1. Naj bo A $n \times m$ matrika.

   (a) Označimo z $N(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ množico vseh rešitev linearnega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tj. $N(A) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Preveri, da je $N(A)$ vektorski podprostor v $\mathbb{R}^m$. Pravimo mu *ničelni prostor matrike A*.

   (b) Označimo s $C(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ podmnožico vseh linearnih kombinacij stolpcev matrike A. Preveri, da je $C(A)$ vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$. Pravimo mu *stolpčni prostor matrike A*.

   (c) Konkretno naj bo
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$
   Poišči bazi za $N(A)$ in $C(A)$. Ali je vektor $[1,1,1,1,1]^\mathsf{T}$ vsebovan v $C(A)$? Če je, ga izrazi v poiskani bazi.

Rešitev: ...le (c) del:

$$B_{N(A)} = \{[1,0,0,0,-1]^\mathsf{T}, [0,1,0,-1,0]^\mathsf{T}\},$$
$$B_{C(A)} = \{[1,3,3,3,1]^\mathsf{T}, [3,1,3,1,3]^\mathsf{T}, [3,3,1,3,3]^\mathsf{T}\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}.\ [1,1,1,1,1]^\mathsf{T} = \tfrac{1}{7}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3).$$

2. Dana sta vektorja $\mathbf{a} = [1,0,1,-1]^\mathsf{T}$ ter $\mathbf{b} = [0,1,-1,1]^\mathsf{T}$ in podmnožica
$$U := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0 \text{ in } \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

   (a) Prepričaj se, da je U vektorski podprostor v $\mathbb{R}^4$. Poišči bazo za U in določi njegovo dimenzijo.

   (b) Poišči matriki A in B, da bo $U = C(A) = N(B)$.

   (c) Ali obstaja 4×4 matrika F, da je $U = C(F) = N(F)$? Če obstaja, jo poišči!

Rešitev: (a) Npr. $B_U = \{[-1,1,1,0]^\mathsf{T}, [1,-1,0,1]^\mathsf{T}\}$, $\dim(U) = 2$.

(b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. (c) $F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Dani sta matriki
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Poišči bazi ničelnih prostorov $N(A)$ in $N(B)$ matrik A in B. Ali velja $N(A) = N(B)$?

   (b) Prepričaj se, da sta stolpčna prostora $C(A)$ in $C(B)$ enaka.

Rešitev: (a) Npr. $B_{N(A)} = \{[-2,1,1]^\mathsf{T}\}$, $B_{N(B)} = \{[1,-1,-2]^\mathsf{T}\}$. $N(A) \neq N(B)$.
(b) Uporabimo Gaussovo eliminacijo na $[A \mid B]$ ter $[B \mid A]$.

4. Dani so matrika K ter vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Ali sta vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ vsebovana v $N(K)$? ... v $C(K)$?

(b) Poišči baze in določi dimenzije podprostorov $N(K)$, $C(K)$, $N(K) \cap C(K)$ ter $N(K) + C(K)$.

V (b) je *vsota* vektorskih podprostorov $U, V \leq W$, vektorski podprostor $U + V \leq W$, v katerem so vse možne vsote vektorjev iz U in V, tj. $U + V := \{u + v : u \in U \text{ in } v \in V\}$. Preveriš lahko, da velja $U + V = \mathcal{L}(U \cup V)$, in s tem hkrati potrdiš, da je $U + V$ vektorski podprostor.

Rešitev: (a) $\mathbf{a} \in N(K)$, $\mathbf{b} \notin N(K)$. $\mathbf{a} \in C(K)$, $\mathbf{b} \in C(K)$.
(b) $B_{N(K)} = \{[1,1,1,0]^\mathsf{T}, [-1,0,0,1]^\mathsf{T}\}$, $B_{C(K)} = \{[1,1,2,2]^\mathsf{T}, [1,0,1,1]^\mathsf{T}\}$, $B_{N(K)\cap C(K)} = \{[0,1,1,1]^\mathsf{T}\}$, $B_{N(K)+C(K)} = \{[1,1,1,0]^\mathsf{T}, [-1,0,0,1]^\mathsf{T}, [1,0,1,1]^\mathsf{T}\}$.