pa lahko bralec hitro ugotovi s slike.



Slika 17.2: Pri kondenzatorju je med napetostjo (rdeča) in tokom (modra) fazni zamik $-\pi/2$.

Tuljava

Pri tuljavi z induktivnostjo L zapišemo velikost inducirane napetosti kot (enačba 16.11)

$$U = L \frac{dI}{dt}, \quad (17.22)$$

pri čemer predznaka nismo pisali. Vstavimo časovno odvisnost toka

$$U = L \frac{d}{dt}(I_0 e^{i\omega t}) = i\omega L I_0 e^{i\omega t}. \quad (17.23)$$

Delimo napetost s tokom in lahko izračunamo **impedanco tuljave**

$$Z_L = i\omega L. \quad (17.24)$$

Izračunajmo še realno napetost na tuljavi

$$U = \Re(i\omega L I_0 e^{i\omega t}). \quad (17.25)$$

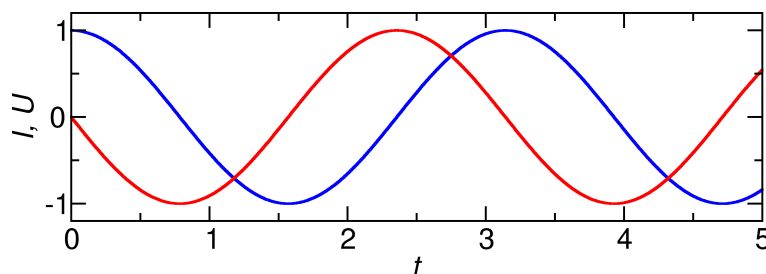
Dobimo

$$U = \Re(i\omega L I_0 (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))) = \Re(i\omega L I_0 \cos(\omega t) - \omega L I_0 \sin(\omega t)). \quad (17.26)$$

Sledi

$$U = -\omega L I_0 \sin(\omega t) = \omega L I_0 \cos(\omega t + \pi/2). \quad (17.27)$$

Če električni tok zapišemo s kosinusno funkcijo časa, je napetost na kondenzatorju negativna sinusna funkcija. Imaginarni faktor v izrazu za impedanco tuljave (enačba 17.24) torej pomeni, da je **fazna razlika med tokom in napetostjo na tuljavi $\pi/2$** , kar je tudi razvidno s slike.



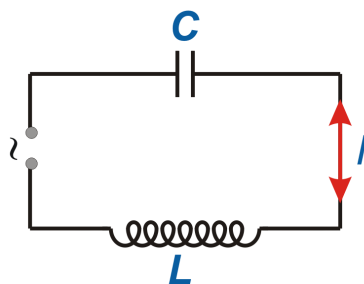
Slika 17.3: Pri tuljavi je med napetostjo (rdeča) in tokom (modra) fazni zamik $\pi/2$.

Vezava kondenzator in tuljava

Vežimo v tokokrog zaporedno vir sinusne napetosti, kondenzator in tuljavo, ohmsko upornost komponent pa zanemarimo (slika 17.4). Pri zaporedni vezavi kondenzatorja in tuljave računamo podobno kot pri zaporedni vezavi ohmskih upornikov. **Pri zaporedni vezavi impedance seštevamo**, saj je tok skozi zaporedno vezane elemente enak. Tako dobimo skupno impedanco tuljave in kondenzatorja

$$Z = \frac{1}{i\omega C} + i\omega L = i\left(\frac{-1}{\omega C} + \omega L\right) \quad (17.28)$$

Če je krožna frekvenca ravno $\omega^2 = 1/(LC)$, je skupna impedanca kondenzatorja in tuljave enaka nič. Takrat teče po tokokrogu sinusni tok tudi brez napetostnega vira (seveda šele potem, ko tok v tokokrogu vzbudimo). Kondenzator in tuljava sama vzdržujeta sinusni tok v zaporedni vezavi - gre za lastno sinusno nihanje.



Slika 17.4: Pri zaporedni vezavi tuljave in kondenzatorja se impedanci seštevata.

Vezava ohmski upornik in kondenzator

Oglejmo si zdaj primer vezja, v katerem imamo sinusni napetostni vir, ohmski upornik in kondenzator (slika 17.5). Tokrat v vezju ni tuljave. Podajmo sinusno napetost vira in izračunajmo električni tok skozi vezje. Naj bo napetost vira $U = U_0 \cos(\omega t)$. Vsota padcev napetosti na posameznih elementih je enaka napetosti vira, tok skozi elementa pa je zaradi zaporedne vezave enak. Dobimo

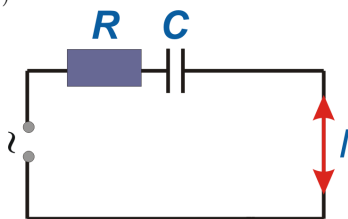
$$U = IR + IZ_C \quad \rightarrow \quad I = \frac{U}{R + Z_C} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{R + \frac{1}{i\omega C}} \quad (17.29)$$

Izpišemo časovno odvisnost

$$I = U_0 \frac{\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)}{R - \frac{i}{\omega C}} \quad (17.30)$$

in pomnožimo števec in imenovalc s faktorjem $R + i/(\omega C)$, da postane imenovalc realna količina

$$I = U_0 \frac{(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) (R + \frac{i}{\omega C})}{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} \quad (17.31)$$



Slika 17.5: Zaporedna vezava kondenzatorja in ohmskega upornika

Za pravo vrednost napetosti moramo vzeti samo realni del gornjega izraza

$$I = U_0 \frac{R \cos(\omega t) - \frac{1}{\omega C} \sin(\omega t)}{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} \quad (17.32)$$

Vendar to še ni izraz, ki bi si ga želeli. Z uporabo adicijskih izrekov izračunamo in zapišemo

$$I = U_0 \frac{\cos(\omega t + \delta)}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}}, \quad (17.33)$$

pri čemer je fazni zamik $\delta = \arctan \frac{1}{\omega RC}$. Račun naj bralec za vajo naredi sam.

V vezju s kondenzatorjem in upornikom je fazni zamik med tokom in napetostjo torej določen z vrednostmi upora, kapaciteto kondenzatorja in frekvenco nihanja. Iz gornje zveze tudi razberemo skupno impedanco

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + Z_C^2} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}. \quad (17.34)$$

Skupna impedanca zaporedno vezanega upornika in kondenzatorja je enaka absolutni vrednosti vsote posameznih impedanc, pri čemer seveda upoštevamo, da so to kompleksna števila. Impedanca upornika pa je seveda kar enaka njegovi upornosti.

Vezava ohmski upornik, kondenzator in tuljava

V vezje dodajmo še tuljavo z induktivnostjo L (slika 17.6). Izkoristimo znanje, ki smo ga pridobili na prejšnjih dveh zgledih: pri zaporedni vezavi impedance seštejemo, pri čemer seveda upoštevamo njihovo kompleksno naravo. Absolutna vrednost impedance pri zaporedni vezavi ohmskega upornika, kondenzatorja in tuljave je tako

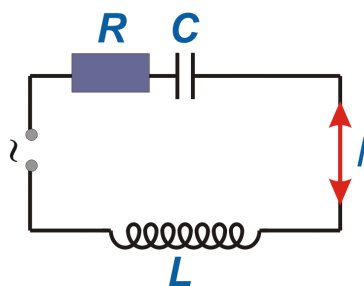
$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}. \quad (17.35)$$

Potem lahko zapišemo tudi tok in napetost

$$I = I_0 \cos(\omega t) \quad \text{in} \quad U = U_0 \cos(\omega t + \delta) = |Z| I_0 \cos(\omega t + \delta), \quad (17.36)$$

pri čemer velja za fazni zamik

$$\tan \delta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (17.37)$$



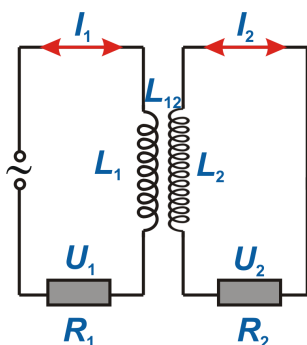
Slika 17.6: Zaporedna vezava kondenzatorja, tuljave in ohmskega upornika.

- ★ Pri opisanem tokokrogu gre za vsiljeno dušeno nihanje električnega toka. Vsiljeno zato, ker vir napetosti tokokrogu vsiljuje nihanje s krožno frekvenco ω . Dušeno zaradi ohmskega upornika. Če bi namreč v hipu odstranili napetostni vir (pri tem pa bi tokokrog ostal sklenjen), bi nihanje zaradi upornika hitro zamrlo. Amplituda toka I_0 je največja pri tisti vrednosti krožne frekvence ω , pri kateri je absolutna vrednost impedance najmanjša. To je pri $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, saj je tedaj izraz v oklepaju pod korenem v enačbi (17.35) enak nič in je impedanca kar enaka upor R . Kot smo omenili zgoraj, je to ravno krožna frekvenca nihanja toka, če sta v tokokrogu samo kondenzator in tuljava. Zato krožno frekvenco ω_0 imenujemo lastna krožna frekvenca nedušene električnega nihajnega kroga.

17.3 Induktivna sklopitev tokokrogov

Oglejmo si induktivno sklopitev dveh tuljav, ki je zelo pomembna za aplikacije. Sklopitev tuljav je prikazana na sliki 17.7. Ena tuljava, rečemo ji primarna, je zvezana v tokokrog z uporom R_1 in generatorjem sinusne napetosti $U_1 = U_0 \cos(\omega t)$. Druga tuljava, rečemo ji sekundarna, pa ima v tokokrogu samo upor R_2 brez dodatnega vira napetosti. Naj bosta impedanci obeh tuljav majhni, tako da zvezo med električno napetostjo in tokom v obeh tokokrogih določata le upornika. Potem je primarni tok (skozi primarno tuljavo) enak

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_0}{R_1} \cos(\omega t) = I_{01} \cos(\omega t). \quad (17.38)$$



Slika 17.7: Shema induktivne sklopitve dveh tuljav: L_1 in L_2 sta induktivnosti tuljav.

Spreminjajoč tok skozi prvo tuljavo ustvarja spreminjajoče se magnetno polje v okolici tuljave. V njem se nahaja druga tuljava, zaradi česar se v njej inducira napetost. Inducirana napetost požene po sekundarnem tokokrogu električni tok. Izpeljavo prepustimo večjemu bralcu, navedimo le, da je tok v drugi tuljavi fazno zamaknjen glede na prvega, saj v izrazu za inducirano napetost nastopa odvod po času. Dobimo

$$I_2 = I_{02} \sin(\omega t). \quad (17.39)$$

Električna tokova sta oba sinusna in med seboj fazno zamaknjena, razlikujeta se tudi po amplitudi. Enako sta med seboj fazno zamaknjeni napetosti na uporih.

★ Izkazuje se, da sta razmerji amplitud napetosti in tokov v sekundarnem in primarnem krogu sorazmerni s produktom števila obojev obeh tuljav, razmerje moči na upornikih pa z njegovim kvadratom. Za konec moramo še preveriti, ali je magnetni pretok, ki nastane zaradi inducirane sekundarne toka, res zanemarljiv v primerjavi s pretokom primarne tuljave. Račun pokaže, da je razmerje amplitud obeh pretokov enako razmerju med impedanco sekundarne tuljave in uporom sekundarnega kroga. To je res majhno že po prvotni predpostavki.

Računski zgled 17.3.1 Imamo tuljavo z N_1 ovoji, ki je narejena iz žice s presekom S in specifično upornostjo ζ . Ovoji imajo polmer r_1 in hod h . Tuljavo priključimo na sinusno napetost z amplitudo U_{10} . Znotraj te tuljave se nahaja druga tuljava, tako da geometrijski osi sovpadata. Druga tuljava je iz enake žice, ima N_2 ovojev in samo malo manjšim polmerom $r_2 \approx r_1$, hod ovojev h pa je enak. Kolikšno je razmerje med amplitudo inducirane napetosti U_{20} v notranji tuljavi in amplitudo napetosti U_{10} zunanje tuljave in kolikšno je razmerje amplitud ustreznih tokov?

Dolžini zunanje in notranje tuljave označimo z l , dolžini ustreznih navitih žic pa s s . Velja $l_1 = N_1 h$ in $l_2 = N_2 h$ ter $s_1 = N_1 2\pi r_1$ in $s_2 = N_2 2\pi r_2$. Pri tem smo zanemarili, da oboji niso pravilne krožnice, ampak deli spirale.

Napetost na zunanji tuljavi naj bo:

$$U_1 = U_{10} \cos(\omega t).$$

Upor žice te tuljave je

$$R_1 = \frac{\zeta s_1}{S} = \frac{\zeta N_1 2\pi r_1}{S}$$

in tok skozi njo

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_{10} \cos(\omega t) S}{\zeta N_1 2\pi r_1}.$$

Zaradi toka skozi tuljavo nastane v njej magnetno polje

$$B = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l_1} = \frac{\mu_0 U_{10} S \cos(\omega t)}{\zeta 2\pi r_1 N_1 h}.$$

Magnetno polje prodira skozi notranjo tuljavo s praktično enako ploščino ovojev. Ustrezni magnetni pretok je

$$\Phi_m = N_2 B \pi r_1^2 = \frac{N_2 \mu_0 U_{10} S r_1 \cos(\omega t)}{N_1 2\zeta h}$$

in inducirana napetost

$$U_2 = -\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{N_2 \mu_0 U_{10} S r_1 \omega \sin(\omega t)}{N_1 2\zeta h}$$

ter inducirani tok

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_2 S}{\zeta N_2 2\pi r_2} = -\frac{\mu_0 U_{10} S^2 \omega \cos(\omega t)}{4\pi N_1 \zeta^2 h}.$$

Razmerje amplitud napetosti in tokov je torej

$$\frac{U_{20}}{U_{10}} = \frac{N_2 \mu_0 S r_1 \omega}{N_1 2\zeta h} \quad \text{in} \quad \frac{I_{20}}{I_{10}} = \frac{\mu_0 S r_1 \omega}{2\zeta h}. \quad \square$$



S preprostim pristopom smo izračunali razmerji amplitud napetosti in tokov. V resnici pa se le manjši del električne moči res »prenese« z zunanje tuljave na notranjo. Zakaj? Prvič, že enačba za magnetno polje znotraj tuljave (enačba 14.9) je samo približna. Drugič, zanemarili smo impedanco druge tuljave, kar lahko naredimo, če je $Z_2 \ll R$ ali $\omega L_2 \ll R$.

Za primer vzemimo skoraj enaki prilegajoči tuljavi: $N_1 = N_2 = N$, $l_1 = l_2 = l$, $S_1 \approx S_2 = S = \pi r^2$. Vstavimo induktivnost tuljave (enačba 15.4) in dobimo pogoj za veljavnost računa $\omega \mu_0 N^2 S / l \ll R$. Preverimo še, ali je inducirano polje B_i v notranji tuljavi (zaradi inducirane toka I_2) veliko manjše od polja B (zaradi primarnega toka I_1). Dobimo pogoj $B_{i0}/B_0 = \omega \mu_0 N^2 S / (lR) \ll 1$. Zanimivo je, da je ta pogoj enak prejšnjemu za $Z \ll R$.

Vrnimo se k podrobnostim zgornjega računa in za upor tuljave zapišimo $R = 2\pi N \zeta r / S$. Debelina žice naj bo d in prerez $S = \pi d^2 / 4$. Upoštevamo še prerez tuljave $S = \pi r^2$, in njeno dolžino, če se navoji dotikajo $l = Nd$. Pogoj $Z/R \ll 1$ postane $\pi \omega \mu_0 r d / (8\zeta) \ll 1$. Zanimivo je, da v pogoju ni števila ovojev. Vzemimo še konkretne podatke. Frekvenca izmenične napetosti $\nu = 50$ Hz in $\omega = 314$ Hz, $r = 5$ cm, $d = 0,2$ mm (seveda s tanko izolacijsko plastjo) in $\zeta = 1,56 \mu\Omega\text{cm}$. Izračunamo

$$\pi \omega \mu_0 r d / (8\zeta) = 9,9 \cdot 10^{-4} \approx 10^{-3} \ll 1.$$

Pri 100-krat večji frekvenci izmeničnega toka in hkrati 10-krat debelejši bakreni žici, pa je $Z \approx R$ in gornji račun ni veljaven.

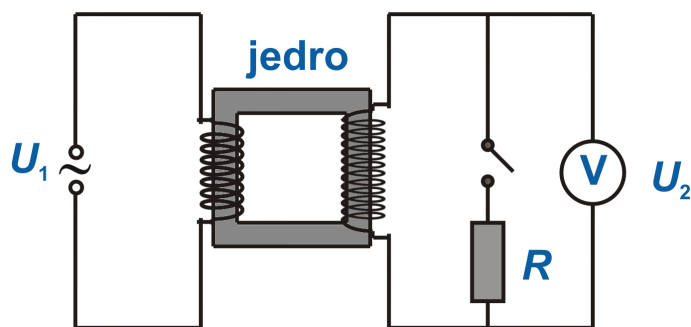
17.4 Transformator

V prejšnjem razdelku smo opisali induktivno sklopitev med dvema tuljavama. Ker se je pri tem pretočil le manjši del energije z ene tuljave na drugo, imenujemo opisano sklopitev šibka sklopitev. Pri prenosu elektrike preko daljnovodov pa seveda želimo čim večji prenos. V ta namen uporabimo transformatorje. **Transformator je naprava za spreminjanje amplitude napetosti in toka pri izmeničnem toku.**

Ena od osnovnih nalog transformatorjev je veliko povečanje napetosti in hkratno močno zmanjšanje električnega toka (pri enaki moči) pred prenosom električne energije na daljavo po daljnovodih. Pri prenosu na daljavo po žicah namreč prihaja do toplotnih izgub, ki so sorazmerne z ohmskim uporom in kvadratom električnega toka. Manjši tok torej pomeni manjše izgube. Transformator(je) seveda potrebujemo na obeh koncih prenosa po daljnovodih, saj moramo pred porabnikom zelo visoko napetost znižati na varno napetost v omrežju.

V poenostavljenem opisu gre tako: generator sinusnega toka (napetosti) daje efektivni tok I_1 in efektivno napetost U_1 . Transformator ju pri idealnem načinu delovanja (brez izgub) pretvori v $I_2 \ll I_1$ in $U_2 \gg U_1$, pri čemer velja $U_1 I_1 = U_2 I_2$. Vrednosti U_2 in I_2 ustrezata vrednostim v daljnovodu. Na drugi strani daljnovoda transformator pretvori napetost in tok v $U_3 \ll U_2$ in $I_3 \gg I_2$, ki sta primerni za uporabo pri električnih napravah.

Bistvena razlika od navadne induktivne sklopitve tuljav je **sklenjeno železno jedro ali jarem, ki gre na eni strani skozi primarno tuljavo z N_1 ovoji, na drugi strani pa skozi sekundarno tuljavo z N_2 ovoji** (slika 17.8). Verjetno ni treba poudarjati, da je **delovanje transformatorja osnovano na indukciji**.



Slika 17.8: Shema delovanja transformatorja

Pri delovanju transformatorja pride do izraza velika magnetna permeabilnost železa (oziroma feromagnetnega jedra), ki poskrbi, da gre magnetni pretok v celoti po jedru in praktično nič »v zrak«. Prenos med tuljavama je tako bistveno boljši in pravimo, da sta tuljavi močno induktivno sklopljeni.

Izkaže se, da je **razmerje amplitud napetosti na obeh straneh transformatorja enako razmerju števila ovojev**

$$\frac{U_{20}}{U_{10}} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (17.40)$$

Poskusimo to razumeti. Mislimo si, da magnetno polje, ki je v jedru praktično homogeno po velikosti, niha sinusno

$$B = B_0 \cos(\omega t). \quad (17.41)$$

To magnetno polje je polje skozi obe tuljavi. Če v razmisleku zamenjamo vzrok in posledico pri primarni tuljavi (upravičeno, saj je dodatno magnetno polje zaradi permeabilnosti jedra neprimerljivo večje od golega magnetnega polja primarne tuljave brez jedra), potem magnetno polje hkrati inducira napetost v obeh tuljavah. Naj bo prerez obeh tuljav enak S , primarna naj ima N_1 obojev, sekundarna pa N_2 . Ustrezna magnetna pretoka skozi tuljavi sta

$$\Phi_{m1} = N_1 B_0 S \cos(\omega t) \quad \text{in} \quad \Phi_{m2} = N_2 B_0 S \cos(\omega t). \quad (17.42)$$

Inducirani napetosti sta tako

$$U_1 = -\frac{d\Phi_{m1}}{dt} = N_1 B_0 S \omega \sin(\omega t) \quad \text{in} \quad U_2 = -\frac{d\Phi_{m2}}{dt} = N_2 B_0 S \omega \sin(\omega t). \quad (17.43)$$

Razmerje amplitud napetosti je res v skladu z enačbo (17.40). Pa še nekaj: obe napetosti nihata sočasno in med njima ni faznega zamika kot pri prejšnjem računskem zgledu s šibko sklopitvijo tuljav.

Izračun razmerja amplitud primarnega in sekundarnega toka je bolj zapleten. Samo v idealnem primeru (kadar ni prav nobenih izgub) velja zveza

$$\frac{I_{20}}{I_{10}} = \frac{N_1}{N_2}. \quad (17.44)$$

Tedaj je namreč električna moč na uporniku v sekundarnem električnem krogu enaka, kot če bi bil upornik vezan v primarni krog ($U_{20}I_{20} = U_{10}I_{10}$).

Za konec pogledjmo še, kaj se zgodi, ko sklenemo stikalo v sekundarnem tokokrogu (slika 17.8). V idealnem primeru je upor R priključenega upornika veliko večji od impedance sekundarne tuljave $R \gg \omega L_2$. Upor sekundarnega kroga je potem kar približno enak uporuhmskega upornika, zato velja $I_{20} = U_{20}/R$. Zanima nas, kolikšen je električni tok na primarni strani transformatorja. Izhajamo iz enačbe za ohranitev moči

$$U_{10}I_{10} = U_{20}I_{20} = \frac{U_{20}^2}{R} = \frac{(U_{10}N_2/N_1)^2}{R}. \quad (17.45)$$

Dobimo

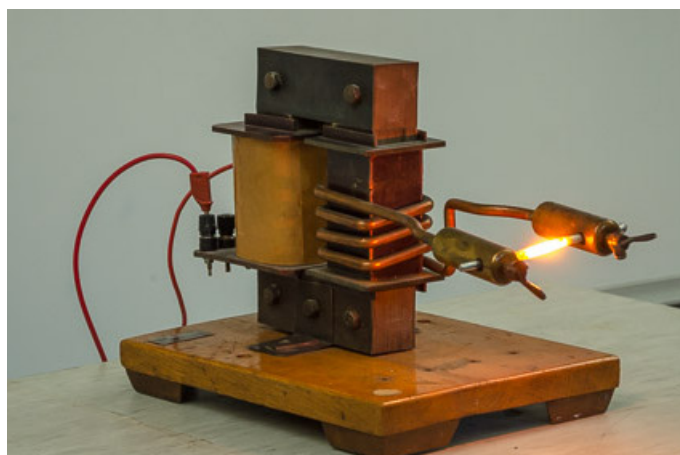
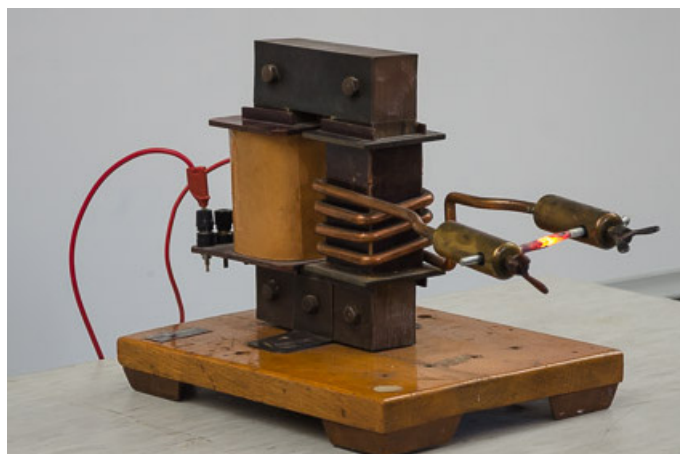
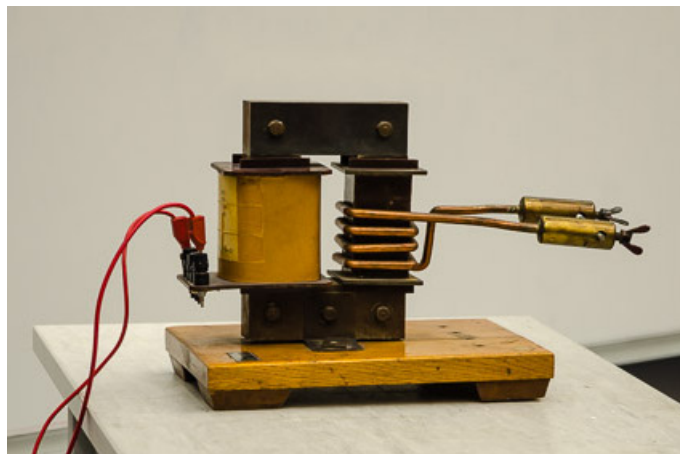
$$I_{10} = U_{10} \frac{(N_2/N_1)^2}{R}. \quad (17.46)$$

Vpeljemo lahko efektivni upor, ki ga »čuti« generator na primarni strani transformatorja

$$R_{ef} = R \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2, \quad (17.47)$$

tako da velja neke vrste Ohmov zakon $U_{10} = I_{10}R_{ef}$.

