Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

11. december 2024

Kaj so permutacije

Naj bo A poljubna množica. *Permutacija* na A je vsaka bijektivna preslikava $f : A \to A$.
Permutacija reda n je permutacija v $\{1, 2, \ldots, n\}$. Množico vseh permutacij reda n imenujemo *simetrična grupa reda n* in jo označimo z S_n.
Zgled:

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ je permutacija reda 3.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ je permutacija reda 4.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ je permutacija reda 6.

Produkt permutacij

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\pi * \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

$$\psi * \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

Inverzna permutacija

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \psi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi * \pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

Zapis permutacije z disjunktnimi cikli

Permutacijo lahko zapišemo tudi *z disjunktnimi cikli* in ne v obliki *tabelice*.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Ciklična struktura permutacije

Ciklična struktura permutacije je število posameznih dolžin ciklov v zapisu permutacije z disjunktnimi cikli.

Ciklična struktura permutacije π je
ciklična struktura permutacije ψ je

1-ciklu pravimo tudi *fiksna točka* permutacije,
2-ciklu pravimo *transpozicija*.

Potenciranje permutacij

Za potenciranje permutacij je ugodnejši zapis permutacije *z disjunktnimi cikli* kot pa zapis v obliki *tabelice*.

$$\pi =$$

Kako izračunati $\pi^2, \pi^3, \pi^4, \ldots$?

$\pi^2 =$
$\pi^3 =$
$\vdots$

Potenciranje permutacij

Trditev

Naj bo α permutacija, sestavljena iz samo enega cikla dolžine n. Permutacija α^k je sestavljena iz $\gcd(n, k)$ disjunktnih ciklov, ki so vsi iste dolžine $\dfrac{n}{\gcd(n, k)}$.

Posledica

Naj bo α permutacija, sestavljena iz samo enega cikla dolžine n. Potem je $\alpha^n = \mathrm{id}$ in $\alpha^{-1} = \alpha^{n-1}$ in je n najmanjše naravno število (> 0) s to lastnostjo.

Potenciranje permutacij

Izrek

Naj bo

$$\pi = \alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_m,$$

kjer so α_i, $i = 1, \ldots, m$, *cikli v zapisu permutacije* π *z disjunktnimi cikli. Potem je*

$$\pi^k = {\alpha_1}^k * {\alpha_2}^k * \cdots * {\alpha_m}^k.$$

Red permutacije

Red permutacije π je najmanjše naravno število $k \geq 1$, za katerega je

$$\pi^k = \mathrm{id}.$$

Če je α n-cikel, potem je α^k je sestavljen iz $\gcd(n, k)$ disjunktnih ciklov, ki so vsi iste dolžine $n/\gcd(n, k)$.

Trditev

Red permutacije π *je najmanjši skupni večkratnik dolžin ciklov v zapisu permutacije* π *z disjunktnimi cikli.*

Zapis permutacije s transpozicijami

Trditev

Vsako permutacijo lahko zapišemo kot produkt transpozicij.

Komentar: Ker že *zapis cikla* ni enoličen, tudi zapis kot produkt transpozicij ni enolično določen.

Parnost permutacij

Izrek (o parnosti permutacij)

Denimo, da lahko permutacijo π zapišemo kot produkt m transpozicij, pa tudi kot produkt (morda drugih) n transpozicij. Potem je

$$m \equiv n \pmod 2.$$

Parnost permutacij

Permutacija je *soda*, če jo lahko zapišemo kot produkt sodo mnogo transpozicij, permutacija je *liha*, če jo lahko zapišemo kot produkt liho mnogo transpozicij.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Pravimo, da sta (v permutaciji π) števili 1 in 2 v *inverziji*, ker sta v spodnji vrstici tabelice v *napačnem* vrstnem redu: 1 je manjše kot 2, toda 2 je zapisana pred 1.

Parnost permutacij, ponovimo

Izrek (o parnosti permutacij)

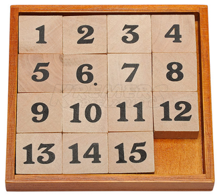
Denimo, da lahko permutacijo π zapišemo kot produkt m transpozicij, pa tudi kot produkt (morda drugih) n transpozicij. Potem je

$$m \equiv n \pmod 2.$$

Permutacija je *soda*, če jo lahko zapišemo kot produkt sodo mnogo transpozicij, permutacija je *liha*, če jo lahko zapišemo kot produkt liho mnogo transpozicij.

Igra 15

Igro 15 igramo na kvadratni igralni površini, na kateri je 15 ploščic s številskimi oznakami in eno *prazno polje*.



Naš cilj je, da s premikanjem ploščic dosežemo *ciljno pozicijo*, v kateri so številke po poljih urejene po velikosti.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 6 & 1 & 2 & 11 & 5 & 4 & 3 & 12 & 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = \mathrm{id}$$

Zgled igre 15

1	2	3	4
5	6	7	8
9	16	10	12
13	14	11	15

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 16 & 10 & 12 & 13 & 14 & 11 & 15 \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & & & 12 & 13 & 14 & & \end{pmatrix}$$

Potenčna enačba

Trditev

Naj bodo α, β, γ dane permutacije, π pa permutacija-neznanka.
Enačba

$$\alpha * \pi * \beta = \gamma$$

je enolično rešljiva.

Potenčna enačba

Naloga: Poišči rešitve enačb

$\pi^{2015} = (1\,2)(3\,4)(5\,6\,7\,8\,9)$

$\pi^{2021} = (1\,2)(3\,4)(5\,6\,7\,8\,9)$

$\pi^{2022} = (1\,2)(3\,4)(5\,6\,7\,8\,9)$

$\pi^{2023} = (1\,2)(3\,4)(5\,6\,7\,8\,9)$

$\pi^{2024} = (1\,2)(3\,4)(5\,6\,7\,8\,9)$

Če je α n-cikel, potem je α^k je sestavljen iz $\gcd(n, k)$ disjunktnih ciklov, ki so vsi iste dolžine $n/\gcd(n, k)$.

Potenčna enačba

Naloga: Poišči rešitve enačb

$\pi^{2015} = (1\,2)(3\,4)(5\,6)(7\,8)(9\,10)(11\,12)$

$\pi^{2021} = (1\,2)(3\,4)(5\,6)(7\,8)(9\,10)(11\,12)$

$\pi^{2022} = (1\,2)(3\,4)(5\,6)(7\,8)(9\,10)(11\,12)$

$\pi^{2023} = (1\,2)(3\,4)(5\,6)(7\,8)(9\,10)(11\,12)$

$\pi^{2024} = (1\,2)(3\,4)(5\,6)(7\,8)(9\,10)(11\,12)$

Konjugirane permutacije

Permutaciji α in β sta *konjugirani*, če obstaja permutacija π, za katero je

$$\beta = \pi^{-1} * \alpha * \pi.$$

Trditev

Konjugiranost je ekvivalenčna relacija v S_n.

Izrek

Permutaciji α in β sta konjugirani natanko takrat, ko imata isto ciklično strukturo.