Osnove matematične analize
Vaje, 12. teden

1. * Na voljo imamo l metrov dolgo tanko palico. Iz nje izrežemo 12 krajših palic, iz katerih je mogoče sestaviti ogrodje kvadra. Izračunaj, kako dolge stranice kvadra moramo izrezati, da bomo dobili kvader z največjo možno površino.

   Rešitev: Površina bo največja, ko bo kvader kocka.

2. * Poišči minimum in maksimum funkcije $f(x, y) = xy$ na krogu
$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

   Rešitev: V notranjosti kroga ni ekstremov (točka $(0, 0)$ je sedlo). Na krožnici sta minimuma v $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, maksimuma sta v $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

3. Izračunaj naslednje nedoločene integrale:
   (a) * $\int 3x^2 - 5x + 1 \, dx$,
   (b) * $\int \frac{2+x}{1-x} \, dx$,
   (c) $\int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}} \, dx$,
   (d) $\int \frac{3}{x-8} \, dx$,
   (e) * $\int \frac{x}{(x-1)(x-8)} \, dx$,
   (f) $\int \frac{1}{x^2-2x+2} \, dx$,
   (g) * $\int \frac{1}{x(\log x)^2} \, dx$,
   (h) $\int \tan x \, dx$,
   (i) $\int \frac{e^x}{e^x-1} \, dx$,
   (j) $\int xe^{-(x^2+1)} \, dx$,
   (k) $\int \sin(3x) \, dx$,
   (l) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$,
   (m) * $\int x^3 \log x dx$.
   (n) $\int \frac{\log x}{x^2} dx$.

   Rešitve: (a) $x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + c$, (b) $-x - 3\log|1-x| + c$, (c) $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} - 4x^{-\frac{1}{4}} + c$,
   (d) $3\log|x-8| + c$, (e) $-\frac{1}{7}\log|x-1| + \frac{8}{7}\log|x-8| + c$, (f) $\arctan(x-1) + c$,
   (g) $-\frac{1}{\log x} + c$, (h) $-\log|\cos(x)| + c$, (i) $\log|e^x - 1| + c$, (j) $-\frac{1}{2}e^{-(x^2+1)} + c$,
   (k) $-\frac{1}{3}\cos(3x) + c$, (l) $\frac{(\arcsin x)^2}{2} + c$, (m) $\frac{1}{4}x^4\log x - \frac{x^4}{16} + c$, (n) $-\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} + c$.

4. Izračunaj določene integrale
   (a) * $\int_0^\pi x\sin(3x)dx$
   (b) $\int_{-\pi}^\pi \cos(x)\sin^2(x)dx$
   (c) * $\int_e^{e^2} \frac{(\log x)^2 - 2\log x}{x}dx$
   (d) * $\int_0^2 \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$
   (e) $\int_0^{\sqrt{\log 2}} xe^{-x^2}dx$

(f) $\int_0^2 xe^{-x}dx$

(g) $\int_{-1}^2 \frac{x}{x^2-x-6}dx$

Rešitve: (a) $\frac{\pi}{3}$, (b) 0, (c) $-\frac{2}{3}$, (d) $\arctan(e^2) - \frac{\pi}{4}$, (e) $\frac{1}{4}$, (f) $1 - \frac{3}{e^2}$, (g) $-\frac{2\log 2}{5}$.