Poskus 17.4.1 — Segrevanje s transformatorjem. Imamo transformator, ki ima v primarnem navitju veliko večje število obojev kot v sekundarnem. S takim transformatorjem lahko v sekundarnem navitju ustvarimo zelo velike električne tokove (pri zmanjšanih napetostih). S takšnim transformatorjem lahko brez težav segrejemo npr. žebelj na sekundarni strani, da zažari. V našem primeru smo uporabili transformator s številoma obojev $N_1 = 550$ in $N_2 = 4$.

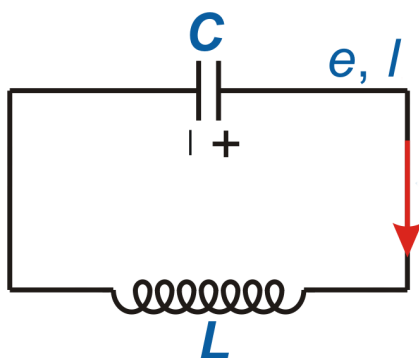


Segrevanje tokovnih sponk s transformatorjem

17.5 Električni nihajni krog

Obravnavajmo vezje, v katerem imamo zaporedno vezana kondenzator s kapaciteto C in tuljavo z induktivnostjo L . Ohmskega upornika ni in tudi upornost žic zanemarimo. Kondenzator nabijemo, nato pa vir (enosmerne) napetosti z napetostjo U_0 odklopimo in opazujemo, kaj se zgodi.

Ko smo kondenzator nabili, se je na njem nabral naboj $e_0 = CU_0$. Ker sta plošči kondenzatorja sklenjeni (preko tuljave), steče električni tok. Zaradi tega se prazni kondenzator, v tuljavi pa nastaja magnetno polje, ki zavira naraščanje toka. Izkaže se, da doseže tok skozi tuljavo največjo vrednost ravno takrat, ko je kondenzator izpraznjen. Tok nato začne pojemati, zato se inducira napetost, ki nabije kondenzator. Ko toka ni več, je naboj na kondenzatorju največji, vendar z obrnjenim predznakom. Nato se vse to ponavlja in dobimo periodično spreminjanje količin, kot so naboj, tok, napetost ... Dobimo nihanje. **Vezju z kondenzatorjem in tuljavo zato rečemo električni nihajni krog.** Obravnavajmo ga še matematično.



Slika 17.9: Idealni električni nihajni krog

Vsota napetosti v krogu mora biti enaka nič

$$U_C + U_L = -L \frac{dI}{dt} - \frac{e}{C} = 0. \quad (17.48)$$

Pri tem smo upoštevali enačbi (16.11) in (12.5). Enačbo še enkrat odvajamo, upoštevamo, da je tok enak odvodu naboja po času, in preuredimo

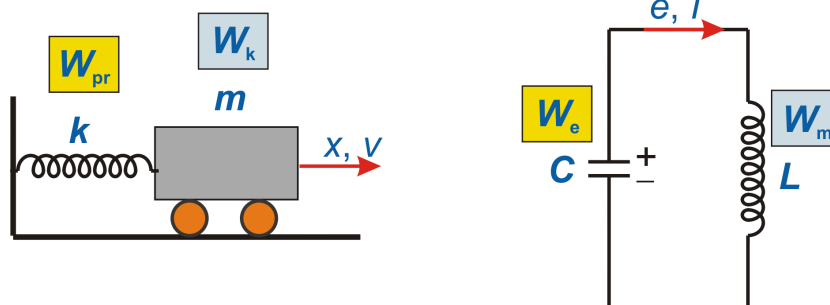
$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{LC} I = 0. \quad (17.49)$$

Gornjo enačbo lahko rešimo (z nastavkom), lahko pa v njej prepoznamo enačbo za nihanje (enačba 10.8): drugi okvod količine je sorazmeren količini sami z nasprotnim predznakom. Pri vzmetnem nihalu je bila nihajoča količina odmik, tukaj pa je električni tok. Rešitev torej zapišemo v obliki

$$I = I_0 \sin(\omega t), \quad (17.50)$$

pri čemer je lastna krožna frekvenca

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (17.51)$$



Slika 17.10: Primerjava električnega nihajnega kroga z vzmetnim nihalom

Zapišemo še energijo. Pri vzmetnem nihalu je kinetična energija prehajala v prožnostno in nazaj, tukaj pa električna energija prehaja v magnetno in nazaj. Zapišimo še energiji v tem primeru. Magnetna je enaka

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}LI_0^2 \sin^2(\omega t), \quad (17.52)$$

električna pa

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}CU_0^2 \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}C \frac{L}{C} I_0^2 \cos^2(\omega t) \quad (17.53)$$

pri čemer smo izračunali napetost po enačbi (16.11)

$$U_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} I_0. \quad (17.54)$$

Obe energiji torej nihata, njuna vsota pa je

$$W_m + W_e = \frac{1}{2}LI_0^2 \sin^2(\omega t) + \frac{1}{2}CU_0^2 \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}CU_0^2. \quad (17.55)$$

Skupna električna in magnetna energija nihajnega kroga se ohranja. To seveda velja le v primeru, če v vezju ni ohmskega upora. Čim dodamo upor, se ta energija začne izgubljati in nihanje je dušeno. Hkrati se tudi nekoliko spremeni nihajni čas. Če želimo tak sistem ohraniti v nihanju, moramo izgubljeno energijo dovajati od zunaj, na primer z induktivno sklopitvijo tuljave.

18. Elektromagnetno valovanje

Elektromagnetno valovanje je eden tehnološko najpomembnejših načinov za prenos informacij in energije. Elektromagnetno valovanje ima lahko zelo različne valovne dolžine, kar se odraža na lastnostih, predvsem pa na načinu uporabe v tehnološke in medicinske namene.

18.1 Razširjanje elektromagnetnega valovanja

Na koncu prejšnjega poglavja smo spoznali električni nihajni krog. Sestavljen je bil iz kondenzatorja, v katerem se je vzpostavljalo električno polje, in tuljave, v kateri se je vzpostavljalo magnetno polje. V resnici noben nihajni krog ni idealen, zato električno polje in z njim električna energija ni povsem zaprta v kondenzatorju. Prav tako sega magnetno polje in z njim magnetna energija ven iz tuljave. **Elektromagnetna energija se iz nihajnega kroga širi v prostor** in s tem nihajni krog dodatno izgublja energijo, poleg izgub na uporu vezja. Nihajni krog moramo zato nenehno napajati z zunanjim virom energije.

Energija se iz električnega nihajnega kroga širi v prostor v obliki elektromagnetnih valov. Elektromagnetno valovanje ima enako frekvenco, kot jo ima nihajni krog. Skušajmo najti kvalitativno zvezo med tem valovanjem in nihanjem nihajnega kroga. Spet vzemimo električni nihajni krog, vendar naj bo ploščati kondenzator tak, da je razmik med ploščama enak stranici kvadratne plošče a . Tudi tuljava naj bo nenavadna: ena sama zanka s premerom in dolžino enako a . Čeprav sta taka kondenzator in tuljava daleč od idealnega, za grobo oceno uporabimo enačbo za kapaciteto ploščatega kondenzatorja (12.4) in enačbo za induktivnost dolge tuljave (15.4)

$$C = \frac{\epsilon_0 a^2}{a} \quad \text{in} \quad L = \frac{\mu_0 1^2 \pi a^2}{4a}. \quad (18.1)$$

Lastna krožna frekvenca takega nihajnega kroga je

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{2}{\sqrt{\epsilon_0 a \mu_0 \pi a}} = \frac{2}{a \sqrt{\pi \epsilon_0 \mu_0}}. \quad (18.2)$$

Smiselna ocena za valovno dolžino valovanja je kar dimenzija a . Hitrost valovanja je potem

$$c = \lambda v = \lambda \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{\pi^{3/2} (\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}}. \quad (18.3)$$

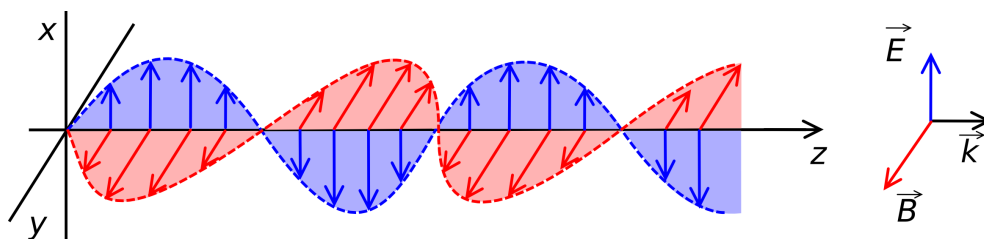
Razen napačnega številskega faktorja smo dobili pravi izraz za svetlobno hitrost

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}. \quad (18.4)$$

S svetlobno hitrostjo c_0 se po praznem prostoru širijo vsa elektromagnetna valovanja.

18.2 Valovna enačba

Obravnavajmo elektromagnetno valovanje, ki potuje v določeni smeri. Spoznali smo - in tudi ime to nakazuje - da pri elektromagnetnem valovanju nihata električno in magnetno polje. Vendar ti dve količini ne valujeta neodvisno. **Električno in magnetno polje se spreminjata z isto frekvenco in sta v fazi. Polji sta med seboj pravokotni in hkrati pravokotni na smer razširjanja valovanja.** Ker nihata električno in magnetno polje v ravninah, imenujemo tako valovanje linearno polarizirano valovanje. Smer polarizacije je določena z ravnino nihanja električne poljske jakosti.



Slika 18.1: Elektromagnetno valovanje je prečno valovanje jakosti električnega in gostote magnetnega polja.

Smer potovanja valovanja navadno podamo z valovnim vektorjem \vec{k} , velikost tega vektorja pa je obratno sorazmerna z valovno dolžino valovanja

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (18.5)$$

Ustrezna krožna frekvenca je $\omega = 2\pi\nu$, velja pa tudi zveza

$$c = \lambda\nu = \frac{\omega}{k}. \quad (18.6)$$

Izberimo kartezični koordinatni sistem, v katerem se valovanje širi v smeri osi z , smer električnega polja naj bo v smeri osi x , smer magnetnega polja pa v smeri osi y . Elektromagnetno valovanje potem zapišemo

$$\vec{E}(z, t) = E_0(\cos(\omega t - kz), 0, 0) \quad (18.7)$$

$$\vec{B}(z, t) = B_0(0, \cos(\omega t - kz), 0) \quad (18.8)$$

$$\vec{k}(z, t) = k(0, 0, 1). \quad (18.9)$$

Gornje enačbe opisujejo **ravni val, ki se širi v smeri osi z** . Valovna faza $\phi = \omega t - kz$ je pri njem odvisna od časa t in koordinate z , ni pa odvisna od x in y . Lahko sklepamo, da ima cela ravnina, ki je pravokotna na os z , v danem trenutku povsod enaki vrednosti obeh polj. Takšno ravnino imenujemo valovna fronta. Polji \vec{E} in \vec{B} v dani točki nihata v fazi: v istem trenutku imata npr. vrednost nič ali pa največjo vrednost v eno ali pa nasprotno smer.

Zenkrat smo samo povedali, da sta vektorja električne in magnetne poljske jakosti pravokotna med seboj in na smer širjenja valovanja. Iz Maxwellovih enačb (glej poglavje 27) lahko izpeljemo zvezo med vektorskimi količinami

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{c}, \quad (18.10)$$

pri čemer je $\vec{c} \parallel \vec{k}$.

Odvajajmo električno polje (enačba 18.7) najprej dvakrat po času t , potem pa še dvakrat po koordinati z . Pri zapisu odvodov moramo biti pozorni. Ker je električna poljska jakost funkcija dveh neodvisnih spremenljivk (t in z), moramo namesto navadnih odvodov pisati parcialne odvode. Dvakratni odvod po času je tako

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}, \quad (18.11)$$

dvakratni odvod po kraju pa

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -k^2 \vec{E}. \quad (18.12)$$

Če upoštevamo $c = \omega/k$, dobimo

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}. \quad (18.13)$$

To je **valovna enačba, ki opiše spreminanje električne poljske jakosti pri elektromagnetnem valovanju**. Je parcialna diferencialna enačba drugega reda, značilna za elektromagnetno valovanje. Analogno enačbo bi lahko zapisali tudi za vektor magnetnega polja. Valovno enačbo bi lahko izpeljali tudi neposredno iz Maxwellovih enačb.

★ Izkaže se, da velja valovna enačba za vse vrste valovanj in ni omejena samo na elektromagnetno valovanje. Spremeniti je treba samo ustrezno nihajočo količino, ki je lahko skalar ali pa vektor. Za zvok, na primer, bi namesto električnega polja zapisali zračni tlak ali pa gostoto snovi. Vendar sploh ni nujno, da gre za harmonični val s sinusno obliko, saj velja valovna enačba splošneje, kot bomo preverili v računskem zgledu.

Računski zgled 18.2.1 Pokažite, da splošna funkcija oblike $\Psi(x, t) = \Psi_1(x - ct) + \Psi_2(x + ct)$ zadošča valovni enačbi

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (18.14)$$

za poljubni funkciji Ψ_1 in Ψ_2 .

Pri dokazu bomo upoštevali, da sta funkciji Ψ_1 in Ψ_2 navadni funkciji posrednih spremenljivk $\phi_1 = x - ct$ in $\phi_2 = x + ct$. Izračunajmo postopno oba druga odvoda.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \frac{d\Psi_1}{d\phi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{d\Psi_2}{d\phi_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \frac{d\Psi_1}{d\phi_1} (-c) + \frac{d\Psi_2}{d\phi_2} c \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= \frac{d^2 \Psi_1}{d\phi_1^2} (-c)^2 + \frac{d^2 \Psi_2}{d\phi_2^2} c^2 = c^2 \left(\frac{d^2 \Psi_1}{d\phi_1^2} + \frac{d^2 \Psi_2}{d\phi_2^2} \right). \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \frac{d\Psi_1}{d\phi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{d\Psi_2}{d\phi_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = \frac{d\Psi_1}{d\phi_1} + \frac{d\Psi_2}{d\phi_2} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= \frac{d^2 \Psi_1}{d\phi_1^2} + \frac{d^2 \Psi_2}{d\phi_2^2}. \end{aligned}$$

Druga odvoda valovne funkcije po času in koordinati torej res zadoščata valovni enačbi. □

18.3 Energija elektromagnetnega valovanja

Pri elektromagnetnem valovanju nastopata električno in magnetno polje, zato nastopa tudi z njima povezana električna in magnetna energija. Podobno kot pri idealnem mehanskem valovanju se tudi pri elektromagnetnem valovanju celotna energija v povprečju ohranja. Sestavljena je iz dveh prispevkov (električnega in magnetnega), ki sta v povprečju enako velika. Izenačimo torej gostoti električne (enačba 12.10) in magnetne energije (enačba 15.8)

$$\frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (18.15)$$

Gostota celotne energije je prispevek obeh polj

$$w = w_m + w_e = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}. \quad (18.16)$$

Pri potujočem elektromagnetnem valovanju se jakost električnega polja in gostota magnetnega polja sinusno spreminjata s časom. Za izračun povprečne gostote energije v elektromagnetnem valovanju moramo torej izpovprečiti funkcijo $\sin^2(\omega t)$, kar doprinese faktor 1/2:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}. \quad (18.17)$$

Vrnimo se za trenutek še k enačbi 18.15. Iz nje dobimo zvezo med jakostjo električnega polja in gostoto magnetnega polja v elektromagnetnem valovanju

$$E = \frac{B}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = Bc, \quad (18.18)$$

kar je v skladu z zapisano enačbo 18.10. Za opis elektromagnetnega valovanja torej zadošča, če poznamo samo časovno in krajevno odvisnost električne poljske jakosti $\vec{E}(\vec{r}, t)$.

Zapišimo še gostoto energijskega toka elektromagnetnega valovanja v praznem prostoru. Izračunamo jo podobno kot pri mehanskem valovanju (enačba 10.50)

$$j = \langle w \rangle c = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 c = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} c. \quad (18.19)$$

Pri tem sta E_0 in B_0 amplitudi jakosti električnega in gostote magnetnega polja, za katera velja $B_0 = E_0/c$.

Računski zgled 18.3.1 Močna sončna svetloba na Zemlji ima intenziteto okrog 1 kW/m^2 . Kolikšni sta ustrezni amplitudi električnega in magnetnega polja?

Podatki:

$$j = 1 \text{ kW/m}^2$$

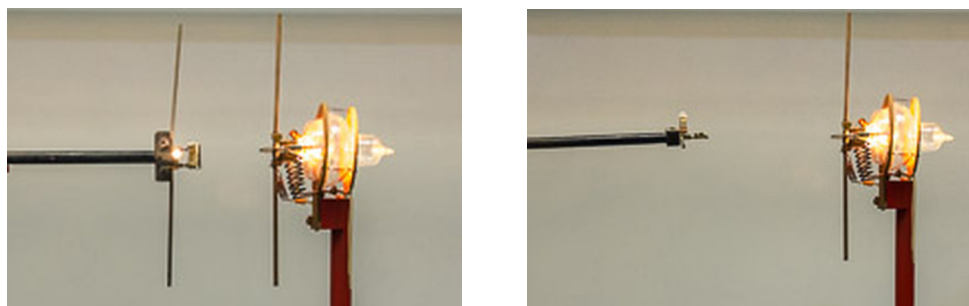
$$E_0 = ?$$

$$B_0 = ?$$

Amplitudi polj izračunamo iz enačbe (18.19):

$$E_0 = \sqrt{\frac{2j}{\epsilon_0 c}} = 0,87 \text{ kV/m} \quad \text{in} \quad B_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0 j}{c}} = \frac{E_0}{c} = 2,9 \mu\text{T}. \quad \square$$

Poskus 18.3.1 — Sevanje dipolne antene. Zaenkrat poznamo kot izvir elektromagnetnega valovanja električni nihajni krog. V limitnem primeru, ko kondenzator in ovoj tuljave zelo raztegnemo, dobimo dipolno anteno. **Dipolna antena seva polarizirano elektromagnetno valovanje.** Smer polarizacije lahko preverimo s sprejemno anteno (kovinsko palico). Če je smer sprejemne antene prava (v našem primeru navpična), steče po njej električni tok in žarnica sveti. Če anteno obrnemo v pravokotno smer, žarnica ne sveti. Hitro se tudi prepričamo, da intenziteta valovanja pojema z oddaljenostjo od oddajne antene: če sprejemno anteno bolj odmaknemo, žarnica sveti šibkeje.



Dipolna antena oddaja elektromagnetno valovanje, z drugo anteno valovanje sprejemamo. Če je sprejemna antena obrnjena v smeri polarizacije valovanja, v njej steče tok in žarnica zasveti. Če je antena obrnjena pravokotno na polarizacijo valovanja, žarnica ne sveti.

18.4 Vrste elektromagnetnega valovanja

Omenili smo že, da je elektromagnetnih valovanj zelo veliko vrst. Čeprav gre v bistvu za isto vrsto valovanja električnega in magnetnega polja, valovanja zaradi njihovih različnih lastnosti in zgodovinskih razlogov ločimo v več skupin. Elektromagnetna valovanja ločimo glede na njihovo valovno dolžino. Groba delitev je sledeča: **elektromagnetno valovanje z najkrajšimi valovnimi dolžinami imenujemo žarki gama, sledijo rentgenski žarki, ultravijolična svetloba, vidna svetloba, infrardeča svetloba, mikrovalovi in radijski valovi** z največjimi valovnimi dolžinami. Vsako od omenjenih valovanj zaobsega določen interval na zveznem spektru, vendar meje niso točno določene.

Ker gre v vseh teh primerih za enako vrsto valovanja, imajo vsa omenjena valovanja podobne fizikalne lastnosti. Hitrost razširjanja vseh elektromagnetnih valov je enaka in v praznem prostoru znaša $c_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s. Za vsa valovanja velja, da nastanejo pri nihanju nabitih delcev. Pri vseh valovanjih lahko opazimo podobne fizikalne pojave (lom, odboj, uklon, interferenca ...), vendar se zaradi zelo različnih valovnih dolžin različno izražajo. V naslednjem poglavju se bomo omejili na elektromagnetno valovanje v območju vidne svetlobe.

Tipična valovna dolžina [m]	Ime	Uporaba
$< 10^{-11}$	žarki gama	
10^{-9}	rentgenski žarki	
10^{-7}	ultravijolična svetloba	
$5 \cdot 10^{-7}$	vidna svetloba	
10^{-5}	infrardeča svetloba	
10^{-2}	mikrovalovi	
> 1	radijski signali	

Tabela 18.1: Spekter elektromagnetnega valovanja

19. Valovna optika

V prejšnjem poglavju smo spoznali, da je vidna svetloba elektromagnetno valovanje z določenimi valovnimi dolžinami. Čeprav meja ni ostro določena, v vidno svetlobo uvrščamo elektromagnetno valovanje z valovnimi dolžinami med okoli 380 in 750 nm. Podrobneje si oglejmo pojave, ki izvirajo iz valovne narave svetlobe.

19.1 Svetloba kot elektromagnetno valovanje

Pri svetlobi gre za elektromagnetno valovanje, kar pomeni, da **svetloba, kot vsa druga elektromagnetna valovanja, lahko potuje po vakuumu**, medtem ko razna mehanska valovanja (zvok, prečno valovanje po napeti struni, valovanje na vodni površini itd.) za svoje širjenje potrebujejo snov (valovno sredstvo). Poleg tega se izmerjena svetlobna hitrost ujema s hitrostjo elektromagnetnih valov (enačba 18.4).

Ugotovitve za elektromagnetno valovanje torej veljajo tudi za vidno svetlobo. To pomeni, da sta fizikalni količini, ki pri širjenju svetlobe nihata v času in prostoru, jakost električnega polja in gostota magnetnega polja. Izpeljave iz Maxwellovih enačb in tudi poskusi pokažejo, da sta električno in magnetno polje pravokotni eno na drugo in hkrati na smer širjenja svetlobe. **Svetloba je zato prečno (transverzalno) elektromagnetno valovanje.** Gostoti energijskega toka j pri svetlobi pogosto rečemo kar intenziteta svetlobe.

Vidno svetlobo okvirno delimo na sledeče barve, ki jim ustrezajo določene valovne dolžine.

Barva	λ (nm)
vijolična	380 - 450
modra	450 - 495
zelena	495 - 570
rumena	570 - 590
oranžna	590 - 620
rdeča	620 - 750

Tabela 19.1: Intervali valovnih dolžin za posamezne barve v vidnem spektru.

19.2 Interferenca

Eden izmen pojavov, ki potrdi valovno naravno svetlobe, je interferenca. **O interferenci govorimo, kadar se dve ali več valovanj sreča na istem mestu in tam nastane nov valovni vzorec.** Pri tem se prispevki k valujoči fizikalni količini seštevajo. Pri elektromagnetnem valovanju tako v dani točki seštevamo vektorje električnega polja posameznih valovanj, da dobimo skupno električno polje; podobno naredimo za magnetno polje.

Najprej obravnavajmo dva zelo preprosta in nazorna zgleda interference dveh elektromagnetnih valovanj z enako frekvenco in valovno dolžino, ki potujeta vzdolž smeri z . Vzemimo primer, ko sta obe valovanji enako linearno polarizirani (v smeri x) in izračunajmo vrednost skupnega električnega polja.

