DODATEK B

Kratek pregled elementarnih funkcij

V dodatku bomo na kratko pregledali elementarne funkcije in njihove lastnosti.

B.1. Polinom

Polinom stopnje n je funkcija oblike

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

kjer $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$.

Lastnosti:

- $\mathcal{D}_p = \mathbb{R}$.
- a_n imenujemo *vodilni koeficient* polinoma p.
- Polinom $ax + b$ stopnje 1 je *linearna funkcija*, polinom $ax^2 + bx + c$ stopnje 2 pa *kvadratna funkcija*.
- Ko x narašča preko vseh meja, gre $p(x) \to \infty$, če je $a_n > 0$ in $p(x) \to -\infty$, če je $a_n < 0$. Obnašanje polinoma p, ko gre $x \to -\infty$ je odvisno od stopnje polinoma. Polinomi lihe stopnje imajo za zalogo vrednosti $\mathbb{R}$, medtem ko za polinome sode stopnje velja $\lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} p(x)$.
- Vsak polinom lahko faktoriziramo na linearne in nerazcepne kvadratne faktorje s koeficienti v $\mathbb{R}$. Zato ima vsak polinom stopnje n kvečjemu n realnih ničel. Določanje ničel polinomov je težek problem.
- Vsak polinom stopnje n lahko faktoriziramo na n linearnih faktorjev s koeficienti v $\mathbb{C}$.
- V ničlah sode stopnje ima polinom lokalni ekstrem in ohrani predznak, v ničlah lihe stopnje pa spremeni predznak.

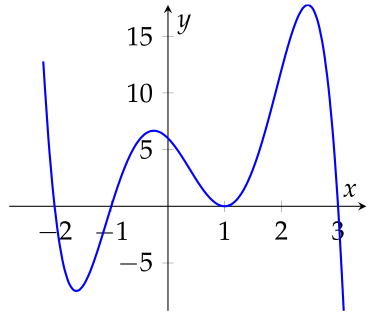
PRIMER B.1.1. *Nariši graf polinoma*

$$p(x) = -x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 - 5x + 6.$$

REŠITEV: *Če faktoriziramo polinom*

$$p(x) = -x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 - 5x + 6 = -(x-1)^2(x+2)(x+1)(x-3),$$

preprosto določimo ničle $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_{3,4} = 1$ in $x_5 = 3$ in tako je graf polinoma enak



B.2. Racionalna funkcija

Racionalna funkcija

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0}$$

je kvocient dveh polinomov.

Če predstavimo racionalno funkcijo v okrajšani obliki, kjer števec in imenovalec nimata skupnih faktorjev, potem veljajo naslednje lastnosti.

- Ničle imenovalca racionalne funkcije imenujemo *poli* racionalne funkcije.
- Definicijsko območje: $\mathcal{D}_r = \mathbb{R} \setminus \{\text{poli } r\}$
- Ničle racionalne funkcije so enake ničlam števca.
- Če je $n < m$, potem je $\lim\limits_{x\to\infty} r(x) = 0$ in $\lim\limits_{x\to-\infty} r(x) = 0$.
- Če je $n = m$, potem je $\lim\limits_{x\to\infty} r(x) = \frac{a_n}{b_m}$ in $\lim\limits_{x\to-\infty} r(x) = \frac{a_n}{b_m}$.
- Če je $n > m$, potem se racionalna funkcija r v neskončnosti približuje polinomu s, kjer je $p(x) = s(x)q(x) + o(x)$ in je stopnja polinoma o strogo manjša od stopnje polinoma q.

PRIMER B.2.1. *Narišimo graf racionalne funkcije* $r(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2-4} = \frac{x^2(x+1)}{(x-2)(x+2)}$

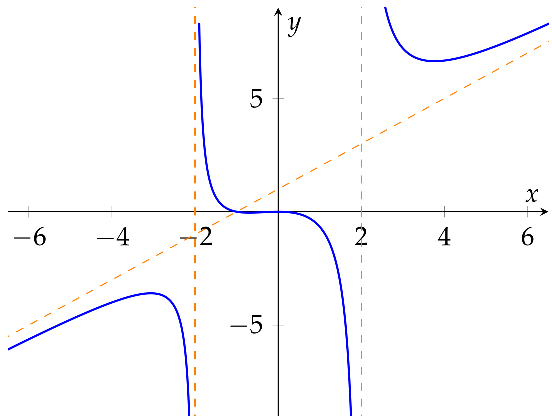
REŠITEV: *Funkcija r ima dvojno ničlo v točki 0 in enojno ničlo v točki -1, njena pola pa sta v točkah -2 in 2. Torej je $\mathcal{D}_r = \mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$.*

