

# Osnove matematične analize

## Vaje, 2. teden

1. Z matematično indukcijo dokaži:

(a) \*  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ ,

(b)  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = n^2(n+1)^2/4$ ,

(c) \*  $n! > 2^{n-1}$  za  $n > 2$ ,

(d) \*  $1 \cdot 4 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3 + \dots + n \cdot 4^n > \frac{(3n-1)4^{n+1}}{9}$ .

2. \* Z uporabo matematične indukcije utemelji, da za vsako naravno število  $n \geq 2$  velja:

$$\log\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \log\left(\frac{n+1}{2n}\right).$$

3. Dokaži, da je za vsako naravno število  $n > 0$  število  $11^{n+1} + 12^{2n-1}$  deljivo s 133.

4. \* Dokaži, da je za vsako naravno število  $n$  število  $7^{n+2} + 8^{2n+1}$  deljivo s 57.

5. Za vsako od naslednjih množic določi infimum in supremum. Ali obstaja minimum ali maksimum?

(a)  $A = \{x \in \mathbb{R} ; ||x - 1| - 2| \geq 1\}$ ,

(b) \*  $B = \{x \in \mathbb{R} ; ||x - 1| - 2| \geq 1, x \leq 5 \text{ in } x > 1\}$ ,

(c)  $C = \{2 + \sin x ; x \in \mathbb{R}\}$ ,

(d)  $D = \{x \in \mathbb{R} ; \log 2 + \log(x^2 - 1) \leq 2 \log|x - 1|\}$ ,

(e)  $E = \{x \in \mathbb{R} ; \log 2 + \log|x^2 - 1| \leq 2 \log|x - 1|\}$ ,

(f)  $F = \{x \in \mathbb{R} ; \log 2 + \log(x^2 - 1) \leq 2 \log(x - 1)\}$ .

Rešitev:

(a)  $\inf A = -\infty$ ,  $\sup A = \infty$ ,  $\min A$  in  $\max A$  ne obstajata,

(b)  $\inf B = 1$ ,  $\sup B = 5$ ,  $\min B$  ne obstaja,  $\max B = 5$ ,

(c)  $\inf C = \min C = 1$ ,  $\sup C = \max C = 3$ ,

(d)  $\inf D = \min D = -3$ ,  $\sup D = -1$ ,  $\max D$  ne obstaja,

(e)  $\inf E = \min E = -3$ ,  $\sup E = \max E = -\frac{1}{3}$ ,

(f)  $\inf F = \inf \emptyset = \infty$ ,  $\sup F = \sup \emptyset = -\infty$ ,  $\min F$  in  $\max F$  ne obstajata.

6. \* Poišči množico rešitev neenačbe

$$|x + 2| - |x - 3| > 3.$$

Določi še njen infimum in supremum. Ali ima minimum? Maksimum?

Rešitev:

Množica rešitev je  $(2, \infty)$ , infimum je 2, supremum je  $\infty$ , minimum in maksimum ne obstajata.