Konstruktivna in destruktivna interferenca

V prvem primeru obravnavajmo valovani, ki potujeta v isto smer (v pozitivno smer osi z). Valovanji imata enako valovno dolžino in frekvenco, vendar je drugo fazno premaknjeno glede na prvega

$$E_1 = E_{01} \cos(\omega t - kz) \quad \text{in} \quad E_2 = E_{01} \cos(\omega t - kz + \delta). \quad (19.1)$$

Seštejmo polji in upoštevajmo zvezo

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right). \quad (19.2)$$

Dobimo

$$E = E_1 + E_2 = 2E_{01} \cos\left(\omega t - kz + \frac{\delta}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta}{2}\right). \quad (19.3)$$

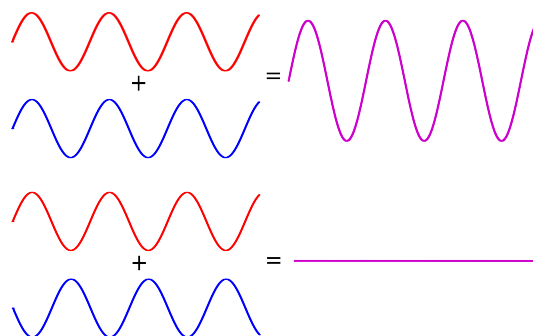
Prvi kosinusni faktor opisuje ravno valovanje, njegov fazni premik pa je ravno polovični fazni premik drugega valovanja glede na prvega. Drugi kosinusni faktor je konstanten in pomeni oslabitev celotne amplitude skupnega valovanja. Sledi

$$E_0 = 2E_{01} \cos\left(\frac{\delta}{2}\right). \quad (19.4)$$

Najznačilnejša sta skrajna primera faznega premika δ . Če je fazni premik enak nič ($\delta = 0$), se amplituda skupnega valovanja podvoji glede na posamični amplitudi E_0 (slika 19.1 zgoraj).

Pojav ojačitve valovanja imenujemo konstruktivna interferenca. Namesto faznega premika nič bi lahko vzeli poljuben mnogokratnik števila 2π , pa bi spet imeli ojačitev. Konstruktivno interferenco torej dobimo, če se pot valovanj do opazovane točke efektivno razlikuje za celo število valovnih dolžin.

Če je fazni premik med valovanjema $\delta = \pi$, se polji ravno odštejeta (slika 19.1 spodaj). **Skupno električno polje je nič in govorimo o oslavitvi valovanja oziroma destruktivni interferenci.**



Slika 19.1: Kadar seštevamo valovanja v fazi, dobimo konstruktivno interferenco in ojačano valovanje. Interferenca valovanj v protifazi da oslabitev oziroma destruktivno interferenco.

Stoječe valovanje

Drug primer sta valovanja z enako valovno dolžino in frekvenco, ki potujeta v nasprotnih smereh. Valovanja zapišemo kot

$$E_1 = E_{01} \cos(\omega t - kz) \quad \text{in} \quad E_2 = E_{01} \cos(\omega t + kz). \quad (19.5)$$

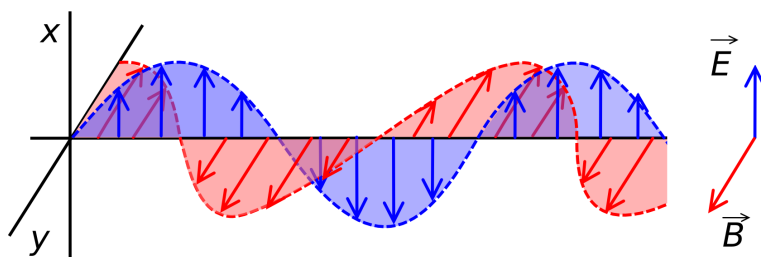
Seštejmo polji in upoštevajmo adicijski izrek

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (19.6)$$

Dobimo

$$E = E_1 + E_2 = 2E_{01} \cos(\omega t) \cos(kz). \quad (19.7)$$

To valovanje je kvalitativno drugačno od valovanj, ki smo jih poznali do zdaj. Nima več oblike $\cos(\omega t - kz)$, ki je značilna za t.i. potujoča valovanja. V tem primeru gre za stoječe valovanje, pri katerem fizikalna količina (v našem primeru jakost električnega polja) niha sočasno v vseh točkah prostora. Drugi kosinusni faktor (s koordinato z) ne določa več faznega premika, temveč amplitudo nihanja električnega polja. **Pri stoječem valovanju se amplituda nihanja sinusno spreminja s koordinato z .** Imamo torej dele, kjer niha električna poljska jakost z dvakratno amplitudo (hrbti), in dele, kjer električnega polja sploh ni (vozli). Pri tem so zaradi ohranitve energije vozli jakosti električnega polja na mestih hrbtov gostote magnetnega polja in obratno (slika 19.2). Omenimo še, da magnetno polje pri stoječem elektromagnetnem valu ne niha sočasno kot električno, ampak doseže električno polje največjo vrednost, kadar je magnetno polje enako nič in obratno.

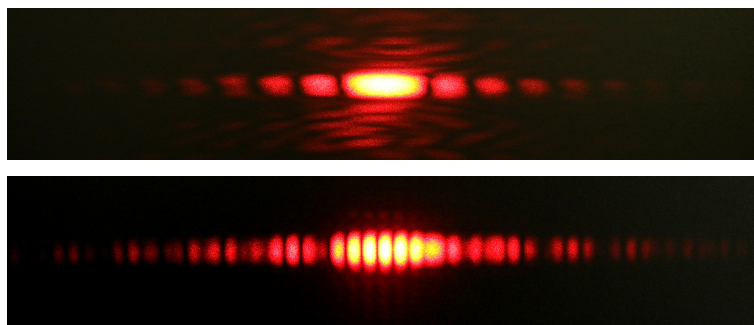


Slika 19.2: Pri stoječem valovanju se amplituda nihanja spreminja z lego. Za elektromagnetno valovanje velja, da so vrhovi magnetnega polja in vrhovi električnega polja zamaknjeni.

19.3 Uklon

Oglejmo si zelo nazoren in lahko izvedljiv interferenčni poskus. Potrebujemo laserski izvor svetlobe in uklonsko mrežico. Uklonska mrežica je zaslon z eno ali več enakomerno razmaknjenimi zelo tankimi režami, skozi katere lahko prodira svetloba. Usmerimo svetlobni curek pravokotno na uklonsko mrežico in opazujemo vzorec prepuščene svetlobe na oddaljenem zaslonu. Ta poskus imenujemo Youngov interferenčni poskus¹.

Poskus 19.3.1 — Interferenčna slika na uklonski mrežici. Z lasersko svetlobo posvetimo na zaslonko z eno ali dvema režama in na zaslonu opazujemo značilno interferenčno sliko. Pri eni sami reži opazimo vrsto ojačitev valovanja na zaslonu. V primeru dveh rež na zaslonki se vsaka od posameznih svetlobnih peg na zaslonu razdeli na ostro ločene majhne pege.



Interferenčne pege laserske svetlobe na zaslonu pri prehodu skozi eno režo (zgornja slika) in skozi dve reži (spodnja slika).

Poskusimo razložiti, zakaj pride do ojačitev in oslabitev pri Youngovem poskusu in kako so vrhovi razporejeni v odvisnosti od števila in razmika rež v uklonski mrežici. Izpeljimo zato odvisnost intenzitete svetlobe v odvisnosti od kota β glede na simetralo, če ima uklonska mrežica N ozkih podolgovatih rež v enakih razmikih a . Računali bomo tako, da bomo vsako režo obravnavali kot svoj izvor valovanja. To utemeljimo s **Huygensovimi principom**², ki pravi, da vsako točko valovanja lahko obravnavamo kot izvir krožnega oziroma krogelnega valovanja. Mi obravnavamo ravninski primer, zato se iz vsake reže širi krožni val.

Izkaže se, da je za račun prikladnejša obravnava v kompleksnem zapisu. Valovanje

$$\Psi_j = \exp(ikr_j), \quad (19.8)$$

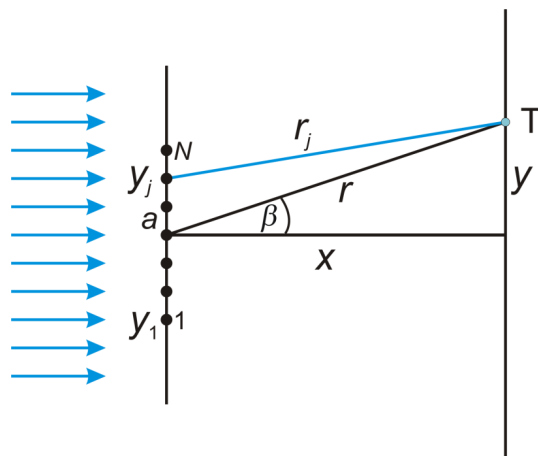
pri čemer označuje $j = 1 - N$ indeks reže, k valovno število, r_j pa razdaljo med posamezno režo in opazovano točko na zaslonu (slika 19.3). V splošnem zapisana količina Ψ pomeni v našem primeru eno od komponent električnega polja v dani točki T na zaslonu.

Pri tem smo privzeli, da ima valovanje, ki vpade na reže, povsod enako časovno odvisnost in je zato nismo pisali. Tudi tokrat smo se poslužili zapisa v kompleksnih številih, kar nam bo poenostavilo račune. Skupna valovna funkcija v izbrani točki na zaslonu je tako vsota delnih funkcij

$$\Psi = \sum_{j=1}^N \Psi_j = \sum_{j=1}^N \exp(ikr_j). \quad (19.9)$$

¹Angleški fizik Thomas Young (1773-1829), [Wikipedija](#)

²Nizozemski znanstvenik Christiaan Huygens (1629-1695), [Wikipedija](#)



Slika 19.3: Geometrija interferenčnega poskusa z N režami v enakih razmikih. Zaradi nazornosti so reže prikazane kot točkasti izviri valovanja (črni krožci), v resnici pa so podolgovate in potekajo pravokotno na ravnino risbe.

Za nadaljni račun privzemimo, da je velikost uklonske mrežice majhna v primerjavi s koordinatama x in y , ki določata lego obravnavane točke T na zaslonu. Označimo tudi razdaljo med T in sredino mrežice $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ in lego vsake reže glede na sredino mrežice z y_j . Zapišimo razdaljo r_j

$$r_j = \sqrt{x^2 + (y - y_j)^2} \approx \sqrt{x^2 + y^2 - 2yy_j} = \sqrt{r^2 - 2yy_j} = r\sqrt{1 - 2yy_j/r^2}. \quad (19.10)$$

Pri tem smo upoštevali, da je $y_j \ll y$. Razvijemo za majhne vrednosti y_j/r in dobimo

$$r_j = r\left(1 - \frac{yy_j}{r^2}\right) = r - \frac{yy_j}{r} = r - y_j \sin \beta. \quad (19.11)$$

Valovna funkcija je potem

$$\Psi = \sum_{j=1}^N \exp(ik(r - y_j \sin \beta)). \quad (19.12)$$

Seštevanje po indeksu j poenostavimo, če vse y -koordinate rež zapišemo glede na koordinato prve reže $y_j = y_1 + (j - 1)a$. Sledi

$$\Psi = \sum_{j=1}^N \exp(ik(r - (y_1 + (j - 1)a) \sin \beta)) = \exp(ik(r - y_1 \sin \beta)) \sum_{j=1}^N \exp(-ik(j - 1)a \sin \beta). \quad (19.13)$$

Faktor, ki smo ga izpostavili, ima absolutno vrednost 1 in ne vpliva na končni izračun intenzitete, zato ga izpustimo. Preostali členi sestavljajo geometrijsko zaporedje, katerega vsoto znamo izračunati. Vemo namreč, da je

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{N-1} = \frac{q^N - 1}{q - 1}. \quad (19.14)$$

V našem primeru je $q = \exp(-ika \sin \beta)$ in vsota

$$\Psi = \frac{\exp(-Nika \sin \beta) - 1}{\exp(-ika \sin \beta) - 1}. \quad (19.15)$$

Intenziteta svetlobe na določenem mestu je sorazmerna kvadratu amplitude električne poljske jakosti oziroma v tem primeru valovne funkcije (enačba 18.19). Ker imamo tukaj kompleksni zapis, moramo enačbo za intenziteto malo popraviti. **Intenziteta svetlobe je sorazmerna s kvadratom absolutne vrednosti valovne funkcije $\Psi\Psi^*$.** Dodamo še sorazmernostni faktor I_0 , vendar se z njim ne bomo ukvarjali, saj nas zanima le oblika uklonske slike na zaslonu. Dobimo

$$I = I_0\Psi\Psi^* = I_0 \frac{\exp(-Nika \sin \beta) - 1}{\exp(-ika \sin \beta) - 1} \cdot \frac{\exp(Nika \sin \beta) - 1}{\exp(ika \sin \beta) - 1}. \quad (19.16)$$

Po krajšem računu sledi

$$I = I_0 \frac{1 - \cos(Nka \sin \beta)}{1 - \cos(ka \sin \beta)}. \quad (19.17)$$

Upoštevamo še zvezo $\sin^2 \alpha = (1 - \cos(2\alpha))/2$ in dobimo

$$I = I_0 \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}Nka \sin \beta)}{\sin(\frac{1}{2}ka \sin \beta)} \right)^2 = I_0 \left(\frac{\sin(\frac{1}{\lambda}N\pi a \sin \beta)}{\sin(\frac{1}{\lambda}\pi a \sin \beta)} \right)^2. \quad (19.18)$$

Oglejmo si gornjo funkcijo bolj natančno. Njena vrednost je vedno pozitivna (kot mora biti). V njej nastopajo parametri N , λ , a in pa β . Prvi trije so pri izbranem eksperimentu konstantni. Parameter β nastopa kot argument kotne funkcije, zato je ta funkcija periodična. Njena vrednost je enaka nič, kadar je števec enak nič

$$\sin\left(\frac{1}{\lambda}N\pi a \sin \beta\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \sin \beta = \frac{\lambda}{Na}M, \quad (19.19)$$

pri čemer je M poljubno celo število. Pri tem moramo biti pazljivi: vrednost funkcije je samo takrat enaka nič, kadar je števec enak nič, hkrati pa imenovalac ulomka različen od nič. Kaj pa se zgodi v primeru, ko sta oba, števec in imenovalac, enaka nič? To se zgodi, kadar je

$$\pi \frac{a}{\lambda} \sin \beta = M\pi, \quad (19.20)$$

oziroma M večkratnik N . Takrat dobimo deljenje $0/0$. Za izračun uporabimo l'Hôpitalovo pravilo³, ki pravi, da lahko izračunamo limto funkcije z nedoločeno vrednostjo z odvajanjem števca in imenovalca posebej po limitni spremenljivki. Če vpeljemo $x = \pi a \sin \beta / \lambda$, dobimo

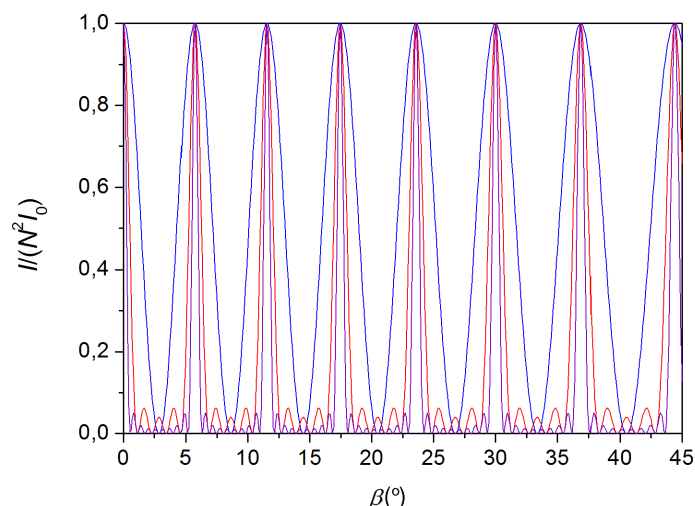
$$\lim_{x \rightarrow M\pi} \left(\frac{\sin(Nx)}{\sin x} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow M\pi} \frac{2N \sin(Nx) \cos(Nx)}{2 \sin x \cos x}. \quad (19.21)$$

Sledi

$$\lim_{x \rightarrow M\pi} \frac{N \sin(Nx)(-1)^{MN}}{\sin x (-1)^M} = \frac{N^2 \cos(NM\pi)(-1)^{MN}}{\cos(M\pi)(-1)^M} = N^2. \quad (19.22)$$

Ko je vrednost imenovalca enaka nič, dobimo vrh intenzitete uklonjene svetlobe, katerega višina je sorazmerna z N^2 . Vsi maksimumi so enako močni, v resnici pa nanje vpliva tudi širina reže, ki smo jo tu zanemarili. V splošnem se z redom ojačitve maksimumi nižajo. Narišimo intenzitetno funkcijo za $a = 10\lambda$ in $N = 2, 5, 10$. S slike je razvidno, da se z večanjem števila rež vrhovi višajo in ožajajo, pojavijo pa se še dodatni, majhni lokalni vrhovi.

³Francoski matematik Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital (1661-1704), [Wikipedija](#)



Slika 19.4: Normalizirana intenziteta kot funkcija kota za tri različna števila rež: $N = 2$ (modra), $N = 5$ (rdeča) in $N = 10$ (vijolična). Vrednosti intenzitet so deljene z N^2 .

Zapišimo še enkrat **pogoj ojačitve (konstruktivne interference) svetlobnih valov**

$$a \sin \beta = M\lambda, \quad (19.23)$$

pri čemer je M celo število. Enačba ima tudi nazoren geometrijski pomen in se jo navadno tudi izpelje s preprostega geometrijskega vidika. Produkt $a \sin \beta$ na levi strani enačbe je približna razlika med razdaljama sosednjih rež od točke T na zaslonu. To se da pokazati na več načinov, dokaz pa prepuščamo bralcu za vajo. **Ojačitev valovanja se pojavi, ko se poti delnih valov od sosednjih rež do točke razlikujejo za cel večkratnik valovne dolžine.**

Račun smo naredili na primeru, ko imamo veliko število ozkih rež. Poskus je pokazal, da dobimo interferenčni vzorec, tudi če usmerimo svetlobo na eno samo režo. Pojav razložimo podobno kot prehod svetlobe skozi sistem več enakomerno razmaknjenih ozkih rež. V primeru ene same »debelejš« reže si vsak zelo majhen odsek reže mislimo kot vir valovanja (po Huyensovem načelu) in dobimo podobno sliko.

Računski zgled 19.3.1 Sinhronizirana točkasta izvira svetlobe v razmiku 1700 nm oddajata svetlobo z valovno dolžino 600 nm. Kolikšni so koti ojačitev glede na simetralo med izviroma?

Podatka:

$$a = 1700 \text{ nm}$$

$$\lambda = 600 \text{ nm}$$

$$\beta_M = ?$$

Naloga je preprosta:

$$a \sin \beta_M = M\lambda \quad \rightarrow \quad \beta_M = \arcsin \frac{M\lambda}{a}.$$

Smiselno rešitev dobimo za prva dva reda ojačitve pri $\beta_1 = 20,66^\circ$ in $\beta_1 = 44,90^\circ$. Višjih redov ni. Najvišji red ojačitve ocenimo v splošnem tako, da postavimo za največji možni kot pravi kot. Velja $M_{max} = a/\lambda = 17/6 = 2,83 \approx 2$ (pri tem ne zaokrožamo, temveč vedno odrežemo navzdol). Ta primer se razlikuje od prejšnjega računa intenzitet po tem, da koti ojačitev niso majhni, saj je razmik med izviroma le nekajkrat večji od valovne dolžine svetlobe. \square

19.4 Hitrost svetlobe

Naučili smo se, da je hitrost svetlobe, in elektromagnetnega valovanja v splošnem, konstantna. Vendar to velja le za hitrost svetlobe v praznem prostoru, vakuumu. Čim svetloba (ali drugo elektromagnetno valovanje) vpade na snov, se jih hitrost spremeni. **Hitrost svetlobe v snovi je manjša kot v vakuumu.** Vsaka snov namreč s svojimi električnimi in magnetnimi lastnosti vpliva na elektromagnetno valovanje v njej. Enačbo za svetlobno hitrost (18.4) lahko posplošimo

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}, \quad (19.24)$$

kjer sta parametra μ in ϵ magnetna permeabilnost in dielektričnost snovi. V snoveh, ki jih navadno uporabljamo kot optično sredstvo (to je snov, po kateri potuje svetloba), zelo dobro velja $\mu \approx 1$, tako da je vzrok za zmanjšano svetlobno hitrost v sredstvu predvsem dielektrična konstanta $\epsilon > 1$. Zavedati pa se moramo, da je vrednost dielektrične konstante zelo odvisna od valovne dolžine elektromagnetnega valovanja, zato je ne smemo zamenjati s »statično« dielektrično konstanto snovi, to je dielektrično konstanto, povezano s statičnim električnim poljem v snovi. Če torej obravnavamo vidno svetlobo kot ozek del spektra elektromagnetnega valovanja, moramo uporabiti podatek za dielektrično konstanto za snov v tem pasu valovnih dolžin. Pa še za različne barve v tem delu spektra se vrednost te konstante nekoliko razlikuje. V veliko snoveh ima največjo vrednosti pri vijolični svetlobi, najmanjšo pa pri rdeči.

Odvisnost hitrosti valovanja od valovne dolžine valovanja imenujemo disperzija. Disperzija se najlepše izraža v pojavu mavrice, težave pa povzroča pri prenosu signala na daljavo v optičnih vlaknih.

Zelo priročna je vpeljava lomnega količnika optičnega sredstva. **Lomni količnik snovi je razmerje med hitrostima svetlobe v vakuumu in v izbrani snovi**

$$n = \frac{c_0}{c}. \quad (19.25)$$

Lomni količnik je večji od 1 in zaradi disperzije v splošnem odvisen od valovne dolžine valovanja. Če zanemarimo magnetno permeabilnost v snovi, dobimo preprosto zvezo med lomnim količnikom in dielektričnostjo

$$n = \sqrt{\epsilon}. \quad (19.26)$$

Še enkrat zapišimo hitrost svetlobe v vakuumu $c_0 = 299\,792\,458$ m/s. Lomni količnik zraka je blizu 1, zato je svetlobna hitrost manjša samo za okrog 90 km/s, kar navadno zanemarimo. Je pa lomni količnik nekoliko odvisen od zračnega tlaka, temperature, gostote in vlažnosti, zaradi česar pride do zanimivih optičnih pojavov (npr. fatamorgana⁴). Čista voda ima lomni koeficient 1,33, značilno steklo 1,5, diamant pa 2,14, kar se že šteje kot veliko vrednost.

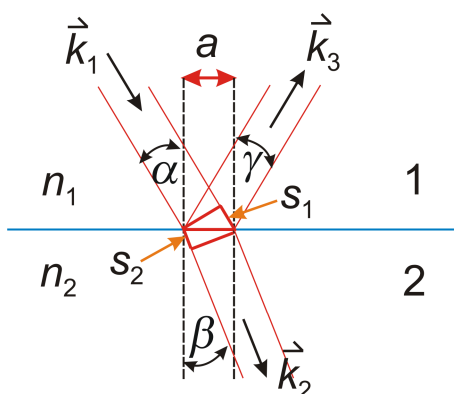
★ Lomni količnik smo vpeljali kot skalar. To velja le v optično izotropnih snoveh, kakršne so zrak, voda ali navadno steklo. Poznamo pa tudi optično anizotropne snovi, v katerih je lomni količnik odvisen od smeri razširjanja svetlobe in od njene polarizacije. V takih primerih lomni količnik zapišemo kot tenzor.

⁴Wikipedija

19.5 Odboj in lom svetlobe

Kadar svetloba vpadne na mejo dveh sredstev z različnima lomnima količnikoma, se del svetlobe odbije, del pa lomi. Pri tem je preprosto določiti kota, pod katerima se odbije ali lomi, zahtevnejše pa je določiti, kolikšen delež svetlobe se odbije in koliko prepusti.

Najprej izračunajmo kota. Žarek naj vpadne iz sredstva 1 (zgoraj, lomni količnik n_1) v sredstvo 2 (spodaj, lomni količnik n_2), ostra meja med njima pa je vodoravna ravnina (slika 19.5). **Kot med vpadnim žarkom in pravokotnico na mejno ravnino imenujemo vpadni kot α , kot med pravokotnico na mejno ravnino in smerjo lomljenega žarka pa imenujemo lomni kot β .** Vpeljemo še odbojni kot γ , ki je kot med pravokotnico na mejo in smerjo odbitega žarka. Svetlobna hitrost vpadnega žarka naj bo c_1 , ravno takšna je hitrost odbitega žarka (saj potuje v istem sredstvu), hitrost lomljenega žarka pa je c_2 . Na sliki je prikazan primer $c_0 > c_1 > c_2$. Pravimo, da je sredstvo 2 optično gostejše kot sredstvo 1, saj ima večji lomni količnik oziroma je v njem hitrost elektromagnetnega valovanja manjša.



Slika 19.5: Geometrijska slika pri odboju in lomu enobarvnega žarka na ravni meji med optičnima sredstvom z različnima lomnima količnikoma. Označeni so tudi valovni vektorji za vse tri žarke.

Za razlago loma in odboja valovanja je priročno vpeljati valovne fronte. **Valovne fronte so točke v prostoru, do katerih valovanje pride istočasno.** Valovne fronte so pri ravnem valu kar ravnine, pravokotne na smer širjenja svetlobe. Valovne fronte so seveda poljubno goste, za razlago pa izberemo tisto fronto vpadnega valovanja, ki se na levi strani žarka ravno dotakne meje med sredstvom (odebeljena rdeča črta). Na desni strani žarka je ta fronta od mejne ravnine vzdolž smeri širjenja oddaljena za s_1 . Širino žarka na mejni ploskvi (hipotenuzo pravokotnega trikotnika) označimo z a .