Ker je stopnja števca večja od stopnje imenovalca, moramo za asimptotično obnašanje funkcije r v neskončnosti izračunati kvocient števca in imenovalca:

$$\frac{x^3 + x^2}{x^2 - 4} = x + 1 + \frac{4x + 4}{x^2 - 4}.$$

Ker je $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x+4}{x^2-4} = 0$, se racionalna funkcija za zelo velike in zelo majhne x obnaša kot funkcija $y = x + 1$.

Iz teh podatkov lahko narišemo graf funkcije r:

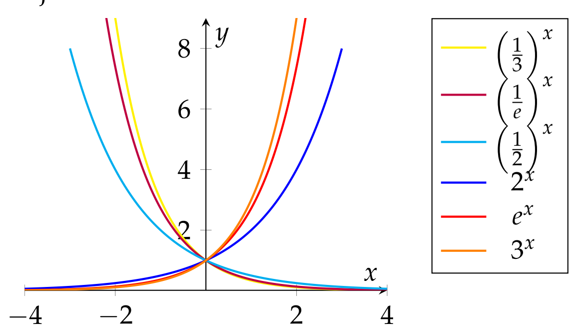


B.3. Eksponentna funkcija in logaritem

Eksponentna funkcija je funkcija oblike
$$f(x) = a^x,$$
kjer je a poljubno pozitivno realno število.

Eksponentna funkcija ima naslednje lastnosti:

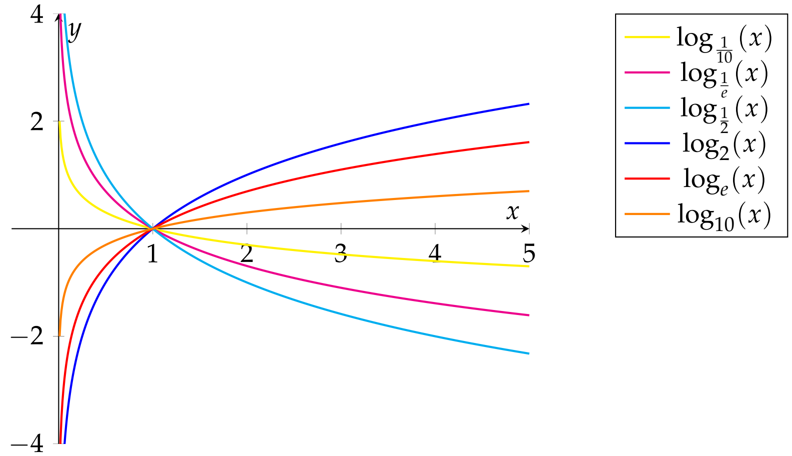
- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_f = (0, \infty)$.
- Če je $a > 1$, je eksponentna funkcija naraščajoča, če je $0 < a < 1$, je padajoča.
- Eksponentna funkcija je injektivna za vsak $a \neq 1$ in $a^0 = 1$ za vse a.
- Najpogosteje uporabljamo osnovo e.



Inverzna funkcija eksponentni funkciji a^x, kjer $a \neq 1$, je *logaritem* z osnovo a.

Logaritem z osnovo a je funkcija
$$g(x) = \log_a x,$$
pri $a > 0, a \neq 1$, ki je inverzna eksponentni funkciji $f(x) = a^x$. Torej je
$$\log(e^x) = x \text{ in } e^{\log x} = x.$$

- Po definiciji je
$$a^x = y \text{ natanko tedaj, ko je } x = \log_a y.$$
- $\mathcal{D}_{\log_a} = (0, \infty)$, $\mathcal{Z}_{\log_a} = \mathbb{R}$.



