

1. Naj bo  $A$   $n \times m$  matrika.

- (a) Označimo z  $N(A) \subseteq \mathbb{R}^m$  množico vseh rešitev linearnega sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , tj.  $N(A) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ . Preveri, da je  $N(A)$  vektorski podprostor v  $\mathbb{R}^m$ . Pravimo mu *ničelni prostor matrike A*.
- (b) Označimo s  $C(A) \subseteq \mathbb{R}^n$  podmnožico vseh linearnih kombinacij stolpcev matrike  $A$ . Preveri, da je  $C(A)$  vektorski podprostor v  $\mathbb{R}^n$ . Pravimo mu *stolpčni prostor matrike A*.
- (c) Konkretno naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči bazi za  $N(A)$  in  $C(A)$ . Ali je vektor  $[1, 1, 1, 1, 1]^T$  vsebovan v  $C(A)$ ? Če je, ga izrazi v poiskani bazi.

Rešitev: ...le (c) del:

$$B_{N(A)} = \{[1, 0, 0, 0, -1]^T, [0, 1, 0, -1, 0]^T\},$$

$$B_{C(A)} = \{[1, 3, 3, 3, 1]^T, [3, 1, 3, 1, 3]^T, [3, 3, 1, 3, 3]^T\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}. [1, 1, 1, 1, 1]^T = \frac{1}{7}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3).$$

2. Dana sta vektorja  $\mathbf{a} = [1, 0, 1, -1]^T$  ter  $\mathbf{b} = [0, 1, -1, 1]^T$  in podmnožica

$$U := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0 \text{ in } \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

- (a) Prepričaj se, da je  $U$  vektorski podprostor v  $\mathbb{R}^4$ . Poišči bazo za  $U$  in določi njegovo dimenzijo.
- (b) Poišči matriki  $A$  in  $B$ , da bo  $U = C(A) = N(B)$ .
- (c) Ali obstaja  $4 \times 4$  matrika  $F$ , da je  $U = C(F) = N(F)$ ? Če obstaja, jo poišči!

Rešitev: (a) Npr.  $B_U = \{[-1, 1, 1, 0]^T, [1, -1, 0, 1]^T\}$ ,  $\dim(U) = 2$ .

(b)  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ . (c)  $F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ .

3. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Poišči bazi ničelnih prostorov  $N(A)$  in  $N(B)$  matrik  $A$  in  $B$ . Ali velja  $N(A) = N(B)$ ?
- (b) Prepričaj se, da sta stolpčna prostora  $C(A)$  in  $C(B)$  enaka.

Rešitev: (a) Npr.  $B_{N(A)} = \{[-2, 1, 1]^T\}$ ,  $B_{N(B)} = \{[1, -1, -2]^T\}$ .  $N(A) \neq N(B)$ .

(b) Uporabimo Gaussovo eliminacijo na  $[A \mid B]$  ter  $[B \mid A]$ .

4. Dani so matrika  $K$  ter vektorja  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{b}$ :

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Ali sta vektorja  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{b}$  vsebovana v  $N(K)$ ? ... v  $C(K)$ ?  
 (b) Poišči baze in določi dimenzije podprostorov  $N(K)$ ,  $C(K)$ ,  $N(K) \cap C(K)$  ter  $N(K) + C(K)$ .

V (b) je *vsota* vektorskih podprostorov  $U, V \leq W$ , vektorski podprostor  $U + V \leq W$ , v katerem so vse možne vsote vektorjev iz  $U$  in  $V$ , tj.  $U + V := \{u + v : u \in U \text{ in } v \in V\}$ . Preveriš lahko, da velja  $U + V = \mathcal{L}(U \cup V)$ , in s tem hkrati potrdiš, da je  $U + V$  vektorski podprostor.

Rešitev: (a)  $\mathbf{a} \in N(K)$ ,  $\mathbf{b} \notin N(K)$ .  $\mathbf{a} \in C(K)$ ,  $\mathbf{b} \in C(K)$ .

(b)  $B_{N(K)} = \{[1, 1, 1, 0]^T, [-1, 0, 0, 1]^T\}$ ,  $B_{C(K)} = \{[1, 1, 2, 2]^T, [1, 0, 1, 1]^T\}$ ,  $B_{N(K) \cap C(K)} = \{[0, 1, 1, 1]^T\}$ ,  $B_{N(K) + C(K)} = \{[1, 1, 1, 0]^T, [-1, 0, 0, 1]^T, [1, 0, 1, 1]^T\}$ .