Drugo valovno fronto izberemo v lomljenem žarku. Ta se na desni strani ravno dotika meje med sredstvom, na levi strani pa je od te ravnine vzdolž širjenja oddaljena za s_2 . Pripadajoči pravokotnik si deli hipotenuzo z zgornjim trikotnikom. Ker imajo različni deli fronte po definiciji isto fazo, je fazna razlika na desnem robu žarka enaka fazni razliki na levem robu žarka. To pomeni, da mora biti čas, v katerem vpadni val prepotuje pot s_1 enak času, v katerem lomljeni val prepotuje pot s_2 . Zapišimo to z enačbo

$$t_1 = t_2 \quad \rightarrow \quad \frac{s_1}{c_1} = \frac{s_2}{c_2}. \quad (19.27)$$

Če izrazimo poti $s_1 = a \sin \alpha$ in $s_2 = a \sin \beta$, dobimo **lomni zakon**

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (19.28)$$

V našem primeru, ko je $c_2 < c_1$, velja $\beta < \alpha$ in žarek se lomi proti vpadni pravokotnici. V nasprotnem primeru se lomi stran od vpadne pravokotnice.

Povzemimo: **pri lomu svetlobe se ohranja frekvenca valovanja, spremenijo pa se hitrost valovanja, valovna dolžina in smer širjenja.**

Podoben sklep lahko naredimo tudi za odbiti žarek. Prepustimo ga bralcu v razmislek, zapišimo le rezultat. **Odbojni kot je enak vpadnemu kotu**

$$\alpha = \gamma. \quad (19.29)$$

Pri odboju svetlobe se ohranjajo frekvenca valovanja, njegova hitrost in valovna dolžina, spremeni pa se smer širjenja.

19.6 Intenziteta odbite in prepuščene svetlobe

Izračunali smo kota, pod katerima se svetloba, ki vpade na mejo dveh sredstev, odbije ali lomi. Izračunajmo še, kolikšen delež vpadne svetlobe se odbije in kolikšen delež je preide v drugo sredstvo.

Najprej izberemo koordinatni sistem. Ravnina med optičnima sredstoma naj bo (x, y) , tako da je normala nanjo v smeri osi z . Izkaže se, da **ležijo vsi trije žarki, vpadni, odbiti in lomljeni, v isti ravnini. To ravnino imenujemo vpadna ravnina** in v našem primeru naj bo to ravnina (y, z) . Valovne vektorje za vse tri žarke zapišemo

$$\vec{k}_1 = k(0, \sin \alpha, -\cos \alpha) \quad (19.30)$$

$$\vec{k}_2 = k'(0, \sin \beta, -\cos \beta) \quad (19.31)$$

$$\vec{k}_3 = k(0, \sin \alpha, \cos \alpha). \quad (19.32)$$

Indeksi 1, 2 in 3 po vrsti označujejo vpadni, lomljeni in odbiti žarek. Velikost valovnega vektorja k za vpadni in odbiti žarek je enaka, saj se širita po isti snovi, medtem ko je vrednost k' v sredstvu 2 drugačna. Izkaže se, da je zelo pomembna tudi polarizacija vpadnega žarka. Dogovor je, da je smer polarizacije podana kar s smerjo električnega polja. Za lažje razumevanje izpeljave obravnavajmo posebej oba značilna primera linearno polarizirane svetlobe. V prvem primeru naj leži smer električnega polja vzporedno z mejno ravnino (oziroma pravokotno na vpadno ravnino), v drugem primeru pa naj leži električno polje v vpadni ravnini.

Preden pa se lotimo izpeljave, moramo poznati pogoje, ki veljajo za električno in magnetno polje na ostri meji dveh snovi. Izkaže se, da se na meji ohranja vzporedna komponenta jakosti električnega polja in pravokotna komponenta gostote magnetnega polja, glede na mejno ravnino. Izpeljava teh t.i. robnih pogojev presega okvir predmeta.

Električno polje pravokotno na vpadno ravnino

Obravnavajmo najprej primer, pri katerem je električno polje pravokotno na vpadno ravnino. To pomeni, da kaže polarizacija v smeri osi x in polje je vzporedno z mejno ravnino (slika 19.6). Zgoraj zapisani robni pogoj zapišemo z enačbo

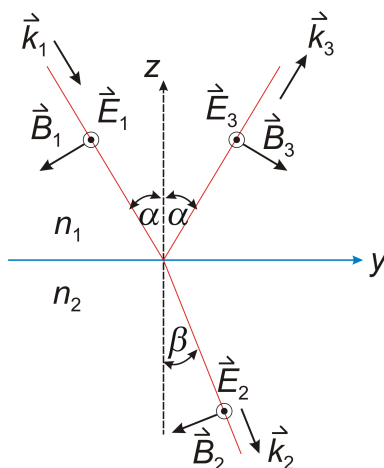
$$E_1 + E_3 = E_2. \quad (19.33)$$

Pri magnetnem polju moramo biti bolj pazljivi, saj ima polje komponenti v smereh y in z . Bralec naj sam preveri pravilnost zapisa gostote magnetnega polja

$$\vec{B}_1 = \frac{E_1}{c_1}(0, -\cos \alpha, -\sin \alpha) \quad (19.34)$$

$$\vec{B}_2 = \frac{E_2}{c_2}(0, -\cos \beta, -\sin \beta) \quad (19.35)$$

$$\vec{B}_3 = \frac{E_3}{c_1}(0, \cos \alpha, -\sin \alpha). \quad (19.36)$$



Slika 19.6: Smeri žarkov in mejna ravnina pri vpadu žarka na mejo med optičnima sredstvoma ter smeri polj. Električno polje je pravokotno na ravnino slike.

Robni pogoj za magnetno polje da

$$(B_3 - B_1) \sin \alpha = -B_2 \sin \beta. \quad (19.37)$$

Če poznamo polje E_1 v vpadnem žarku, dobimo sistem dveh enačb za polji E_2 in E_3

$$E_2 - E_3 = E_1 \quad (19.38)$$

$$\cos \beta \frac{E_2}{c_2} - \cos \alpha \frac{E_3}{c_1} = \cos \alpha \frac{E_1}{c_1}. \quad (19.39)$$

Rešitev gornjega sistema za prepuščeno svetlobo je

$$E_2 = \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} E_1 \quad (19.40)$$

in za odbito svetlobo

$$E_3 = \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} E_1. \quad (19.41)$$

Iz teh enačb lahko izračunamo koeficient odbojnosti (reflektivnosti) R , ki pove, kolikšen del intenzitete vpadnega žarka se od meje dveh sredstev odbije nazaj. Upoštevamo enačbo za gostoto energijskega toka (18.19) in dobimo

$$R_p = \left(\frac{E_3}{E_1} \right)^2 = \left(\frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} \right)^2. \quad (19.42)$$

Indeks » p « se nanaša na to, da je polarizacija pravokotna na vpadno ravnino. Koeficienta prepustnosti (transmisije) svetlobe v drugo optično sredstvo T ni treba posebej računati, saj zaradi ohranitve energije velja $R + T = 1$.

Računski zgled 19.6.1 Svetlobni žarek preide iz vode z lomnim količnikom 1,33 v steklo z lomnim količnikom 1,5. Vpadni kot je 45° . Kolikšen je lomni kot? Kolikšen je koeficient odbojnosti za polarizacijo, pravokotno na vpadno ravnino? Izračunajte še transmissijski koeficient na dva načina: iz podatka za refleksijski koeficient in iz enačbe za električno polje.

Podatki:

$$n_1 = 1,33$$

$$n_2 = 1,5$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\beta = ?$$

$$R_p, T_p = ?$$

Lomni kot izračunamo z lomnim zakonom (enačba 19.28)

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \beta = \arcsin \frac{n_1 \sin \alpha}{n_2} = 38,83^\circ.$$

Refleksijski koeficient je po enačbi (19.42) enak $R_p = 0,0117$. V interpretaciji in računu transmissijskega koeficienta pa se skriva past! Če obravnavamo transmissijski koeficient kot delež prepuščene svetlobne moči žarka, potem je preprosto $T_p = 1 - R_p = 0,9883$. Iz enačbe (19.42) lahko izpeljemo tudi splošen izraz

$$T_p = \frac{4n_1 n_2 \cos \alpha \cos \beta}{(n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta)^2}.$$

Kolikšno razmerje gostot energijskega toka pa dobimo po enačbi (18.19)? Ker je bila ta enačba zapisana za primer elektromagnetnega valovanja v vakuumu, jo moramo dopolniti z dodatnim faktorjem, to je, dielektrično konstanto snovi ϵ . Dobimo

$$\frac{j_2}{j_1} = \frac{\epsilon_2 E_2^2 c_2}{\epsilon_1 E_1^2 c_1} = \frac{n_2 E_2^2}{n_1 E_1^2}.$$

Vstavimo še električno polje E_2 iz zgornje rešitve in dobimo

$$\frac{j_2}{j_1} = \frac{4n_1 n_2 \cos^2 \alpha}{(n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta)^2}.$$

Kako to, da nismo dobili iste vrednosti kot za koeficient T_p zgoraj? Enkrat smo računali razmerje energijskega toka, enkrat pa razmerje gostote energijskega toka. Zaradi različnih kotov glede na vpadno pravokotnico je lomljeni žarek širši od vpadnega in prepuščeni energijski tok se porazdeli na širšo ploskev. Razmerje ploskev je $\cos \beta / \cos \alpha$. Če upoštevamo še ta faktor, dobimo isto vrednost za delež prepuščene svetlobe. Pri pravokotnem vpadu tega problema ni, saj se presek žarka ohranja. \square

Električno polje vzporedno z vpadno ravnino

Obravnavajmo še primer, pri katerem električno polje leži v vpadni ravnini. Torej se vlogi električnega in magnetnega polja zamenjata, saj magnetno polje v vseh treh žarkih kaže v pozitivno smer osi x . Zveznost tangente komponente magnetnega polja nam tako da enačbo

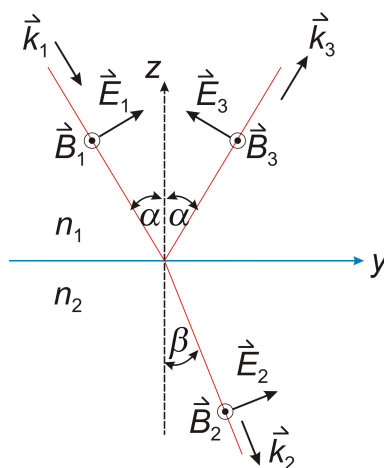
$$B_1 + B_3 = B_2 \quad \rightarrow \quad \frac{E_1}{c_1} + \frac{E_3}{c_1} = \frac{E_2}{c_2}. \quad (19.43)$$

Vektorje električnega polja zapišemo

$$\vec{E}_1 = E_1(0, \cos \alpha, \sin \alpha) \quad (19.44)$$

$$\vec{E}_2 = E_2(0, \cos \beta, \sin \beta) \quad (19.45)$$

$$\vec{E}_3 = E_3(0, -\cos \alpha, \sin \alpha). \quad (19.46)$$



Slika 19.7: Smeri žarkov in mejna ravnina pri vpadu žarka na mejo med optičnima sredstvoma ter smeri polj. Električno polje leži v ravnini slike - vpadni ravnini.

Podobno kot v prejšnjem primeru izračunamo vrednosti za prepuščeno svetlobo

$$E_2 = \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta} E_1 \quad (19.47)$$

in za odbito svetlobo

$$E_3 = \frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \cos \beta}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta} E_1. \quad (19.48)$$

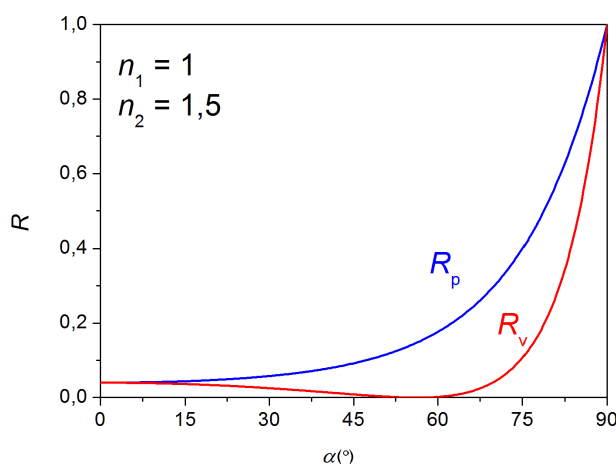
Ustrezni koeficient odbojnosti (reflektivnosti) R je

$$R_v = \left(\frac{E_3}{E_1} \right)^2 = \left(\frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \cos \beta}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta} \right)^2. \quad (19.49)$$

Indeks »v« se nanaša na to, da leži polarizacija (smer električnega polja) v vpadni ravnini. Za enake podatke kot pri računskem zgledu dobimo rezultat $R_v = 1,37 \cdot 10^{-4}$.

Brewsterjev kot

Spoznali smo, da je količina svetlobe, ki se od meje dveh sredstev odbije, odvisna tako od lastnosti obeh snovi kot od vpadnega kota in polarizacije. V splošnem je koeficient odbojnosti tem večji, čim večja je razlika v lomnih količnikih optičnih sredstev. Tako pri prehodu svetlobe iz vode v steklo ali obratno ne pričakujemo veliko odboja, saj sta lomna količnika podobne velikosti. Obravnavajmo zato raje zanimivejši primer prehoda svetlobe iz zraka ($n_1 = 1$) v steklo ($n_2 = 1,5$) in narišimo koeficienta R_p in R_v v odvisnosti od vpadnega kota α (slika 19.8).



Slika 19.8: Primerjava grafov koeficienta R za obe polarizaciji v odvisnosti od vpadnega kota.

Koeficienta sta pri pravokotnem vpadu ($\alpha = 0$) enaka, in sicer

$$R_p = R_v = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2. \quad (19.50)$$

V našem primeru je ta vrednost 0,04. Pri vpadnem kotu 90° sta oba enaka 1, kar je tudi smiselno, saj žarek tedaj oplazi mejno ravnino in nič ga ne gre v drugo optično sredstvo. Zanimivo je dogajanje pri vmesnih kotih. Medtem ko je funkcija $R_p(\alpha)$ ves čas naraščajoča, doseže funkcija $R_v(\alpha)$ pri nekem kotu minimum z vrednostjo nič. To se zgodi, ko je števec v enačbi (19.49) enak nič. Krajši račun naj bralec za vajo naredi sam, rezultat pa je

$$\alpha_B = \arctan \frac{n_2}{n_1}. \quad (19.51)$$

Ta kot se imenuje Brewsterjev kot⁵, njegova vrednost v našem primeru pa je $56,3^\circ$. Velja tudi

$$\beta = \arctan \frac{n_1}{n_2}, \quad (19.52)$$

od koder sledi, da sta pri Brewsterjevem kotu lomljeni in odbiti žarek med seboj pravokotna.

Pri Brewsterjevem vpadnem kotu se valovanje s polarizacijo v vpadni ravnini ne odbije, ampak je celo valovanje prepuščeno. Če na mejno plast vpade nepolarizirana svetloba (pri kateri se polarizacija spreminja naključno) ali pa je svetloba sestavljena iz obeh komponent električnega polja, se pri Brewsterjevem kotu odbije samo tisti del valovanja, katerega polarizacija je pravokotna na vpadno ravnino. **Iz nepolarizirane svetlobe pri Brewsterjevem kotu dobimo linearno polarizirano svetlobo.**

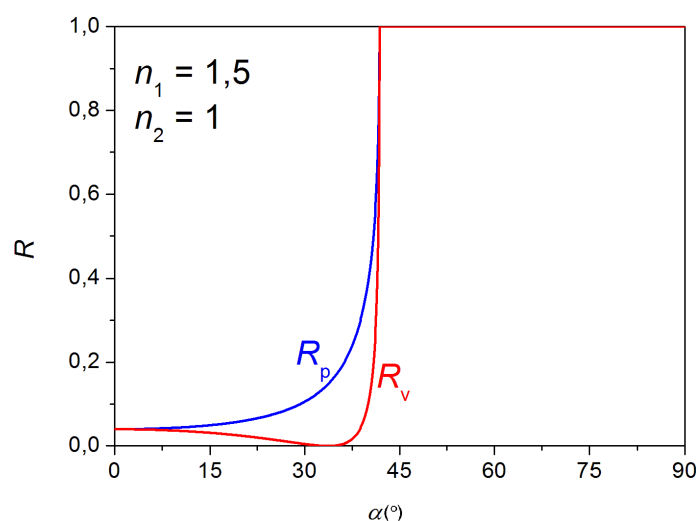
⁵Škotski fizik David Brewster (1781-1868), [Wikipedija](#)

Totalni odboj

Do zdaj smo obravnavali primere, ko je svetloba prehajala iz optično redkejše snovi v optično gostejšo. Poglejmo, kaj se zgodi v obratnem primeru. Lomni zakon je bil izpeljan neodvisno od velikosti lomnih količnikov, zato velja tudi v tem primeru, samo da je $n_1 > n_2$ in zato $\alpha < \beta$. Žarek se lomi stran od vpadnice, vendar lahko doseže vrednost največ $\beta = 90^\circ$. Obstojata torej nek največji kot α , pri katerem še pride do loma. **Če je vpadni kot večji od mejnega, do loma ne pride in vsa vpadla svetloba se odbije po odbojnem zakonu. Temu pojavu pravimo totalni odboj.** Če v enačbo postavimo $\sin \beta = 1$, lahko mejni vpadni kot za lom žarka v optično redkejše sredstvo izračunamo

$$\alpha_{max} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}. \quad (19.53)$$

Pri vpadu svetlobnega žarka iz stekla v zrak ($n_1 = 1,5, n_2 = 1$) je ta kot enak $41,8^\circ$, pri vpadu iz vode v zrak ($n_1 = 1,33, n_2 = 1$) pa $48,75^\circ$, o čemer imamo lahko izkušnje pri potapljanju. Slika (19.9) prikazuje oba odbojna koeficienta za primer vpada svetlobe iz stekla v zrak. Za kote $\alpha > \alpha_{max}$ sta oba koeficienta enaka 1, saj se vsa svetloba odbije.



Slika 19.9: Primerjava grafov koeficienta R za obe polarizaciji v odvisnosti od vpadnega kota, če svetloba prehaja v optično redkejše sredstvo.

Opazimo še nekaj. Pri kotu $\alpha = 0$ sta koeficienta odbojnosti enaka kot v primeru na sliki (19.8), kar je seveda razvidno tudi iz enačb za odbojnost. Pri pravokotnem vpadu žarka na mejno ravnino je torej koeficient odbojnosti enak, ne glede na to, ali gre žarek iz optično redkejšega v optično gostejše sredstvo ali obratno. V primeru zrak-steklo znaša koeficient odbojnosti $R = 4\%$. Ta sklep pa lahko še posplošimo. Premislimo, kako je z vpadnim in lomljenim žarkom na meji dveh optičnih sredstev v primeru, ko gre žarek po isti poti, samo enkrat v eno smer, drugič pa v drugo. Tedaj v enačbah za odbojnost hkrati z lomnima količnikoma n_1 in n_2 zamenjata svoji vlogi tudi kota α in β . Koeficienta odbojnosti se torej ne spremenita!

Vzemimo konkreten zgled prehoda žarka v smeri zrak \rightarrow steklo in obratno. Naj bo pri prehodu zrak \rightarrow steklo vpadni kot $\alpha = 45^\circ$. Lomni kot v steklu je po enačbi (19.28) in dobimo $\beta = 28,13^\circ$. Ustrezni koeficienti odbojnosti in prepustnosti so $R_p = 9,20\% \rightarrow T_p = 90,80\%$ ter $R_v = 0,85\% \rightarrow T_v = 99,15\%$. Enake vrednosti koeficientov dobimo pri prehodu žarka v smeri steklo \rightarrow zrak, če je vpadni kot (v steklu!) $\alpha = 28,13^\circ$ in ustrezni lomni kot v zraku $\beta = 45^\circ$.

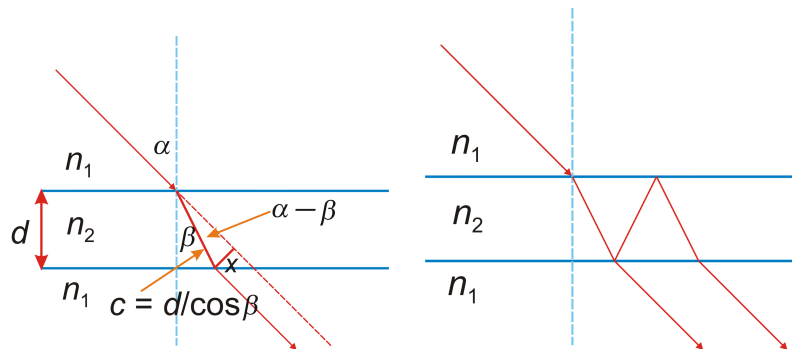
19.7 Odboj na tanki plasti

Obravnavajmo še praktični primer prehoda žarka zrak \rightarrow steklo \rightarrow zrak. Zanimala nas bo prepustnost svetlobe skozi steklo z ravnima vzporednima mejnima ploskvama, npr. skozi šipo. Debelina stekla naj bo dovolj majhna, da lahko zanemarimo še en pojav - absorpcijo svetlobe v steklu. Tako gre samo za odboj in lom na obeh mejnih površinah (slika 19.10). Naj bo vpadni kot iz zraka 45° . Lomni kot v steklu izračunano po lomnem zakonu (enačba 19.28) in dobimo $28,13^\circ$. Ko pride žarek na drugi strani stekla v zrak, se lomi in oklepa s pravokotnico na šipo spet kot 45° . **Skozi šipo prepuščen žarek je torej vzporeden vpadnemu, vendar je premaknjen.** Pravokotno razdaljo med žarkoma (če bi se začetni žarek sploh ne lomil, kot je prikazano s črtkano črto) izračunamo takole

$$x = c \tan(\alpha - \beta) = (d / \cos \beta) \tan(\alpha - \beta), \quad (19.54)$$

kjer je d debelina stekla. Pri steklu debeline $d = 3 \text{ mm}$ je premik žarka $x = 1,03 \text{ mm}$.

Ker je koeficient prepustnosti na obeh mejah enak, izračunamo skupno prepustnost žarka s kvadriranjem koeficientov prepustnosti. Če je vpadna svetloba nepolarizirana, je v prepuščenem žarku po enačbi 19.42 $0,908^2 = 84,45 \%$ intenzitete dela vpadnega žarka s pravokotno polarizacijo in po enačbi 19.49 $0,991^2 = 98,31 \%$ intenzitete dela vpadnega žarka z vzporedno polarizacijo.



Slika 19.10: Prehod žarka zrak-steklo-zrak. Prikaz izračuna vzporednega premika direktno prepuščenega žarka (levo) ter primerjava tega žarka z žarkom, prepuščenim z dvema vmesnima odbojema.

Vendar smo pri naši obravnavi nekaj pozabili. Žarek, ki se ob izstopu odbije, se ponovno deloma odbije od zgornje meje in lomi pri izstopu iz plasti stekla in tako naprej ... Zaporedni prepušчени žarki med seboj interferirajo in prepuščena svetloba je ojačana, če je fazna razlika med posameznimi žarki večkratnik 2π . Krajši geometrijski račun pokaže, da pride do ojačitve prepuščene svetlobe na tanki plasti pri pogoju

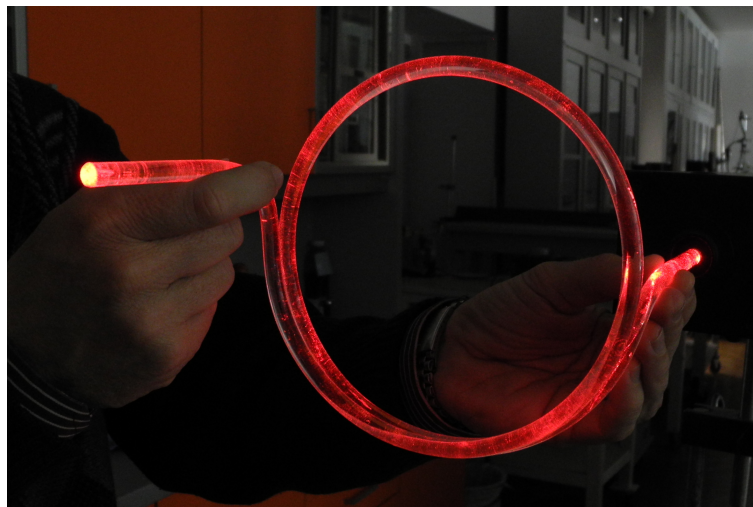
$$2d \cos \beta = N\lambda. \quad (19.55)$$

Koti, pri katerih pride do ojačitve prepuščene oziroma odbite svetlobe, so odvisni od debeline plasti in od valovne dolžine svetlobe. Za različne dolžine se odbita (ali prepuščena) svetloba ojača pri različnih kotih. Na primer: svetloba modre barve se odbije pod malenkost drugim kotom kot svetloba zelene barve, in ta spet pod drugim kotom kot svetloba rdeče barve ... Na tankih plasteh, npr. na tanki plasti olja na vodni gladini ali med dvema tesno stisnjenima ravnima stekelcema, zato pogosto vidimo 'mavrico'.

19.8 Optično vlakno

Spoznali smo pojav totalnega odboja pri prehodu iz optično gostejše v optično redkejšo sredstvo. Kaj pa se zgodi, če združimo totalni odboj in tanko plast? Žarek se v tanki plasti totalno odbija in ostane ujet vanjo. To je osnova za delovanje optičnih vodnikov, ki jih uporabljamo za prenos svetlobnih signalov. Svetlobni žarek pod velikim vpadnim kotom usmerimo na mejo med steklom (ali prozorno plastiko), tam se totalno odbije, nato se totalno odbije od nasprotne meje ... Tudi če je optični vodnik rahlo zviti, je praktično v vseh primerih vpadni kot žarka znotraj vodnika glede na pravokotnico na mejo vodnik - zrak večji od mejnega kota za popolni odboj.

Poskus 19.8.1 — Optični vodnik. Z rdečo lasersko svetlobo posvetimo skozi zvito plastično maso (ni votla cev, temveč polna) in opazujemo prehod skozi drugi konec »vodnika«.



Potovanje laserske svetlobe po »optičnem vodniku«

20. Sklepne misli

Čestitke, prebili ste se do konca knjige! Poleg razmeroma lahke snovi so bili namenoma dodani težji odstavki, zato ste imeli tisti, ki vas fizika bolj zanima, priložnost zvedeti kaj več. Tudi naloge v računskih zgledih so bile različno zahtevne, od lahkih do precej težjih, marsikje pa je bilo vključeno tudi odvajanje in integriranje. Če ste prebrali vsaj osnovnejše stvari, vam bo to zagotovo pomagalo pri pisnem in ustnem preverjanju znanja. Reševanje fizikalnih problemov pa je tudi dober umski trening, tako kot reševanje matematičnih problemov ali pa tistih iz programiranja. Vsebina knjige ne pokriva vseh ključnih vej fizike, temveč le mehaniko in elektromagnetizem. Termodinamika, ki je dokaj obsežna in pomembna veda (npr. zaradi razumevanja delovanja toplotnih strojev in njihove optimizacije), je v knjigi le nakazana v dodatku o plinih. Izpustili smo moderno fiziko, saj je en semester prekratek čas, da bi se lahko podrobno ukvarjali z vsem tem. Kdor bi rad zvedel kaj več tudi o teh fizikalnih temah, temu priporočamo npr. med literaturo omenjeni učbenik *Fundamental of physics*, ki vsebuje prek 1200 strani, zato si je zanj treba vzeti kar veliko časa.

Glavni namen tega predmeta ni bil prikaz celotne fizike, temveč predstavitev t. i. fizikalne metode oz. naravoslovno-znanstvenega principa pri reševanju fizikalnih problemov v zvezi z opazovanimi naravnimi pojavi. Upamo, da nam je to uspelo.

Vsekakor pa so pobude študentov za nadgrajevanje knjige vedno dobrodošle!

Avtorji

O avtorjih

Izr. prof. dr. Irena DREVENŠEK OLENIK je visokošolska učiteljica za področje fizike na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Poleg tega je tudi višja znanstvena sodelavka na Institutu Jožef Stefan v Ljubljani. Doktorat iz fizikalnih znanosti je pridobila leta 1996 na Univerzi v Ljubljani. Po doktoratu je bila v letih 1998-99 na podoktorskem usposabljanju na Univerzi v Nijmegenu na Nizozemskem. V šolskem letu 2005-06 je bila gostujoča profesorica na Univerzi na Dunaju v Avstriji in v šolskem letu 2012-13 gostujoča profesorica na Univerzi Nankai v Tienjinu na Kitajskem. Njeno znanstveno-raziskovalno delo je osredotočeno na eksperimentalne raziskave na področju fizike mehke snovi, še posebej polimerov, tekočih kristalov in bioloških molekul. Njena raziskovalna specifičnost je uporaba različnih linearnih in nelinearnih optičnih tehnik za raziskave fizikalnih lastnosti omenjenih snovi. O rezultatih svojega raziskovalnega dela je doslej poročala v okoli 80 člankih. Je tudi avtorica oz. soavtorica številnih strokovnih in poljudnoznanstvenih prispevkov, objavljenih v slovenskih strokovnih revijah in časopisih.



Doc. dr. Milan AMBROŽIČ je visokošolski učitelj za področje fizike na Fakulteti za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru in asistent za fiziko na Fakulteti za računalništvo in informatiko Univerze v Ljubljani. Doktorat iz fizikalnih znanosti je pridobil leta 1996 na Univerzi v Ljubljani z delom na področju teoretičnih raziskav kiralnih tekočih kristalov v cilindrični geometriji. Sedaj se največ ukvarja z mrežnimi modeli nematičnih tekočih kristalov, deluje pa tudi na področju teoretičnih raziskav mehanskih lastnosti strukturne keramike. Pri mehanskih lastnostih keramike se je doslej največ ukvarjal z njihovo upogibno trdnostjo, lomno žilavostjo in Weibullovo porazdelitvijo. Objavljenih ima okrog 40 znanstvenih člankov, razen tega pa še veliko strokovnih in poljudno-znanstvenih prispevkov, nekaj učbenikov in drugega učnega gradiva za različne stopnje izobraževalnega sistema.



Dr. Mojca VILFAN je asistentka za področje fizike na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani in znanstvena sodelavka na Institutu Jožef Stefan v Ljubljani. Doktorat iz fizikalnih znanosti je pridobila leta 2001 na Univerzi v Ljubljani za eksperimentalno proučevanje urejanja tekočih kristalov. Po doktoratu je gostovala na Univerzi v Cambridgu v Veliki Britaniji, nato pa 2002-03 še na Univerzi v Münchnu v Nemčiji. Dela na področju eksperimentalne fizike mehke snovi, kar vključuje predvsem optične raziskave tekočih kristalov, bioloških in biomimetičnih sistemov. Objavila je okoli 20 znanstvenih člankov, poleg tega še več strokovnih in poljudno-znanstvenih prispevkov, in dva osnovnošolska učbenika.



21. Dodatek: Matematični zgledi

21.1 Integrali in odvodi

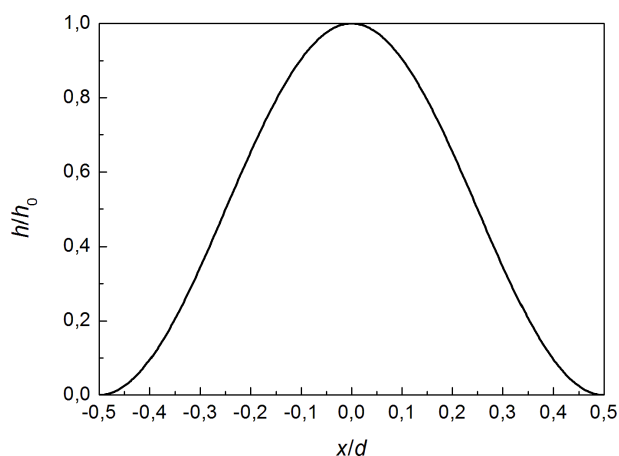
Računski zgled 21.1.1 Globina vode v reki se spreminja s prečno razdaljo x kot funkcija $h(x) = h_0 \cos^2(\pi x/d)$. Pri tem je $d = 100$ m širina reke, koordinata x pa teče od $-d/2$ do $+d/2$. Največja globina je $h_0 = 20$ m pri $x = 0$ (na sredini reke). Skicirajte graf $h(x)$ v omenjenem intervalu. Kolikšna je ploščina prereza reke?

Podatka:

$$d = 100 \text{ m}$$

$$h_0 = 20 \text{ m}$$

$$S = ?$$



Slika 21.1: Graf funkcije $\cos^2(\pi x/d)$

Izračunajmo ploščino prereza reke. V mislih prerez razdelimo na tanke trakove debeline dx in višine $h(x)$. Izračunamo ploščino posameznega traku $dS = h(x)dx$. Za ploščino celotnega prereza moramo ploščine vseh trakov sešteti - moramo integrirati

$$S = \int h(x)dx = \int_{-d/2}^{d/2} h_0 \cos^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) dx.$$

Izračunamo integral

$$S = \frac{h_0}{2} \int_{-d/2}^{d/2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right)\right) dx = \frac{h_0}{2} \left(x + \frac{d}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi x}{d}\right)\right) \Big|_{-d/2}^{d/2} = \frac{h_0 d}{2} = 1000 \text{ m}^2. \square$$

Računski zgleđ 21.1.2 Avtomobil AX25 je v času $t = 0$ na osi x v točki (25 km, 0), avtomobil BY50 pa na osi y v točki (0, 50 km). Gibljeta se enakomerno po svojih oseh s hitrostma $v_{AX} = 80$ km/h in $v_{BY} = 100$ km/h. Kako se razdalja med njima spreminja s časom? Obravnavajte dve možnosti: oba avtomobila se gibljeta proč od izhodišča ali pa oba proti izhodišču. Narišite graf $d(t)$ za prvo uro vožnje.

Podatki:

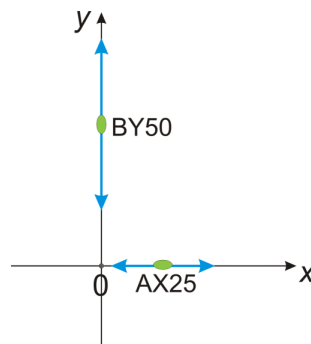
$$x_0 = 25 \text{ km}$$

$$y_0 = 50 \text{ km}$$

$$v_{AX} = 80 \text{ km/h}$$

$$v_{BY} = 100 \text{ km/h}$$

$$d(t) = ?$$



Slika 21.2: Gibanje avtomobilov AX25 in BY50

Obravnavajmo kar oba primera hkrati. V prvem primeru zapišemo časovno odvisni koordinati avtomobilov kot $x_{AX} = x_0 + v_{AX}t$ in $y_{BY} = y_0 + v_{BY}t$. V drugem primeru pa: $x_{AX} = x_0 - v_{AX}t$ in $y_{BY} = y_0 - v_{BY}t$, tako da za oba primera skupaj zapišemo $x_{AX} = x_0 \pm v_{AX}t$ in $y_{AY} = y_0 \pm v_{BY}t$. Trenutno razdaljo med avtomobiloma izračunamo po Pitagorovemu izreku

$$d(t) = \sqrt{(x_0 \pm v_{AX}t)^2 + (y_0 \pm v_{BY}t)^2}.$$

Grafa $d(t)$ sta dokaj preprosta. V primeru oddaljevanja od izhodišča se avtomobila tudi med seboj ves čas oddaljujeta. V primeru približevanja pa se najprej razdalja med njima zmanjšuje, dokler nista skoraj hkrati v izhodišču, potem se spet oddaljujeta drug od drugega. Najmanjšo razdaljo med njima naj bralec za vajo ugotovi sam. Poučno je še poiskati asimptotično vedenje funkcije $d(t)$ za zelo velike čase. V tem primeru kvadiramo oba binoma pod korenem izraza za $d(t)$ in zanemarimo člena x_0^2 in y_0^2 . Dobimo

$$d(t) = \sqrt{v_{AX}^2 t^2 \pm 2x_0 v_{AX} t + v_{BY}^2 t^2 \pm 2y_0 v_{BY} t}$$

in

$$d(t) \approx t \sqrt{v_{AX}^2 + v_{BY}^2} \sqrt{1 \pm 2 \frac{(x_0 v_{AX} + y_0 v_{BY})t}{(v_{AX}^2 + v_{BY}^2)t^2}}.$$

Ko gre $t \rightarrow \infty$, postaja zadnji člen pod drugim korenem veliko manjši od 1, zato lahko naredimo približek

$$\sqrt{1 \pm 2x} = (1 \pm 2x)^{1/2} \approx 1 \pm x.$$

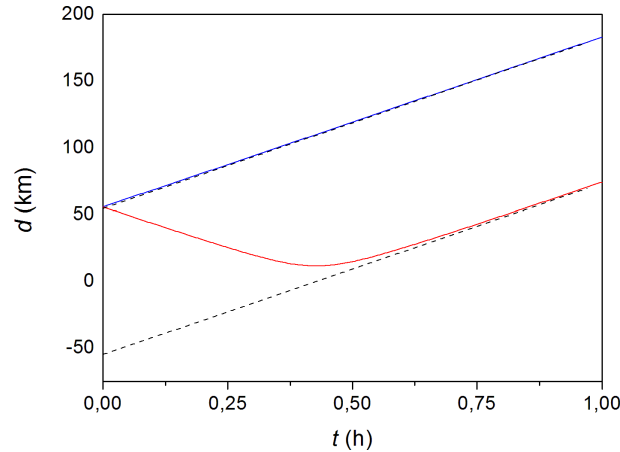
Torej:

$$d(t) \approx t \sqrt{v_{AX}^2 + v_{BY}^2} \left(1 \pm \frac{(x_0 v_{AX} + y_0 v_{BY})t}{(v_{AX}^2 + v_{BY}^2)t^2} \right).$$

Nazadnje dobimo asimptotični približek

$$d(t) = v_{ef}t \pm d_{ef},$$

kjer je efektivna hitrost oddaljevanja $v_{ef} = \sqrt{v_{AX}^2 + v_{BY}^2}$ in efektivna začetna razdalja (ki ni enaka resnični začetni razdalji!) $d_{ef} = (x_0 v_{AX} + y_0 v_{BY}) / v_{ef}$.



Slika 21.3: Graf odvisnosti razdalje med avtomobiloma od časa, če peljeta proč od izhodišča (modra črta) ali skozenj (rdeča črta). Črtkani črti sta asimptoti za velike čase. □

Računski zgled 21.1.3 Potencialno energijo med dvema nevtralnima atomoma lahko zapišemo z Lennard-Jonesovim potencialom¹

$$V(r) = 4\varepsilon \left(\left(\frac{a}{r} \right)^{12} - \left(\frac{a}{r} \right)^6 \right),$$

kjer je r razdalja med težiščema atomov. Parameter ε ima enoto energije, npr. eV, a pa enoto razdalje, npr. nm. Narišite brezdimenzijski graf odvisnosti V/ε od normalizirane razdalje r/a .

Preden narišemo graf, poiščemo ničle funkcije, njen minimum in asimptotično vedenje za $r \rightarrow 0$ in $r \rightarrow \infty$. Najprej poiščimo točke, kjer zavzame funkcija vrednost nič

$$V(r) = 4\varepsilon \left(\left(\frac{a}{r} \right)^{12} - \left(\frac{a}{r} \right)^6 \right) = 0 \quad \rightarrow \quad r = a.$$

Poiščemo ekstrem funkcije, tako da funkcijo odvajamo

$$\frac{dV(r)}{dr} = 4\varepsilon \left(-12 \frac{a^{12}}{r^{13}} + 6 \frac{a^6}{r^7} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad r_m = a\sqrt[6]{2} \quad \rightarrow \quad V_m = -\varepsilon.$$

Minimum energije je torej približno pri $r_m \approx 1,12 a$. Da je to res minimum in ne morda maksimum, se prepričamo tako, da izračunamo v tej točki drugi odvod d^2V/dr^2 in pogledamo njegov predznak. Če je predznak drugega odvoda pozitiven, gre res za minimum funkcije. Drugi odvod potenciala je

$$\frac{d^2V(r)}{dr^2} = 24\varepsilon \frac{a^6}{r^8} \left(26 \frac{a^6}{r^6} - 7 \right).$$

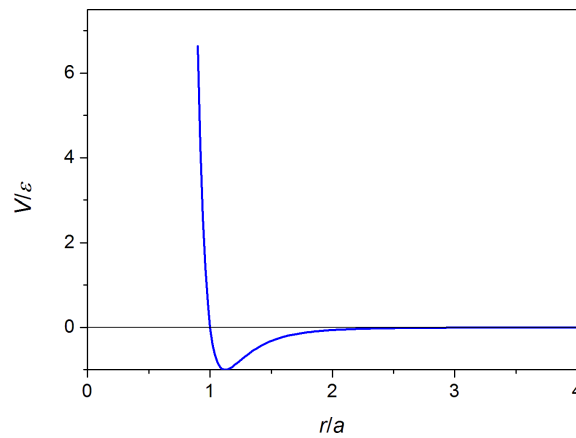
¹Angleški matematik Sir John Edward Lennard-Jones (1894-1954), [Wikipedija](#)

Izvednotimo ga v točki ekstrema $r_m = a\sqrt[6]{2}$ in dobimo pozitivno vrednost, torej je v tej točki res minimum. Izračunajmo še, pri katerem r je funkcija konveksna in kje konkavna. Na prehodu bo drugi odvod ravno enak nič

$$\frac{d^2V(r)}{dr^2} = 24\epsilon \frac{a^6}{r^8} \left(26 \frac{a^6}{r^6} - 7 \right) = 0 \quad \rightarrow \quad r_k = a\sqrt[6]{\frac{26}{7}}.$$

Za majhne razdalje r je funkcija $V(r)$ konveksna, ker je drugi odvod pozitiven. Prehod iz konveksnosti v konkavnost funkcije je pri $r_k \approx 1,24 a$, torej desno od minimuma, kot mora biti.

Poglejmo še asimptotično vedenje funkcije za $r \rightarrow 0$. Dobimo $V(r) \sim 4\epsilon(a/r)^{12} \rightarrow \infty$. V ničli je torej pol te funkcije. Na drugi strani pa $r \rightarrow \infty$ in potencial $V(r) \sim -4\epsilon(a/r)^6 \rightarrow -0$. Zdaj imamo vse potrebno za narisati graf Lennard-Jonesovega potenciala.



Slika 21.4: Graf odvisnosti $V(r)$ za Lennard-Jonesov model. \square

Računski zgleid 21.1.4 Iz tanke kartonaste okrogle plošče s polmerom R žejni planinec izreže nek krožni izsek s središčnim kotom α . Preostanek kroga stakne skupaj zvije v plašč stožca in zalepi. Kolikšen naj bo kot α izrezanega izseka, da bo lahko planinec s stožcem zajel največ vode iz studenca?

Ko zvijemo del kroga v stožec, postane stranica plašča stožca enaka polmeru prvotnega kroga $s = R$ (skicirajte sami). Obseg (sicer manjkajoče) osnovne ploskve stožca postane enak zmanjšanemu obsegu prvotnega kroga $o = (2\pi - \alpha)R$. To je enako $2\pi r$, pri čemer je r polmer osnovne ploskve stožca. Polmer stožca je torej

$$r = \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)R,$$

njegovo višino h pa dobimo po Pitagorovem izreku $h = \sqrt{s^2 - r^2}$. Prostornina nastalega valja je

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} r^2 \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Za neodvisno spremenljivko vzamemo polmer stožca r , ki je linearno odvisen od kota α . Pri ekstremu je odvod dV/dr enak nič

$$\frac{dV}{dr} = \frac{\pi}{3} \left(2r\sqrt{R^2 - r^2} - r^2 \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right) = 0.$$

Neničelna rešitev zadnje enačbe je $r = R\sqrt{2/3}$, čemur ustreza kot

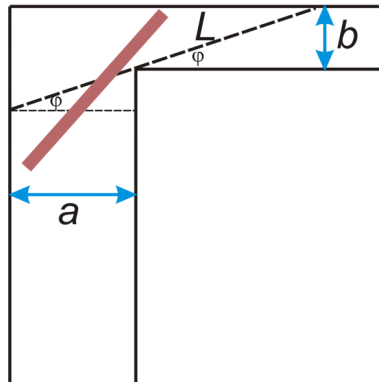
$$\alpha = 2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx 66^\circ.$$

Največji volumen stožca je potem

$$V_m = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}.$$

Če je polmer kartona $R = 1$ dm, lahko planinec zajame približno 4 dl vode. \square

Računski zgleđ 21.1.5 Skozi hodnik, ki se pravokotno pregane, skušamo spraviti tanko ploščo, ki je ne smemo nagibati. En krak hodnika ima širino a , drugi pa b . Kolikšna je lahko največja dolžina plošče, da jo še spravimo skozi pregib hodnika?



Slika 21.5: Pregib hodnika in premik plošče skozenj

Zapišemo dolžino črtkane črte, ki se dotika dveh sten hodnika. Dolžina L je odvisna od kota φ in pri nekem kotu bo imela minimum. Zapišimo

$$L = \frac{a}{\cos \varphi} + \frac{b}{\sin \varphi}.$$

Poiščemo kot φ_m , pri katerem ima dolžina L minimum

$$\frac{dL}{d\varphi} = \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{b \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_m = \arctan \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

Ustrezna dolžina je

$$L_m = \frac{a}{\cos \varphi_m} + \frac{b}{\sin \varphi_m}.$$

Upoštevamo še zvezi

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \varphi + 1}} \quad \text{in} \quad \sin \varphi = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{\tan^2 \varphi + 1}}$$

in z malo možganovadbe dobimo

$$L_m = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

To je največja dolžina plošče, ki jo lahko spravimo skozi pregib. Naloga je lažja v primeru $a = b$. Tedaj je $\varphi_m = 45^\circ$, kar se da videti iz simetrije problema, in dolžina $L_m = 2^{3/2}a$. \square

Računski zgle 21.1.6 Popotnik mora v pragozdu preplavati 300 m široko reko s tokom 4 m/s. K desnemu bregu lahko dostopa le na mestu 800 m pred njenim slapom. Najlaže preplava reko tako, da pride na drugi breg tik pred slapom. Pod kolikšnim kotom glede na pravokotnico nad reko naj plava, da lahko plava z najmanjšo hitrostjo plavanja? Kako hitro mora tedaj plavati?

Podatka:

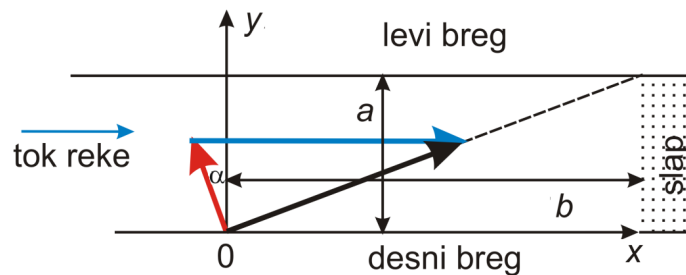
$$a = 300 \text{ m}$$

$$b = 800 \text{ m}$$

$$v_r = 4 \text{ m/s}$$

$$\alpha = ?$$

$$v = ?$$



Slika 21.6: Smeri pri plavanju čez reko. Vektorji hitrosti so prikazani z debelejšimi puščicami: hitrost reke (modra), hitrost plavanja (rdeča), vsota obeh hitrosti (črna).

Plavalec naj plava s hitrostjo \vec{v} . Ker ga bo reka odnašala s hitrosjo \vec{v}_r , bo njegova skupna hitrost glede na breg enaka vsoti obeh hitrosti $\vec{v}_b = \vec{v} + \vec{v}_r$. Glede na koordinatni sistem, prikazan na sliki, za vektor hitrosti plavalca (relativno glede na tok reke) zapišemo

$$\vec{v} = v(-\sin \alpha, \cos \alpha),$$

hitrost reke je $\vec{v}_r = (v_r, 0)$, hitrost plavalca glede na breg pa $\vec{v}_b = (v_{bx}, v_{by})$. Plavalčevo izhodišče je tudi izhodišče koordinatnega sistema. Plavalec plava (glede na breg) od izhodiščne točke proti začetku slapa na drugi strani reke, zato velja

$$\frac{v_{by}}{v_{bx}} = \frac{a}{b}.$$

Hkrati pa je hitrost plavalca glede na breg vektorska vsota njegove hitrosti glede na rečni tok in hitrosti reke

$$\vec{v}_b = (v_{bx}, v_{by}) = (-v \sin \alpha + v_r, v \cos \alpha).$$

Zapišemo enačbo po komponentah, upoštevamo gornje razmerje hitrosti in izračunamo hitrost plavalca kot funkcijo kota

$$v = \frac{v_r a}{b \cos \alpha + a \sin \alpha}.$$

Dobljeno hitrost odvajamo po kotu, da dobimo najmanjšo hitrost

$$\frac{dv}{d\alpha} = -\frac{v_r a (a \cos \alpha - b \sin \alpha)}{(a \sin \alpha + b \cos \alpha)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_m = \arctan \frac{a}{b} = 20,56^\circ.$$

Ustrezna hitrost plavanja je

$$v_m = \frac{av_r}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1,4 \text{ m/s. } \square$$

Računski zgled 21.1.7 Premislimo o zaprtosti ali odprtosti vesolja. V poenostavljenem modelu si vesolje mislimo kot končno kroglo s polmerom R in enakomerno porazdeljeno snovjo z gostoto ρ . Poleg gravitacijske energije ima snov še kinetično energijo, saj se posamezni deli snovi v povprečju gibljejo v radialni smeri od središča navzven $v = Hr$. Izkaže se, da je hitrost oddaljevanja sorazmerna z oddaljenostjo snovi od središča krogle r , konstanto H pa imenujemo Hubblova konstanta. Od česa je odvisno, ali je vsota kinetične in gravitacijske energije pozitivna (odprt sistem) ali negativna (zaprt sistem)?

Izračunajmo oba energijska prispevka. To naredimo tako, da integriramo energijo po tankih krogelnih lupinah. Prostorninski element je $dV = 4\pi r^2 dr$. Kinetična energija je

$$W_k = \frac{1}{2}\rho \int_V v^2 dV = \frac{1}{2}\rho 4\pi \int_0^R (Hr)^2 r^2 dr = 2\pi\rho H^2 \frac{R^5}{5}.$$

Račun gravitacijske energije zahteva več razmisleka. Gravitacijska sila med točkastima telesoma na razdalji r je $F = \kappa m_1 m_2 / r^2$ in ustrezna gravitacijska energija $W_g = -\kappa m_1 m_2 / r$, kjer je κ gravitacijska konstanta. To velja tudi za energijo med razsežno kroglo s polmerom r in točkastim delcem na njeni površini. Vzemimo kroglo z radijem r in maso $m = 4\pi\rho r^3 / 3$ in ji postopoma kocentrično dodajajmo tanke plasti. Vsaka dodatna plast z debelino dr in maso $dm = 4\pi\rho r^2 dr$ prispeva dodatno gravitacijsko energijo $dW = -\kappa m dm / r$. Celotna energija je vsota vseh prispevkov

$$W_g = - \int \frac{\kappa m dm}{r} = -\frac{16}{3}\pi^2 \kappa \rho^2 \int_0^R r^4 dr = -\frac{16}{3}\pi^2 \kappa \rho^2 \frac{R^5}{5}.$$

Skupna energija je

$$W = W_k + W_g = 2\pi\rho H^2 \frac{R^5}{5} - \frac{16}{3}\pi^2 \kappa \rho^2 \frac{R^5}{5} = 2\pi\rho \left(H^2 - \frac{8}{3}\pi\kappa\rho \right) \frac{R^5}{5}.$$

Predznak energije je torej odvisen od izraza v oklepaju. V mejnem primeru (ravno vesolje), ko je $W = 0$, mora veljati za kritično gostoto snovi

$$\rho_k = \frac{3H^2}{8\pi\kappa}.$$

V primeru $\rho > \rho_k$ prevlada negativna gravitacijska energija in vesolje naj bi se nekoč spet krčilo (zaprt vesolje). Vendar se po tem preprostem modelu širjenje vesolja zaradi gravitacijskega privlaka upočasnjuje, zato se tudi konstanta H dolgoročno zmanjšuje. V primeru $\rho < \rho_k$ prevlada pozitivna kinetična energija in vesolje se bo vedno širilo. Po sodobnih ugotovitvah pa je stvar še bolj zapletena, ker se vesolje celo pospešeno širi, namesto da bi se širjenje postopno upočasnjevalo. To pomeni, da imamo opraviti s še neko dodatno pozitivno energijo (temna energija), ki ima nasproten učinek kot gravitacija. Povzroča odbojne sile, zato bi ji lahko rekli antigravitacija.

Ta zgled je fizikalno zanimiv in seveda usoden za naše vesolje, zato ga obravnavajmo podrobnejše. Mislimo si, da je mnogotero vesolje sestavljeno iz množice posameznih vesolj, ki ves čas nastajajo. Nekatera so odprta, druga zaprta, vpliv temne energije pa zanemarimo. Torej po Velikem puku vsakega takšnega vesolja njegov »polmer« R narašča s časom (vsaj nekaj časa, če se zaradi gravitacije pozneje vesolje spet krči). Gostota vesolja zato pojema, prav tako »konstanta« H . Zanimajo nas časovne odvisnosti $R(t)$, $\rho(t)$, $H(t)$, če poznamo vrednosti R_0 , ρ_0 in H_0 zdaj, to naj bo ob $t = 0$. Ohranja se masa vesolja, zato velja enačba $\rho V = \rho_0 V_0$ in $\rho R^3 = \rho_0 R_0^3$. Ohranja se tudi mehanska energija, izpeljana zgoraj. Iz ohranitve energije izpeljemo

$$H = \frac{R_0}{R} \sqrt{H_0^2 + \frac{8}{3}\pi\kappa\rho_0 \left(\frac{R_0}{R} - 1 \right)}.$$

Imamo pa še eno zvezo. Ker snov beži od središča krogle navzven, se povečuje »polmer« vesolja. Njegovo večanje je določeno ravno s hitrostjo snovi na robu krogle $dR/dt = v(R) = HR$. Če vstavimo zadnji izraz za R v gornjo enačbo, dobimo

$$\frac{dR}{dt} = HR = R_0 \sqrt{H_0^2 + \frac{8}{3} \pi \kappa \rho_0 \left(\frac{R_0}{R} - 1 \right)}.$$

To je diferencialna enačba z lepo ločljivima spremenljivkama R in t . Rešimo jo tako, da ločimo spremenljivki, nato pa obe strani enačbe hkrati integriramo

$$\int_{R_0}^R \frac{dR}{\sqrt{H_0^2 + \frac{8}{3} \pi \kappa \rho_0 \left(\frac{R_0}{R} - 1 \right)}} = R_0 \int_0^t dt.$$

Integral na levi strani je odvisen od predznaka vsote prvega in tretjega člena pod korenem $A = H_0^2 - 8\pi\kappa\rho_0/3$, torej od tega, ali imamo ravno, odprto ali zaprto vesolje. Najpreprostejša je rešitev za ravno vesolje pri $A = 0$

$$\int_{R_0}^R \frac{dR}{\sqrt{\frac{8}{3} \pi \kappa \rho_0 \frac{R_0}{R}}} = \frac{R^{3/2} - R_0^{3/2}}{\sqrt{6\pi\kappa\rho_0 R_0}} = R_0 t \quad \rightarrow \quad R = R_0 \left(1 + \sqrt{6\pi\kappa\rho_0} t \right)^{2/3}.$$

Poglejmo si odprto vesolje, $A > 0$. Pišimo še $B = 8\pi\kappa R_0 \rho_0 / 3$, pa imamo integral

$$\int_{R_0}^R \frac{dR}{\sqrt{A + B/R}} = \int_{R_0}^R \frac{RdR}{\sqrt{R^2 A + BR}} = \frac{1}{A} \left(\sqrt{AR^2 + BR} - \frac{B}{2\sqrt{A}} \ln(2\sqrt{A^2 R^2 + ABR} + 2AR + B) \right) \Big|_{R_0}^R.$$

Pri računanju integrala smo si pomagali s priročnikom. Bralec se lahko prepriča v pravilnost, da dobljeni integral odvoja. Če vstavimo obe meji in integral spet izenačimo z $R_0 t$, dobimo tako implicitno odvisnost med R in t .

V tretjem primeru, $A < 0$, pa velja

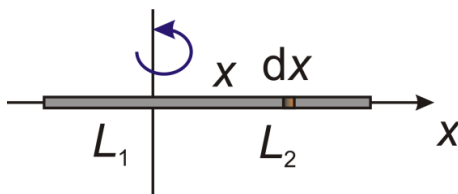
$$\int_{R_0}^R \frac{RdR}{\sqrt{R^2 A + BR}} = \frac{1}{A} \left(\sqrt{AR^2 + BR} + \frac{B}{2\sqrt{A}} \arcsin\left(\frac{2AR + B}{B}\right) \right) \Big|_{R_0}^R.$$

Tudi tu dobimo odvisnost $R(t)$ v implicitni obliki. Tu smo upoštevali le prvi del razvoja zaprtega vesolja, ko se še širi. Za obravnavanje krčenja, potem ko je vesolje doseglo največji mogoči polmer, bi morali vzeti negativno rešitev za spreminjajočo se Hubblovo konstanto H . To prepustimo bralcu. Mimogrede še to v razmislek: kje v zgornjih izrazih se pri zaprtem vesolju vidi, kolikšen največji polmer doseže pred ponovnim krčenjem? \square

22. Dodatek: Vztrajnostni momenti

22.1 Izračun vztrajnostnih momentov

Računski zglede 22.1.1 Kolikšen je vztrajnostni moment homogene tanke palice dolžine L in mase m pri vrtenju okrog osi, ki je pravokotna na palico in deli palico na odseka dolžin L_1 in L_2 , $L = L_1 + L_2$? Kolikšen pa je vztrajnostni moment tanke pravokotne plošče okoli osi, ki gre skozi njegovo središče pravokotno na ravnino pravokotnika?



Slika 22.1: Izpeljava J pri vrtenju palice

Zaradi podobnosti je dovolj, da posebej izračunamo le vztrajnostni moment desnega odseka z dolžino L_2 in maso $m_2 = mL_2/L$. Palico razdelimo na kratke koščke dolžine dx , vsak tak košček pa doprinese k vztrajnostnemu momentu palice

$$dJ = dm x^2 = \frac{m dx}{L} x^2.$$

Celotni vztrajnostni moment desnega odseka palice je

$$J_2 = \frac{m}{L} \int_0^{L_2} x^2 dx = \frac{m L_2^3}{3L}.$$

Prištejmo še vztrajnostni moment levega odseka, pa imamo celoten vztrajnostni moment palice

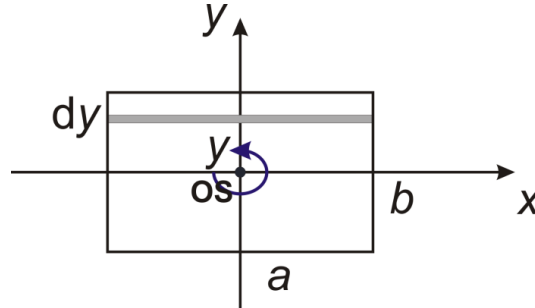
$$J = \frac{m(L_1^3 + L_2^3)}{3L}.$$

V posebnem primeru gre os vrtenja skozi sredino palice (težiščna os) in $L_1 = L_2 = L/2$, tako da je vztrajnostni moment kar $J = mL^2/12$. Zgornji izraz za vztrajnostni moment zapišemo še malo drugače. Če vzamemo npr. $L_1 < L_2$, velja $L_1 = L/2 - x$ in $L_2 = L/2 + x$, pri čemer je x razdalja med težiščem palice in osjo vrtenja. Dobimo

$$J = \frac{m((L/2 - x)^3 + (L/2 + x)^3)}{3L} = \frac{mL^2}{12} + mx^2.$$

To je poseben primer Steinerjevega izreka. Če os vrtenja vzporedno premaknemo iz težišča za x v katerokoli smer, se vztrajnostni moment poveča za mx^2 .

Z uporabo Steinerjevega izreka za palico izpeljimo še vztrajnostni moment pri vrtenju tanke pravokotne plošče okrog njene težiščne osi, ki je pravokotna nanjo. Njeni stranici sta a in b , masa pa m . Pravokotnik razdelimo na tanke palice, pravokotne na smer y . Vsaka takšna palica ima debelino dy in maso $dm = mdy/b$.



Slika 22.2: Izpeljava J pri vrtenju pravokotne plošče

Za izračun vztrajnostnega momenta take palice uporabimo Steinerjev izrek in zapišemo prispevek k skupnemu vztrajnostnemu momentu

$$dJ = \frac{dma^2}{12} + dmy^2.$$

Vztrajnostni moment pravokotnika je torej

$$J = \int dJ = \frac{m}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{a^2}{12} + y^2 \right) dy = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}.$$

Kako pa je z vztrajnostnim momentom kvadra ali kocke? Namesto pravokotnika na sliki x si mislimo kvader, ki ima tretji rob enak c in je pravokoten na ravnino slike. Izkaže se, da je vztrajnostni moment kvadra pri vrtenju okrog te osi neodvisen od c ! Saj debeline pravokotne plošče nismo nikjer upoštevali. Torej ima kvader z robovi $a \leq b \leq c$ pri vrtenju okrog treh težiščnih osi, vzporednih s po štirimi robovi, tri različne vztrajnostne momente. Po velikosti si sledijo

$$J_1 = \frac{m(a^2 + b^2)}{12} \leq J_2 = \frac{m(a^2 + c^2)}{12} \leq J_3 = \frac{m(b^2 + c^2)}{12}.$$

Ker so to simetrijske osi, pomenita J_1 in J_3 hkrati najmanjši in največji mogoči vztrajnostni moment kvadra pri vrtenju okrog katerekoli težiščne osi (vključno s tistimi, ki niso vzporedne z robovi). Pri vrtenju okrog poljubne težiščne osi je namreč vztrajnostni moment linearna kombinacija (neke vrste povprečje) omenjenih treh vztrajnostnih momentov $J = \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3$, kjer so koeficienti $\lambda_i \leq 1$ odvisni od kotov rotacijske osi glede na robove kvadra.

Sedaj pa rahlo presenečenje - kocka. Ker so pri njej vsi trije vztrajnostni momenti enaki, $J_1 = J_2 = J_3$, je takšen tudi vztrajnostni moment pri vrtenju okrog katerekoli težiščne osi, ne samo tiste, ki je vzporedna z robovi. To je tako kot pri krogli. Čeprav ima kocka kot geometrijsko telo manjšo simetrijo od krogle, pa ima v smislu vztrajnostnega momenta enako. \square

Računski zglede 22.1.2 Izračunajmo vztrajnostne momente valja, stožca in krogle s polmerom R (vsi so polna homogena telesa) pri vrtenju okrog geometrijske težiščne osi.

Začnimo z valjem, katerega izpeljani vztrajnostni moment bomo potem uporabili pri stožcu in krogli. Valj navidezno razdelimo na koncentrične tanke valjne lupine s polmerom r . Majhen prostorninski element je $dV = 2\pi r h dr$, kjer h višina valja. Vztrajnostni moment telesa izračunamo kot integral

$$J = \int r^2 dm = \int r^2 \rho(\vec{r}) dV,$$

pri čemer se v splošnem gostota spreminja s krajem. V homogenem telesu je gostota konstantna in jo lahko izpostavimo iz integrala. Za valj dobimo

$$J = \rho \int r^2 dV = J = \rho \int_0^R r^2 2\pi r h dr = 2\pi \rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho h \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m R^2.$$

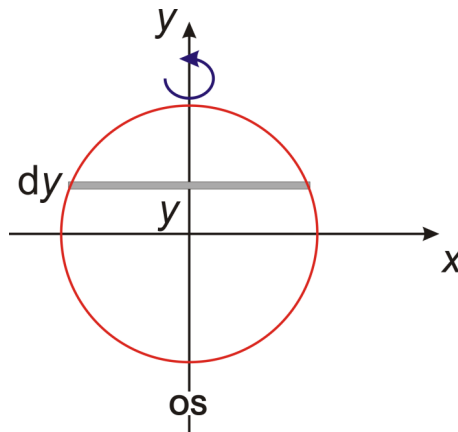
Na vrsti je stožec. V mislih razdelimo stožec na tanke rezine (valje), ki so vzporedni z osnovno stranico. Vztrajnostni moment stožca je tako vsota (integral) vztrajnostnih momentov vseh takšnih tankih valjev

$$J = \frac{1}{2} \int r^2 dm = \frac{1}{2} \rho \int_0^h r^2 (\pi r^2) dy.$$

Kot pri računanju težišča stožca si pomagamo z razmerjem $r/R = y/h$, kjer je h višina stožca, R pa polmer osnovne ploskve. Sledi

$$J = \frac{1}{2} \pi \rho \left(\frac{R}{h}\right)^4 \int_0^h y^4 dy = \frac{1}{2} \pi \rho \left(\frac{R}{h}\right)^4 \frac{h^5}{5} = \frac{\pi}{10} \rho R^4 h = \frac{3}{10} m R^2.$$

Ostane nam še polna krogla. Vztrajnostni moment krogle izračunamo tako, da jo razdelimo na tanke valje. Vztrajnostni moment krogle bo enak dvakratnemu vztrajnostnemu momentu zgornje



Slika 22.3: Izpeljava J pri vrtenju krogle okoli osi y

polkrogle. Upoštevamo zvezo $x^2 + y^2 = R^2$ in zapišemo

$$J = 2 \frac{1}{2} \rho \int_0^R x^2 (\pi x^2) dy = \pi \rho \int_0^R (R^2 - y^2)^2 dy = \pi \rho \int_0^R (R^4 - 2R^2 y^2 + y^4) dy.$$

Sledi

$$J = \pi \rho \left(R^5 - 2 \frac{R^5}{3} + \frac{R^5}{5} \right) = \pi \rho \frac{8R^5}{15} = \frac{2}{5} m R^2. \quad \square$$

Računski zglede 22.1.3 Izračunaj vztrajnostni moment tanke krogelne lupine z maso m in polmerom R pri vrtenju okrog težiščne osi.

Vztrajnostni moment tanke krogelne lupine bomo izračunali na dva načina. Prvi je z integriranjem prispevkov zelo tankih obročev. Tanek obroč z maso m in polmerom R ima pri vrtenju okrog geometrijske osi vztrajnostni moment $J = mR^2$, saj so vse njegove točke oddaljene od osi za R . Podobno kot smo naredili pri polni krogli, navidezno narežemo lupino na tanke plasti. V tem primeru to niso več tanki valji, ampak tanki obroči, katerih vztrajnostni moment poznamo. Vpeljimo še debelino lupine $D \ll R$, da lahko izrazimo masne prispevke obročev pri integriranju. Majhna masa enega takšnega obroča je $dm = \rho 2\pi x ds D$, kjer je ds ustrezeni ločni element na krožnici. Povežemo ga z intervalom dy : $ds = dy / \cos \varphi = dy / (x/R) = R dy / x$. Nadaljujmo

$$J = \int x^2 dm = 2\rho 2\pi D \int_0^R x^2 \left(x \frac{R dy}{x}\right) = 4\pi\rho DR \int_0^R (R^2 - y^2) dy = 4\pi\rho DR \left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{2}{3} m R^2.$$

Pri drugi izpeljavi najprej izrazimo J »debele« krogelne lupine s podatki m , R_1 in R_2 , kjer sta R_1 in R_2 notranji in zunanji polmer, m pa masa lupine. Ker je vztrajnostni moment aditivna količina, si pomagamo tako, da od vztrajnostnega momenta J_2 polne krogle z maso m_2 in polmerom R_2 odštejemo vztrajnostni moment izrezane manjše krogle z maso m_1 in polmerom R_1

$$J = \frac{2}{5} (m_2 R_2^2 - m_1 R_1^2).$$

Izrazimo še masi m_1 in m_2 z maso lupine m . Pomagamo si kar z razmerjem prostornin

$$\frac{m_1}{m} = \frac{V_1}{V} = \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}$$

in podobno za drugo lupino. Izrazimo obe masi in izračunamo J

$$J = \frac{2}{5} m \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}.$$

V primeru, da je $R_1 = 0$, dobimo znan izraz za polno kroglo. Za zelo tanko krogelno lupino pa vzamemo limito $R_1 \rightarrow R_2$. To lahko naredimo na več načinov.

Prvi način: Razstavimo števec in imenovalce, pokrajšamo razliko polmerov in vstavimo $R_1 = R_2 = R$

$$J = \frac{2}{5} m \frac{(R_2 - R_1)(R_2^4 + R_2^3 R_1 + R_2^2 R_1^2 + R_2 R_1^3 + R_1^4)}{(R_2 - R_1)(R_2^2 + R_2 R_1 + R_1^2)} = \frac{2}{5} m \frac{5}{3} R^2 = \frac{2}{3} m R^2.$$

Drugi način: Nastavek $R_1 = R$, $R_2 = R + D$, uporaba binomske formule in limitiranje $D \rightarrow 0$

$$J = \frac{2}{5} m \frac{(R+D)^5 - R^5}{(R+D)^3 - R^3} = \frac{2}{5} m \frac{R^5 + 5R^4 D + \dots + D^5 - R^5}{R^3 + 3R^2 D + \dots + D^3 - R^3} \approx \frac{2}{5} m \frac{5R^4 D}{3R^2 D} = \frac{2}{3} m R^2.$$

Tretji način: Z limitiranjem po L'Hospitalovem pravilu, po katerem v primeru nedoločene deljenja $0/0$ ali ∞/∞ števec in imenovalce posebej odvajamo po spremenljivki, ki jo limitiramo, dokler ne pridemo do nedvomnega izida.

$$J = \lim_{R_2 \rightarrow R} \frac{2}{5} m \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3} = \frac{2}{5} \lim_{R_2 \rightarrow R} \frac{5R_2^4}{3R_2^2} = \frac{2}{3} m R^2.$$

Seveda gre v vseh primerih za potenčni razvoj števca in imenovalca, to je za Taylorjevo vrsto. \square

23. Dodatek: Silnice in ekvipotencialne ploskve

V poglavjih o elektriki in magnetizmu smo risali silnice in ekvipotencialne ploskve, nikoli pa nismo povedali, kako jih dejansko narišemo. Podrobneje si oglejmo risanje silnic na primeru dveh nabojev, kot smo jih predstavili na slikah 11.13 in 11.14.

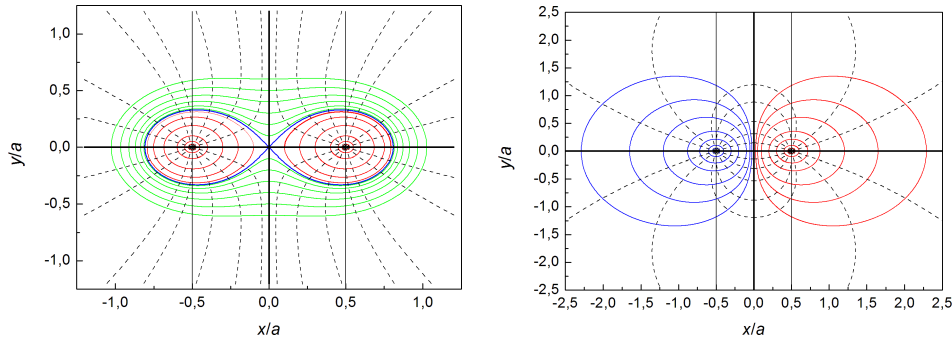
Začnimo s primerom, kjer imata oba naboja enak predznak. Zaradi simetrije je dovolj računati silnice in ekvipotencialne ploskve le v prvem kvadrantu, potem pa jih prezrcalimo prek obeh koordinatnih osi. Računamo pa takole. Izberemo neko začetno točko (x_0, y_0) , na primer $x_0 = a/10, y_0 = 0$, in v njej izračunamo potencial V . Potem izračunamo skrajno desno točko z enakim potencialom (na osi x , desno od desnega naboja), podobno kot smo naredili pri računskem zgledu 11.5.1. Nato interval na osi x med začetno (levo) in končno (desno) točko razdelimo na večje število enakih delov, npr. 500. Pri vsaki koordinati x moramo poiskati tisto koordinato y , pri kateri je potencial enak začetnemu. Renormalizirani potencial je

$$\frac{V(x,y)}{V_0} = \frac{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}{4},$$

kjer sta r_1 in r_2 razdalji iskane točke do obeh nabojev in sta odvisni od x in y . Pri premajhnih vrednostih y (pri določenem x) dobimo prevelik potencial, pri prevelikih y pa je $V(x,y)$ premajhen. Za rešitev enačbe $V(x,y) = V$ lahko uporabimo preprosto metodo - bisekcijo, lahko pa kar v Mathematici, ki ima možnost samodejnega numeričnega reševanja enačb. Pri paru nasprotno enakih nabojev (dipolu) je račun podoben, le da je en člen v potencialu $V(x,y)$ negativen.

Ker je razumevanje električnih silnic in ekvipotencialnih ploskev v elektrotehniko zelo pomembno, si še enkrat podrobneje oglejmo primer dveh nabojev, najprej enako predznačenih. Potencial je povsod pozitiven, neskončno daleč od nabojev pa gre njegova vrednost proti nič. Blizu enega ali drugega naboja je ekvipotencialna ploskev skoraj kroglja, saj je potencial drugega naboja precej manjši od potenciala tega naboja (manjše rdeče krožnice na sliki). V resnici je ekvipotencialna ploskev sestavljena iz dveh enakih, ločenih polovic, ena je okrog enega naboja, druga pa okrog drugega. Dlje od nabojev postaneta polovici ekvipotencialne ploskve bolj jajčasti, z ožjim koncem proti sredini med naboje. V skrajnjem primeru, ko je $V = V_0$, postaneta polovici koničasti in se v izhodišču dotakneta (modra zanka). Pri manjših vrednostih potenciala so ekvipotencialne ploskve v enem kosu (zeleno krivulje). Zelo daleč proč od obeh nabojev postanejo skoraj okrogle, kot da bi imeli en sam naboj $2e$ v izhodišču. Rdečim krivuljam ustreza potencial $V > V_0$, zelenim pa $V < V_0$.

Pri paru nasprotnih nabojev, ki mu pravimo tudi električni dipol, so stvari precej drugačne in nekoliko preprostejše. Vzemimo, da je pozitivni naboj na desni strani, negativni pa na levi. Potencial je desno od ordinatne osi (oziroma desno od ravnine yz v 3D) povsod pozitiven, na levi strani pa negativen. Na ravnini yz je potencial povsod enak nič, zato je ta ravnina hkrati

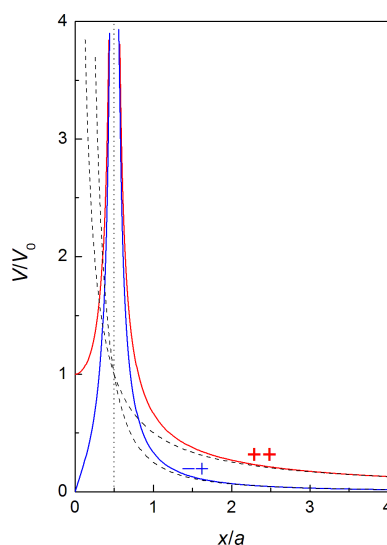


Slika 23.1: Silnice in ekvipotencialne ploskve okoli para enako (levo) in različno (desno) predznačenih nabojev.

tudi ekvipotencialna ploskev. Blizu enega ali drugega naboja je ekvipotencialna ploskev skoraj kroglata, tako kot pri paru enakih nabojev, dlje pa so bolj nepravilne oblike. Vendar pa so tu vse ekvipotencialne ploskve enodelne: rdeče na desni imajo pozitiven potencial, modre na levi pa negativnega. Vse silnice se začnejo v enem naboju in grede v drugega, tudi tiste, za katere je na sliki premalo prostora, da bi videli celo zanko.

Nazadnje še poudarimo, da se električni potencial pri električnem dipolu (+-) z razdaljo od sredine med naboje spreminja drugače kot pri paru enakih nabojev (++). Pri paru ++ smo že omenili, da se na velikih razdaljah vede kot en sam naboj z nabojem $2e$ v izhodišču. Daleč stran torej potencial pojema sorazmerno z $1/r$. Pri dipolu pa potencial v grobem pojema sorazmerno z $1/r^2$, pri čemer je oblika odvisna od smeri glede na naboja. Na sliki (23.2) je prikazano spreminjanje potenciala na osi x . Potencial je normiran na V_0 , na diagramu pa sta prikazani tudi obe asimptotični krivulji, sorazmerni z $1/x$ oz. $1/x^2$. Sorazmernosti z $1/x^2$ pri dipolu za velike x v primerjavi z razdaljo a med naboje ni težko pokazati

$$V = \frac{e}{4\pi\epsilon_0(x-a/2)} - \frac{e}{4\pi\epsilon_0(x+a/2)} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x+a/2) - (x-a/2)}{(x^2 - a^2/4)} \approx \frac{ea}{4\pi\epsilon_0 x^2}.$$



Slika 23.2: Odvisnosti potenciala na osi x za sistem ++ (rdeča črta) in +- (modra črta). Navpična pikčasta črta pomeni pol za V pri $x = a/2$; črtkani črti sta asimptoti za $x \ll a$.

24. Dodatek: Kinetična teorija idealnih plinov

V tem dodatku bomo stopili iz okvira mehanike in elektromagnetizma in povedali nekaj o obnašanju idealnih plinov. **Idealni plini so plini, pri katerih so razdalje med atomi ali molekulami plina dovolj velike, da molekule ne čutijo medsebojnih sil, razen ob redkih in trenutnih medsebojnih trkih.** S tem modelom opišemo večino plinov pri navadnih razmerah, to je pri normalnem zračnem tlaku in značilnih temperaturah.

Pline bomo obravnavali najprej z makroskopskega, potem pa z mikroskopskega vidika. V prvem primeru gledamo na plin kot na celoto in nas zanimajo makroskopske količine, kot sta temperatura in tlak. Pri mikroskopskem opisu pa se zanimamo za gibanje posameznih atomov ali molekul. Makroskopske lastnosti izhajajo iz mikroskopskih. To poglavje torej vključuje pojme tako iz termodinamike kot iz statistične termodinamike, ki sta sami zase obširni fizikalni veji. Zato tu ni dovolj prostora, da bi podrobno opisovali in utemeljevali pojme, kot so temperatura, termodinamično ravnovesje, toplota in podobno. Nekaj tega bralec vsaj ohlapno že pozna. Radi bi predvsem nakazali prehod med makroskopskim in mikroskopskim opisom naravnih pojavov. Navsezadnje tudi za kapljevine in trdnine veljajo termodinamične zakonitosti in razne materialne lastnosti, kot sta npr. gostota in viskoznost, ki izhajajo iz mikroskopskega vedenja osnovnih gradnikov.

24.1 Splošna plinska enačba

Večino najpogostejših plinov v normalnih razmerah (sobna temperatura, normalni zračni tlak) lahko v prvem približku obravnavamo kot idealni plin, za katerega velja naslednja **enačba stanja, ki ji pravimo splošna plinska enačba**

$$pV = \frac{m}{M}RT, \quad (24.1)$$

kjer p označuje tlak, V prostornino plina, m njegovo maso, M kilomolsko maso, T absolutno temperaturo (merjeno v kelvinih!), $R = 8314 \text{ J}/(\text{kmol K})$ pa je splošna plinska konstanta. Kilomolsko maso atomov M preberemo iz periodnega sistema, za molekule pa jo moramo izračunati. Na primer: molekula plina CO_2 je sestavljena iz enega atoma ogljika in dveh atomov kisika. Masno število ogljika je 12, kisika pa 16, za molekulo skupaj 44, zato je $M = 44 \text{ kg}/\text{kmol}$. **En kilomol je vpeljan kot količina snovi, ki vsebuje Avogadrovo število molekul snovi** $N_A = 6,022 \cdot 10^{26}/\text{kmol}$.

Do plinske enačbe so raziskovalci prišli s številnimi poskusi, nekoliko bolj pa jo bomo utemeljili z mikroskopsko sliko gibanja molekul plina na koncu poglavja.

24.2 Delo, toplota, notranja energija

Mislimo si plin, zaprt v valju s pomičnim batom. Naj bo osnovna ploskev valja S . Od zunaj delujemo s silo F na bat in plin zelo počasi stiskamo. Zaradi ravnovesja sil in tlakov na površino je tlak na obeh straneh bata praktično enak. Tlak sile F , ki je enak

$$p = \frac{F}{S}, \quad (24.2)$$

je kar enak tlaku v plinu. Za majhen pomik bata x je majhno delo zunanje sile enako

$$dA = Fx = pSx = p|dV| = -pdV \quad (24.3)$$

S predznakom minus smo upoštevali negativno spremembo prostornine plina. Enačbo integramo in dobimo izraz za opravljeno delo pri reverzibilnem (počasnem) stiskanju plina

$$A = - \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (24.4)$$

Plinu dovedemo delo ($A > 0$), ko ga stiskamo in se njegova prostornina zmanjša od začetne vrednosti V_1 na končno vrednost $V_2 < V_1$.

Toploto si mislimo kot način prenosa energije med telesi oziroma termodinamičnimi sistemi ob neposrednem stiku teles z različnima temperaturama. Ker s prenosom toplote sistemu dovedemo ali odvedemo energijo, moramo to upoštevati tudi v splošnem energijskem zakonu. Do zdaj smo zapisali, da je sprememba energije sistema enaka delu zunanjih sil. To dopolnimo s toploto in dobimo **splošno obliko energijskega zakona**

$$\Delta W = A + Q. \quad (24.5)$$

Iz izkušenj vemo, da z dovajanjem toplote telo segrevamo ali povzročimo fazno spremembo. V primeru idealnega plina do faznega prehoda ne more priti, zato gre za spreminjanje temperature. Več toplote ko dovedemo, bolj se spremeni temperatura plina, pomembna pa je seveda tudi količina (masa) plina, ki ga segrevamo. Vpeljemo še sorazmernosti koeficient, ki mu pravimo specifična toplota c . Ko plinu dovajamo toploto, lahko to naredimo na dva v osnovi različna načina: toploto lahko dovedemo pri konstantni prostornini ali pa pri konstantnem tlaku. Zato zapišemo dve enačbi in **ločimo dve specifični toploti: c_V , ki velja za dovajanje toplote pri stalnem volumnu, in c_p , ki velja za dovajanje toplote pri stalnem tlaku**

$$V = \text{konst.} \quad \rightarrow \quad Q = mc_V \Delta T \quad (24.6)$$

$$p = \text{konst.} \quad \rightarrow \quad Q = mc_p \Delta T. \quad (24.7)$$

Fizikalna enota za specifični toploti je J/(kg K).

Vpeljimo zdaj še eno vrsto energije, ki je zelo pomembna pri obravnavi idealnih plinov. To je **notranja energija, ki jo ima plin zaradi svojega stanja**. Če zanemarimo medsebojne interakcije atomov ali molekul plina (kar v idealnem plinu lahko), je **notranja energija enaka kinetični energiji atomov ali molekul plina, ki jo imajo zaradi svojega gibanja**.

Pri idealnem plinu z maso m je sprememba notranje energije neposredno odvisna le od spremembe temperature (pri višjih temperaturah se atomi in molekule hitreje gibljejo in je njihova kinetična energija večja), ne pa tudi od spremembe prostornine. To je zato, ker je notranja

energija zaradi praktično neodvisnih molekul sestavljena samo iz kinetičnih energij posameznih molekul, medtem ko ni nobene potencialne energije, ki bi izhajala iz medmolekulskih sil, in bila odvisna od razdalje med molekulami in s tem prostornine plina.

Spremembo notranje energije najlažje izračunamo pri ustrezni spremembi s konstantno prostornino. Pri konstantni prostornini je namreč po enačbi (24.5) delo enako nič, torej je po sprememba notranje energije kar enaka dovedeni toploti.

$$\Delta W_n = mc_V \Delta T. \quad (24.8)$$

Gornja enačba je sicer izpeljana na primeru, vendar velja splošno za idealni plin.

Vpeljimo še eno termodinamsko količino, entropijo. **Entropija je količina energije telesa, ki se ne morem pretvoriti v delo.** Je enolična funkcija stanja in telesa si jo izmenjujejo, kadar izmenjujejo toploto. Pri reverzibilni (obrnjivi) spremembi je sprememba entropije

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T}. \quad (24.9)$$

Enota za entropijo je J/K. Če je temperatura med dovajanjem toplote konstantna, je sprememba entropije kar enaka dovedeni toploti, deljeni s temperaturo $\Delta S = Q/T$. **Pri dovajanju toplote se entropija plina povečuje.**

24.3 Značilne termodinamske spremembe

Oglejmo si nekaj najznačilnejših termodinamskih sprememb. Izhajali bomo iz plinske enačbe za idealni plin in privzeli, da se masa plina ohranja (plin torej ne uhaja oziroma ga ne dodajamo). Upoštevali bomo energijski zakon, spremembe pa pisali tako, da bo indeks 1 označeval začetno stanje, 2 pa končno.

Izotermna sprememba

Pri izotermni spremembi se ohranja temperatura. Plinska enačba se poenostavi

$$p_1 V_1 = p_2 V_2. \quad (24.10)$$

Ker se temperatura ohranja, se notranja energija sistema ne spremeni. Delo in toplota sta si nasprotno enaka

$$-Q = A = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1}{V} dV = -p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (24.11)$$

Če plinu dovajamo toploto ($Q > 0$), se razširi ($V_2 > V_1$), plin pa pri tem opravlja delo ($A < 0$). Če plinu pri stalni temperaturi odvezamo toploto, se plin krči in delo mu dovajamo. Zapišimo še spremembo entropije

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{p_1 V_1}{T} \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (24.12)$$

Izohorna sprememba

Pri izohorni spremembi se ohranja prostornina. Plinska enačba se poenostavi

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}. \quad (24.13)$$

Ker se ohranja prostornina, je delo enako nič. Dovedena toplota je enaka spremembi notranje energije

$$Q = \Delta W_n = mc_V \Delta T. \quad (24.14)$$

Sprememba entropije je

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc_V dT}{T} = mc_V \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (24.15)$$

Izobarna sprememba

Pri izobarni spremembi se ohranja tlak. Plinska enačba se poenostavi

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}. \quad (24.16)$$

Delo je

$$A = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = -p(V_2 - V_1), \quad (24.17)$$

dovedena toplota pa

$$Q = mc_p(T_2 - T_1). \quad (24.18)$$

Sprememba entropije je

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc_p dT}{T} = mc_p \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (24.19)$$

Vstavimo delo in toploto v energijski zakon $\Delta W_n = A + Q$ ter izpišimo spremembo notranje energije

$$mc_V(T_2 - T_1) = -p(V_2 - V_1) + mc_p(T_2 - T_1). \quad (24.20)$$

Izrazimo produkt tlaka in volumna iz plinske enačbe, pokrajšamo maso ter razliko temperatur in dobimo

$$c_p = c_V + \frac{R}{M}. \quad (24.21)$$

Specifična toplota pri stalnem tlaku je torej večja od tiste pri stalni prostornini. Velja pa še ena zveza med specifičnima toplotama: njuno razmerje je odvisno le od tega, ali ima plinska molekula en sam, dva ali pa več kot dva atoma, ni pa odvisno od kemijske formule plina. Razmerje označimo s κ . Pri dvoatomnih plinih velja

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V} = 1,4. \quad (24.22)$$

Izračunajmo še v splošnem obe specifični toploti plina, če poznamo M in κ . Zapišemo $c_p = \kappa c_V$ in upoštevamo gornjo zvezo, pa dobimo

$$c_V = \frac{R}{(\kappa - 1)M} \quad \text{in} \quad c_p = \frac{\kappa R}{(\kappa - 1)M}. \quad (24.23)$$

Izentropna sprememba

Pri izentropni spremembi se ohranja entropija. **Izentropna sprememba je reverzibilna adiabatska sprememba** ($Q = 0$). Zapišimo najprej energijski zakon za majhne spremembe.

$$dW_n = mc_V dT = dA = -pdV. \quad (24.24)$$

Iz plinske enačbe izrazimo temperaturo in njen diferencial

$$T = \frac{MpV}{mR} \quad \rightarrow \quad dT = \frac{M(pdV + Vdp)}{mR}. \quad (24.25)$$

Vstavimo diferencial v gornjo enačbo

$$mc_V \frac{M(pdV + Vdp)}{mR} = -pdV. \quad (24.26)$$

Ločimo diferenciala tlaka in prostornine

$$\left(c_V \frac{M}{R} + 1\right)pdV = -c_V \frac{M}{R}Vdp. \quad (24.27)$$

Vstavimo c_V , pokrajšamo in dobimo

$$\kappa \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p}. \quad (24.28)$$

Enačbo integriramo, zasučemo in dobimo

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa. \quad (24.29)$$

Z upoštevanjem splošne plinske enačbe (ki seveda velja neodvisno od spremembe) lahko izrazimo še zvezo med temperaturo in volumnom ali tlakom in volumnom pri izentropni spremembi

$$T_1 V_1^\kappa = T_2 V_2^\kappa \quad \text{in} \quad \frac{p_1^{\kappa-1}}{T_1^\kappa} = \frac{p_2^{\kappa-1}}{T_2^\kappa}. \quad (24.30)$$

Delo pri tej spremembi je

$$A = -\int_{V_1}^{V_2} pdV = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1^\kappa}{V^\kappa} dV = \frac{p_1 V_1^\kappa}{\kappa - 1} (V_2^{1-\kappa} - V_1^{1-\kappa}). \quad (24.31)$$

Računski zgled 24.3.1 10 kg kisika O_2 pri začetni temperaturi 300 K in tlaku 1 bar najprej pri stalni prostornini segrejemo, da se njegov tlak poveča na dvakratno vrednost, potem pa ga pri konstantnem tlaku 2 bar razpnemo na trikratno prostornino. Izračunajmo vse značilne makroskopske količine v točkah 1, 2 in 3 na diagramu ter dovedeni toploti pri spremembah $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$.

Podatki:

$$M = 32 \text{ kg/kmol}$$

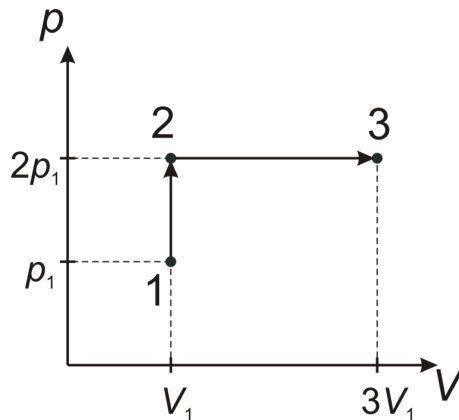
$$m = 10 \text{ kg}$$

$$T = 300 \text{ K}$$

$$p_1 = 1 \text{ bar}$$

$$p_2 = 2 \text{ bar}$$

$$V_3 = 3V_1$$



Slika 24.1: Diagram p-V za kisik

$$V_1, V_2, V_3 = ?$$

$$T_2 = ?$$

$$Q_{12}, Q_{23} = ?$$

Iz plinske enačbe izračunamo začetno prostornino

$$V_1 = \frac{m}{Mp_1} RT_1.$$

Dobimo $V_1 = V_2 = 7,79 \text{ m}^3$, $V_3 = 23,38 \text{ m}^3$. Ker se pri izohorni spremembi poveča tlak dvakrat, se toliko poveča tudi temperatura, zato $T_2 = 600 \text{ K}$. Potem se pri stalnem tlaku poveča prostornina trikrat in prav tolikokrat tudi temperatura $T_3 = 1800 \text{ K}$. Izračunajmo še obe toploti

$$Q_{12} = mc_V \Delta T = \frac{mR(T_2 - T_1)}{(\kappa - 1)M} \quad \text{in} \quad Q_{23} = mc_p \Delta T = \frac{\kappa mR(T_3 - T_2)}{(\kappa - 1)M}.$$

Dobimo rezultat $Q_{12} = 1,95 \text{ MJ}$ in $Q_{23} = 5,46 \text{ MJ}$. \square

24.4 Kinetična energija molekule

Kinetična energije molekule za enoatomni plin je $W_k = mv^2/2$, pri čemer je m masa posamezne molekule, v pa njena trenutna hitrost. Izkazuje se, da je povprečna kinetična energija molekul odvisna od temperature. Odvisnost je linearna in jo zapišemo kot

$$W_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT, \quad (24.32)$$

pri čemer je $k = R/N_A = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ Boltzmannova konstanta.

Gornja enačba sledi iz **ekviparticijskega teorema**¹, ki pravi, da pridobi molekula za vsako prostostno stopnjo gibanja, torej na vsak energijski prispevek, ki je kvadratna funkcija dane spremenljivke, enak povprečni energijski člen $kT/2$.

¹Wikipedija

Gornjo enačbo, ki velja za enoatomni plin, lahko interpretiramo kot

$$W_k = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 = 3\frac{1}{2}kT. \quad (24.33)$$

Pomembno je, da so vse tri komponente hitrosti neodvisne med seboj in se pojavijo v kvadratu v izrazu za energijo. Enoatomni plin v velikem obsegu temperatur nima drugih prostostnih stopenj, saj vrtenje atoma nič ne doprinese.

Pri dvoatomnem plinu ima molekula poleg treh translacijskih prostostnih stopenj še dve rotacijski. Gre za vrtenji okrog dveh med seboj pravokotnih osi x in y , ki sta pravokotni tudi na zveznico obeh atomov (os z). Zaradi simetrije sta vztrajnostna momenta za vrtenje okrog obeh pravokotnih osi enaka in ju označimo z J_1 . Tedaj velja

$$W_k = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 + \frac{1}{2}J_1\omega_x^2 + \frac{1}{2}J_1\omega_y^2 = 5\frac{1}{2}kT = \frac{5}{2}kT. \quad (24.34)$$

Pri plinu z več atomi v molekuli pa imamo še eno rotacijsko prostostno stopnjo, zato velja

$$W_k = 6\frac{1}{2}kT = 3kT. \quad (24.35)$$

Pri zelo visokih temperaturah se k energiji molekule dodajo še nihajne prostostne stopnje, pri izredno nizkih temperaturah pa zamrznejo tudi rotacijska gibanja. Zanimivo je, da je končni rezultat za povprečno kinetično energijo molekule odvisen samo od absolutne temperature ne pa od njenih parametrov, kot sta masa in vztrajnostni moment.

Notranja energija idealnega plina je vsota kinetičnih energij posameznih molekul

$$W_n = NW_k. \quad (24.36)$$

Hkrati pa vemo, da velja $W_n = mc_V T$. Naredimo podrobneje to primerjavo za enoatomni plin.

$$W_n = mc_V T = NW_k = N\frac{3}{2}kT. \quad (24.37)$$

Sledi

$$c_V = \frac{3Nk}{2m}. \quad (24.38)$$

Vzemimo kilomol enoatomnega plina, zato $m = M$ in $N = N_A$ in dobimo

$$c_V = \frac{3N_A k}{2M} = \frac{3R}{2M} \quad \text{in} \quad c_p = c_V + \frac{R}{M} = \frac{5R}{2M}. \quad (24.39)$$

Razmerje specifičnih toplot je

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V} = \frac{5}{3} = 1,67. \quad (24.40)$$

Za dvoatomni plin velja

$$c_V = \frac{5R}{2M} \quad \text{in} \quad c_p = c_V + \frac{R}{M} = \frac{7R}{2M} \quad \text{ter} \quad \kappa = \frac{7}{5} = 1,4. \quad (24.41)$$

Za večatomni plin pa dobimo

$$c_V = \frac{3R}{M} \quad \text{in} \quad c_p = c_V + \frac{R}{M} = \frac{4R}{M} \quad \text{ter} \quad \kappa = \frac{4}{3} = 1,33. \quad (24.42)$$

Računski zgleđ 24.4.1 Kolikšna je povprečna translacijska hitrost molekule kisika O_2 pri temperaturi 300 K?

Podatki:

$$M = 32 \text{ kg/kmol}$$

$$T = 300 \text{ K}$$

$$v = ?$$

Ko smo zapisali translacijsko kinetično energijo za molekulo plina, smo pravzaprav zapisali povprečno kinetično energijo. Dejansko so hitrosti porazdeljene (kot bomo videli v nadaljevanju) in gornja enačba velja za povprečne vrednosti. Vendar moramo uporabljati izraz povprečna hitrost previdno, saj se povprečja lahko računajo na različne načine. Natančno bi tej hitrosti rekli koren iz povprečnega kvadrata hitrosti. Zapišimo jo

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT,$$

od koder sledi

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 484 \text{ m/s. } \square$$

24.5 Maxwellova porazdelitev hitrosti molekul

Na koncu prejšnjega razdelka smo že omenili, da so hitrosti, s katerimi smo računali, dejansko povprečne hitrosti atomov ali molekul. Pravzaprav so, kot bomo videli, koreni iz povprečnega kvadrata hitrosti. Kako pa so hitrosti atomov ali molekul porazdeljene?

Vpeljimo verjetnost dP , da ima določena molekula hitrost na intervalu $(v - dv, v + dv)$. Kvocijent verjetnosti in intervala imenujemo verjetnostna gostota

$$p = \frac{dP}{dv}. \quad (24.43)$$

Če nas zanima delež molekul s hitrostmi v intervalu med v_1 in v_2 , gostoto integriramo

$$P = \int_{v_1}^{v_2} p(v)dv. \quad (24.44)$$

Izkaže se, da je verjetnostna gostota za porazdelitev molekul idealnega plina po velikosti hitrosti podana s funkcijo

$$p(v) = Cv^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right), \quad (24.45)$$

pri čemer je C normalizacijska konstanta z enoto s^3/m^3 in m masa ene molekule. Gornjo porazdelitev imenujemo **Maxwellova porazdelitev**². Maxwellova porazdelitev hitrosti molekul plina izhaja iz zakonov statistične termodinamike. Ta porazdelitev je poseben primer splošnejše zvezne **Boltzmannove porazdelitve**, kjer je delež verjetnosti, da bo naključno izbrana molekula plina v nekem ozkem energijskem intervalu, sorazmeren z eksponentno funkcijo energije.

²Glej npr. prispevek v Preseku.

Tudi v eksponentni funkciji Maxwellove porazdelitve sta razvidni dve energiji: kinetična energija ene molekule $W_k = m_1 v^2/2$ in tako imenovana termična energija $W_t = kT$. Ti dve energiji sta po velikosti med seboj primerljivi oziroma natančneje: ti dve energiji sta samo dva vidika ene in iste energije. V Maxwellovi porazdelitvi imamo tako zgled prepletanja makroskopskih termodinamičnih količin (temperatura) in mikroskopskega opisa snovi (hitrost ene same molekule).

Ko poznamo porazdelitev molekul po hitrosti, lahko izračunamo njeno statistično povprečje. V splošnem izračunamo povprečje neke količine kot

$$\langle f(v) \rangle = \int_0^{\infty} f(v)p(v)dv.$$

Za povprečno hitrost torej dobimo

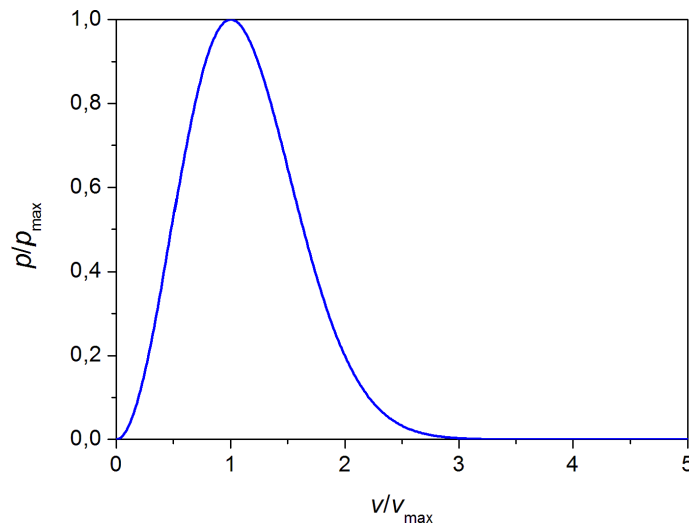
$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} vp(v)dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_1}},$$

za povprečen kvadrat hitrosti pa

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 p(v)dv = \sqrt{\frac{3kT}{m_1}}.$$

Če korenimo gornji izraz, dobimo $v_s = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$, ki se sklada z enačbo (24.32). Velja $v_s > \langle v \rangle$. Poleg teh dveh hitrosti poznamo še eno značilno hitrost Maxwellove porazdelitve, to je najbolj verjetna hitrost. Izračunamo jo kot hitrost, pri kateri ima porazdelitev vrh. Dobimo

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2kT}{m_1}}.$$



Slika 24.2: Maxwellova porazdelitvena funkcija. Njen maksimum p_{max} je pri hitrosti $v_{max} = \sqrt{2kT/m_1}$. Za majhne hitrosti ($v \ll v_{max}$) je funkcija $p(v)$ določena predvsem s kvadratnim faktorjem v^2 in je zato podobna paraboli, pri velikih hitrostih pa prevlada eksponentni faktor.

25. Dodatek: Električna prevodnost kovin

Navadno pravimo, da kovine drži skupaj kovinska vez. To je zapletena sestavljena interakcija parov ion - ion, elektron - elektron ter ion - elektron. Čeprav so električne sile med delci z enakim nabojem odbojne, v kovinah prevlada skupna privlačna sila med pozitivnimi kovinskimi ioni in elektroni. Za kovine dobro velja predstava, da se najšibkeje vezani elektroni odtrgajo od matičnih atomov in se v kovini gibljejo. Take imenujemo prevodni elektroni. V resnici je fizikalna slika prevodnosti kovin precej bolj zapletena. Treba je upoštevati tudi elektronsko strukturo v kovini, kar podrobneje obravnavamo v naslednjem poglavju (poglavje 26).

Prevodnih elektronov na vsak atom kovine je toliko, kot je valenca elementa v kovini. Valenco bomo tu označili z Z , npr. $Z = 3$ za aluminij. Ne zamenjajte je z vrstnim številom elementa, čeprav uporabljamo isto oznako! Prevodnim elektronom rečemo tudi prosti elektroni. Pomembno za prevodnost je število prostih elektronov na prostorninsko enoto

$$n = \frac{N}{V} = \frac{ZN_{at}}{V} = \frac{ZN_A}{V_{kmol}} = \frac{ZN_A}{M/\rho} = \frac{ZN_A\rho}{M}.$$

Pri tem je $N_A = 6 \cdot 10^{26}/\text{kmol}$ Avogadrovo število (število atomov na kilomol elementa), ρ gostota snovi, M pa kilomolska masa. Seveda je rezultat neodvisen od količine snovi.

Preprost model prevajanja je izpeljal že leta 1900 Drude (**Drudejev model**¹), kjer je gibanje prostih elektronov analogno gibanju molekul plina. Izbrani elektron naj bi se gibal premo in občasno trčil z ionom ter ob trku naključno spremenil smer gibanja. Ob trku elektron tudi popolnoma izgubi dodatno hitrost, ki jo med zaporednima trkoma pridobi zaradi pospeševanja v električnem polju. Naj bo značilni čas med dvema trkoma elektrona z ionom enak τ , imenujemo ga relaksacijski čas. Podrobnosti ne bomo obravnavali, zapišimo le prevodnost kovine

$$\sigma = \frac{ne_0^2\tau}{m_e}.$$

Pri tem je e_0 osnovni naboj, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg pa masa elektrona.

Prva od nadgradenj Drudejevega modela kovin na začetku razvoja kvantne mehanike je bil **Sommerfeldov model**², ki upošteva kvantno-mehansko naravo gibanja elektronov v kovinah. Eden od ključnih pojmov v tej teoriji je **Fermijeva hitrost** v_F , to je hitrost najhitrejših elektronov. Hitrosti vseh preostalih prevodnih elektronov v kovini so v intervalu $0 < v < v_F$. Povprečna hitrost vseh elektronov je torej manjša od Fermijeve hitrosti, a je istega velikostnega reda, zato lahko za reprezentativno hitrost elektronov vzamemo kar v_F . To hitrost lahko primerjamo s

¹Wikipedija

²Wikipedija

termično hitrostjo v_T v Drudejevem modelu (izpeljano iz kinetične teorije idealnih plinov) in je ne smemo zamenjati z dodatno usmerjeno hitrostjo zaradi električnega polja.

Značilna Fermijeva hitrost elektronov v kovinah je velikostnega reda $v_F \approx 10^6$ m/s. Pri normalnih razmerah velja $v_F > v_T$, tako da je Drude v svojem modelu podcenil hitrosti elektronov v kovinah. Fermijevi hitrosti ustreza kinetična energija

$$W_k = \frac{m_e v_F^2}{2} = 4,55 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2,84 \text{ eV},$$

pri čemer je $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Kinetični energiji elektronov s Fermijevo hitrostjo pravimo **Fermijeva energija** in jo označimo z E_F . Ugotovili smo, da je Fermijeva energija za kovine več elektronvoltov, npr. pri bakru $E_F = 7,00 \text{ eV}$. Energijo smo označili z E , ker je to navada pri opisu energij in energijskih pasov prevodnih elektronov.

Računski zglede 25.0.1 Bakreno žico s prerezom 2 mm^2 in dolžino 4 m priključimo na napetost 60 V . S kolikšno usmerjeno hitrostjo v nasprotni smeri električnega toka potujejo prosti elektroni po žici? Specifična upornost bakra je $17,5 \text{ n}\Omega\text{m}$, število prevodnih elektronov na prostorninsko enoto pa $8,5 \cdot 10^{28}/\text{m}^3$.

Podatka:

$$L = 4 \text{ m}$$

$$S = 2 \text{ mm}^2$$

$$U = 60 \text{ V}$$

$$\zeta = 17,5 \text{ n}\Omega\text{m}$$

$$n = 8,5 \cdot 10^{28}/\text{m}^3$$

$$v = ?$$

Za izračun upoštevamo

$$j = \frac{I}{S} = ne_0 v.$$

Izrazimo hitrost

$$v = \frac{j}{ne_0} = \frac{I}{Sne_0} = \frac{U}{RSne_0} = \frac{US}{\zeta LSne_0} = \frac{U}{\zeta Lne_0} = 63 \text{ mm/s}.$$

Očitno velja $v \ll v_F$. \square

26. Dodatek: Prevodniki, polprevodniki, izolatorji

Zakaj je ogljik v obliki diamanta odličen električni izolator, medtem ko ogljik v obliki grafitu električni tok dobro prevaja? Zakaj sta silicij in germanij polprevodnika, kositer in svinec pa dobra električna prevodnika, čeprav so vsi ti elementi v isti skupini periodnega sistema?

Za natančen odgovor na gornja vprašanja bi se morali poslužiti kvantne mehanike, ki presega okvir tega učbenika. Vseeno skušajmo vsaj kvalitativno razumeti razlike med snovmi. Po najpreprostejšem modelu elektroni v snovi po vrsti zasedajo razpoložljive energijske nivoje, od najnižjega do najvišjega. Ti nivoji so diskretni, z natančno določenimi vrednostmi energije. Ker pa so energijske razlike med sosednjimi nivoji izjemno majhne, lahko privzamemo, da je energija elektronov praktično zvezno porazdeljena.

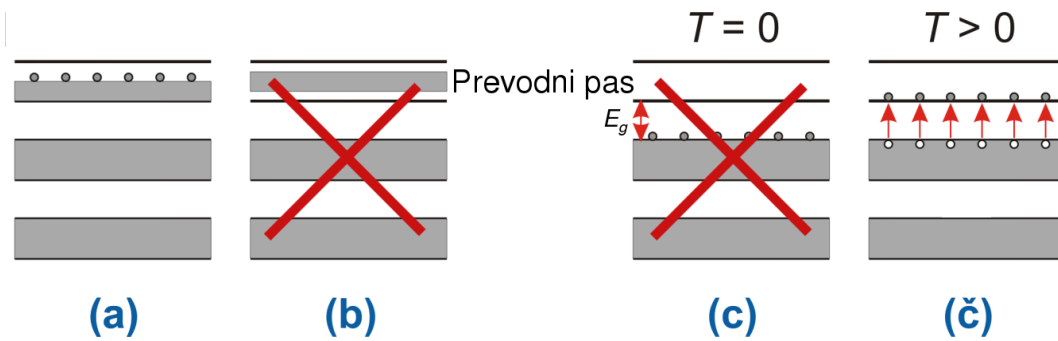
Po kvantno-mehanskem opisu električne prevodnosti snovi **so energije elektronov razporejene v energijske pasove**. To pomeni, da so nekatere energije elektrona v snovi dovoljene, druge pa prepovedane. Energijski intervali z dovoljenimi in prepovedanimi energijami si izmenično sledijo. Intervalu dovoljenih energij pravimo energijski pas, intervalu prepovedanih energij pa energijska reža. Elektroni zasedajo energijska stanja po vrsti od najnižje energije navzgor in vsi nižji energijski pasovi so zasedeni oziroma zapolnjeni. Najvišji pas pa je lahko zaseden povsem do vrha, ali pa ne. Za električno prevodnost je pomemben ravno ta najvišji dovoljeni energijski pas.

Kovine

V kovinah najvišji energijski pas, imenujemo ga prevodni pas, ni povsem zapolnjen. Poglejmo, kaj se zgodi z elektroni v tem pasu, če na kovino priključimo električno polje. Glede na rezultat računskega zgleda (25.0.1) pričakujemo, da v električnem polju najhitrejši elektroni poleg Fermijeve hitrosti pridobijo še z električnim poljem usmerjeno hitrost, za katero pa še vedno velja $v \ll v_F$. Zato je povečanje energije teh elektronov zelo majhno v primerjavi s Fermijevo energijo, pa tudi s širino prevodnega pasu. Elektroni pri Fermijevi energiji zato v električnem polju zasedejo proste nivoje znotraj istega pasu z nekoliko višjo energijo (glej sliko 26.1a).

Pri elektronih z znatno nižjo energijo pa se energija ne more povečati, saj bi se morali premakniti na mesta z višjo energijo, ki pa so že zasedena. Ti elektroni k prevajanju električnega toka ne prispevajo. **K prevajanju električnega toka prispeva zato zelo majhen del elektronov. To so tisti, ki imajo energijo v bližini Fermijeve energije, ki se lahko dvignejo v še nezasedena stanja.**

Kdo bi morda pomislil, da bi se lahko hkrati premaknili vsi energijski nivoji (slika 26.1b), vendar je to z vidika statistične termodinamike in verjetnostnega računa nemogoče.



Slika 26.1: Poenostavljena shema energijskih pasov elektronov v prevodnikih (a in b) ter polprevodnikih in izolatorjih (c in č). Energijo predstavimo na navpični osi in narašča v smeri navzgor. Senčeno so označni zasedeni energijski pasovi. a) Spodnja dva pasova sta zasedena, najvišji (prevodni) pas pa je le delno zaseden. Elektroni se lahko dvignejo na višji nivo in prevajajo elektriko. b) nemogoč oziroma neverjeten hkratni dvig vseh energijskih nivojev v prevodnem pasu kovin zaradi zunanjega električnega polja; c) prepovedan dvig energijskih nivojev elektronov na vrhu valenčnega pasu polprevodnikov in izolatorjev zaradi zunanjega električnega polja; č) kvantni »skoki« posameznih elektronov prek energijske reže E_g v prevodni pas (rdeče puščice) zaradi termične energije pri $T > 0$ K.

Polprevodniki in izolatorji

V nasprotju s kovinami **imajo polprevodniki in izolatorji najvišji energijski pas povsem zapolnjen**. Najvišji zasedeni energijski pas tukaj imenujemo valenčni pas, saj so v njem valenčni elektroni, ki so bili v matičnem kovinskem atomu najšibkeje vezani. Povečanje energije elektronov (zaradi priključenega električnega polja) bi zahtevalo premik elektronov na višje nivoje. Ti pa so pri polprevodnikih in izolatorjih polno zasedeni. Niti tisti z najvišjimi energijami pri vrhu valenčnega pasu »nimajo kam iti«, saj je nad valenčnim pasom prepovedani energijski pas. Elektroni z energijami v tem pasu zato ne morejo prevajati električnega toka.

Omenili smo že, da širino prepovedanega pasu imenujemo energijska reža. Označimo jo z E_g in je velikostnega reda eV. **Energijska reža med valenčnim in naslednjim dovoljenim pasom polprevodnikov in izolatorjev je veliko preširoka, da bi z zunanjim električnim poljem elektroni z vrha valenčnega pasu pridobili dovolj dodatne energije za prehod v višji pas.** Pri absolutni ničli $T = 0$ K je zato prevodnost polprevodnikov in izolatorjev nič in te snovi so idealni električni izolatorji (slika 26.1c).

Pri temperaturi večji od nič, npr. pri sobni temperaturi, **zaradi termičnih vzburjanj prehaja del elektronov iz valenčnega pasu prek energijske reže v naslednji višji dovoljeni pas.** Termično energijo dobijo elektroni npr. od nihajočih ionov v mreži, njeno velikost pa ocenimo iz kinetične teorije plinov kot $W_T \sim kT$. Za sobno temperaturo dobimo vrednost $W_T \approx 0,025$ eV. Termična energija elektronov je sicer res neprimerljivo večja od morebitne dodatne energije zaradi zunanjega električnega polja, a je še vedno veliko manjša od energijske reže E_g . Po klasični fiziki elektroni zaradi premajhne termične energije energijske reže ne morejo »preskočiti«. V kvantno-mehanskem pogledu pa je prehod (preskok) elektronov v višji dovoljeni energijski pas mogoč. Sicer je verjetnost za preskok precej majhna, a je število elektronov zelo veliko, zato se jih bo kljub majhni verjetnosti precej znašlo tudi višjem energijskem pasu. Višji energijski pas zato imenujemo prevodni pas. Ko elektroni dosežejo prevodni pas, imajo na voljo veliko prostih energijskih nivojev za dodaten energijski dvig pri dodanem zunanjem električnem polju. Ti termično vzbujeni elektroni zato brez težav prevajajo električni tok (slika 26.1č).

V čem pa je razlika med polprevodniki in izolatorji? Konceptualno gre za enako obnašanje, razlika je le v velikosti energijske reže E_g . Če je energijska reža večja od $E_g > 3$ eV, je snov po dogovoru izolator, če pa je $E_g < 3$ eV, govorimo o polprevodniku. Poglejmo, zakaj ima velikost reže tako velik vpliv na obnašanje snovi.

Označimo število elektronov v prevodnem pasu z n . Število elektronov v prevodnem pasu je zelo močno (eksponentno) odvisno tako od temperature kot od širine energijske reže E_g . S temperaturo n zelo hitro narašča, zato pri polprevodnikih in izolatorjih tudi električna prevodnost s temperaturo raste (pri kovinah pojema). Silicij, na primer, ima energijsko režo $E_g = 1,1$ eV in pri sobni temperaturi znaša $n \approx 7 \cdot 10^{15}/\text{m}^3$, kar je veliko velikostnih redov manj kot pri kovinah, hkrati pa veliko več kot pri izolatorjih.

Naraščajoča temperatura torej pomeni bistveno večji n , po drugi strani pa naraščajoča reža E_g pomeni znatno zmanjšanje števila prevodnih elektronov n . Germanij, na primer, ima manjšo energijsko režo kot silicij ($E_g = 0,67$ eV), zato ima večjo gostoto prevodnih elektronov n in je boljši električni prevodnik. Po drugi strani pa ima diamant energijsko režo ($E_g = 5,5$ eV) in zato je skoraj popoln električni izolator.

Elektroni, ki preidejo pri polprevodnikih v prevodni pas, pustijo za seboj v valenčnem pasu vrzeli, ki prav tako prispevajo k električni prevodnosti. Enačbo za prevodnost (enačba 13.16) moramo zato pri polprevodnikih dopolniti

$$\sigma = e_0 n (\mu_- + \mu_+). \quad (26.1)$$

Pri tem sta μ_- in μ_+ gibljivosti elektronov in vrzeli. Pri takšnem opisu prevajanja električnega toka se zavedamo, da vrzeli pravzaprav niso samostojni delci, temveč primanjkljaj elektronov. Vendar pa nam predstava o vrzeli kot fizičnem nosilcu pozitivnega naboja koristi pri interpretaciji električnega toka.

Uporaba polprevodnikov

Povejmo še nekaj o uporabi polprevodnikov. Doslej smo govorili o čistih polprevodnikih. Za izboljšanje njihovih lastnosti pa polprevodnike navadno dopiramo. **Dopiranje pomeni nadzorovano vnašanje majhnih koncentracij drugih elementov v prvotni polprevodnik.** Za praktične aplikacije najpogosteje uporabimo polprevodniška elementa silicij (Si) in germanij (Ge), ki ju dopiramo z elementi tretje skupine (npr. z borom, B) ali pete skupine (npr. z arzenom, As) periodnega sistema. Koncentracije primesi so res majhne, na primer en arzenov atom na milijon silicijevih, pa vendar se prevodnost polprevodnika znatno spremeni.

Pri dopiranju z elementi iz pete skupine (npr. silicija z arzenom) se v snovi za več velikostnih redov poveča število prevodnih elektronov, saj ima dopant večjo valenco od prvotnega polprevodnika (arzen ima valenco 5, silicij pa 4). V tako dopiranem polprevodniku so večinski nosilci naboja elektroni. Zaradi negativnega naboja teh nosilcev imenujemo tako vrsto polprevodnika tip n.

Če dopiramo silicij z elementom iz tretje skupine periodnega sistema (npr. silicij z borom), se v snovi za več velikostnih redov poveča število vrzeli, saj ima dopant manjšo valenco od polprevodnika (bor ima valenco 3, silicij pa 4). Pravimo, da so v tem primeru večinski nosilci naboja vrzeli. Zaradi pozitivnega naboja teh nosilcev imenujemo takšen tip polprevodnika tip p.

Dopirani polprevodniki imajo znatno večjo električno prevodnost od čistih polprevodnikov, a še vedno manjšo od kovin. Nekaj primerov specifične upornosti ρ za različne materiale je zbranih v tabeli 26.1.

snov	tip	nosilci naboja	n (m^{-3})	ζ (Ωm)
baker	prevodnik	–	$8,47 \cdot 10^{28}$	$1,56 \cdot 10^{-8}$
aluminij	prevodnik	–	$1,81 \cdot 10^{29}$	$2,45 \cdot 10^{-8}$
germanij	polprevodnik	+, –	$3,8 \cdot 10^{19}$	0,60
silicij	polprevodnik	+, –	$7,0 \cdot 10^{15}$	2300
silicij + arzen ($1 : 10^6$)	polprevodnik tipa n	–	$5,0 \cdot 10^{22}$	10^{-3}
silicij + bor ($1 : 10^6$)	polprevodnik tipa p	+	$5,0 \cdot 10^{22}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$
diamant	izolator	+, –	$4,3 \cdot 10^{-23}$	10^{12}

Tabela 26.1: Specifična upornost pri sobni temperaturi

27. Dodatek: Maxwellove enačbe

Fizika kot veda stremi k čim bolj preprostem opisu pojavov, ki jih opazimo v naravi. Spomnimo se Newtonovih zakonov (6.1). Na videz so preprosti, vendar na njih temelji praktično vsa mehanika in opis gibanja teles. Kot smo večkrat namignili, obstoja podoben nabor osnovnih zakonov tudi za področje elektromagnetizma. Opišemo jih z Maxwellovimi enačbami¹.

Poznamo štiri Maxwellove enačbe. Lahko jih zapišemo na različne načine, mi jih bomo zapisali v integralni obliki za »prazen« prostor. Prazen tukaj pomeni, da sta dielektričnost in magnetna permeabilnost enaki kot v praznem prostoru $\epsilon = \mu = 1$, imamo pa lahko naboje in po prostoru lahko teče električni tok.

27.1 Gaussov zakon o električnem pretoku

Prvo Maxwellovo enačbo smo že spoznali kot Gaussov zakon (11.4 in 12.4) za električno polje.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{e}{\epsilon_0} \quad \text{ali} \quad \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = e.$$

Pove, da je električni pretok skozi poljubno zaključeno ploskev sorazmeren naboju, ki ga ploskev objema. Pri tem električni pretok skozi ploskev S izračunamo kot integral skalarnega produkta električne poljske jakosti \vec{E} in vektorja delčka ploskve $d\vec{S}$, ki kaže v smeri normale na ploskev. Še enkrat ponovimo, da to velja za poljubno ploskev poljubne oblike, samo skalarni produkt moramo pravilno upoštevati.

27.2 Gaussov zakon o magnetnem pretoku

Tudi drugo Maxwellovo enačbo že dobro poznamo, saj smo jo spoznali pri računanju magnetnega pretoka (enačba 16.3)

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{S} = 0.$$

Zapisana enačba je zelo podobna Gaussovemu zakonu o električnem pretoku z eno bistveno razliko. Ker magnetnih monopolov ni, je desna stran enačbe vedno enaka nič. To je ena od zelo pomembnih asimetrij v Maxwellovih enačbah.

¹Škotski fizik James Clerk Maxwell (1831-1879), [Wikipedija](#)

27.3 Faradayev indukcijski zakon

Tretja Maxwellova enačba opisuje indukcijo in smo jo posredno tudi že zapisali. Združimo enačbo za inducirano napetost, ki jo dobimo kot odvod magnetnega pretoka (enačba 16.4), in zvezo med napetostjo (kot razliko potencialov) in električno poljsko jakostjo (enačba 11.11). Pazimo na predznake in dobimo

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt}.$$

Pove, da je integral skalarnega produkta električne poljske jakosti z vektorjem delčka zanke po poljubni sklenjeni zanki enak negativni časovni spremembi magnetnega pretoka skozi to zanko. Ta enačba povezuje električno in magnetno polje. Bolj natančno povedano: ta enačba povezuje spreminjanje magnetnega polja z električno poljsko jakostjo. Če torej spremenimo magnetno polje, se bo pojavilo električno polje (in tako inducirana napetost).

27.4 Ampèrov zakon o magnetni napetosti

Četrta Maxwellova enačba je najbolj zapletena in je še nismo zapisali. Je neke vrste razširitev Ampèrovega zakona, ki pravi, da je integral skalarnega produkta gostote magnetnega polja z vektorjem delčka zanke po poljubni sklenjeni zanki enak električnim tokovom, ki jih zanka objema. Ta del je zelo podoben Gaussovemu zakonu, le da namesto sklenjene ploskve nastopa sklenjena zanka. Po drugi strani pa je ta zakon podoben Faradayevemu zakonu, ki povezuje integral po zanki s pretokom skozi to zanko. Izkaže se (in ravno to je pokazal Maxwell), da je treba upoštevati oba prispevka

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \frac{d\Phi_e}{dt} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d(\vec{E} \cdot \vec{S})}{dt} \quad \text{ali} \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I + \frac{d(\vec{D} \cdot \vec{S})}{dt}.$$

Gornji zapis je v skladu s tem, da lahko magnetno polje nastane na dva načina: s spreminjanjem električnega polja ali pa z električnim tokom.