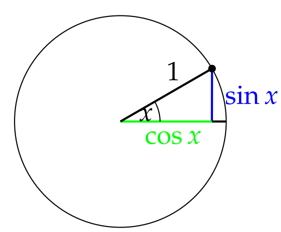
- $\log_a 1 = 0$ za vse $a > 0, a \neq 1$.
- Če je $a > 1$, je $\log_a$ naraščajoča, če je $0 < a < 1$, pa je $\log_a$ padajoča funkcija.
- Najpogosteje uporabljamo osnovo $a = e$. Tako funkcijo imenujemo *naravni logaritem* in jo krajše označimo tudi z $\log x$ ali $\ln x$. Čeprav je včasih z $\log x$ označen logaritem pri osnovi 10 ($\log_{10} x$), tu uporabljamo $\log x$ izključno za naravni logaritem.

Zveze, ki jih najpogosteje potrebujemo:

- $a^{x+y} = a^x a^y$,
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$,
- $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$,
- $\log(e^x) = x$ in $e^{\log x} = x$.

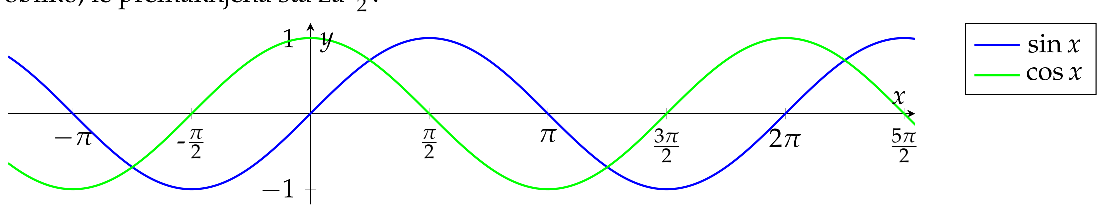
B.4. Kotne funkcije

Funkciji kosinus $\cos x$ in sinus $\sin x$ sta definirani kot prva oziroma druga koordinata točke na enotski krožnici, ki oklepa z abscisno osjo kot x.
Pri tem merimo kot x vedno v radianih.



Obe funkciji sta definirani za vse $x \in \mathbb{R}$ ($\mathcal{D}_{\sin} = \mathcal{D}_{\cos} = \mathbb{R}$), sta omejeni ($\mathcal{Z}_{\sin} = \mathcal{Z}_{\cos} = [-1, 1]$) in periodični s periodo 2π.

Ker velja $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$, imata njuna grafa enako obliko, le premaknjena sta za $\frac{\pi}{2}$:



Pri tem je sinus liha funkcija, kosinus pa soda funkcija.

Pogosto potrebujemo kvocient med sinusom in kosinusom:

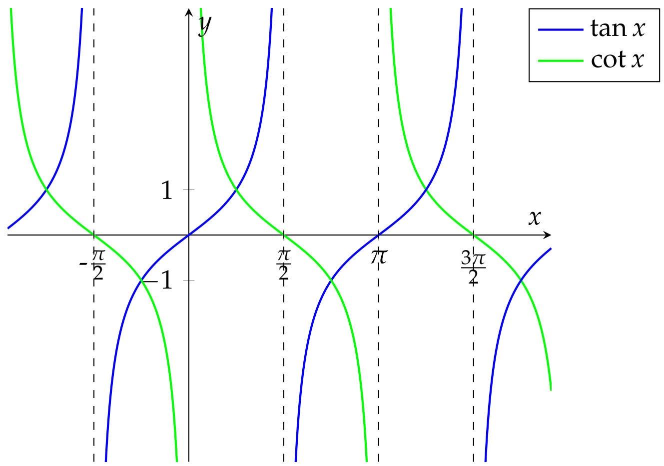
Funkciji *tangens* in *kotangens* definiramo kot:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Tako tangens kot kotangens sta definirana povsod razen v svojih polih:

$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \text{ in } \mathcal{D}_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Sta neomejeni $\mathcal{Z}_{\tan} = \mathcal{Z}_{\cot} = \mathbb{R}$ in periodični s periodo π.



Med kotnimi funkcijami veljajo številne zveze. Nekaj jih je posledica periodičnosti, sodosti ali lihosti ter osnovnih definicij, kot na primer:

$\sin(x + 2\pi) = \sin x$	$\cos(x + 2\pi) = \cos x$
$\tan(x + \pi) = \tan x$	$\cot(x + \pi) = \cot x$
$\sin(-x) = -\sin x$	$\cos(-x) = \cos x$
$\tan(-x) = -\tan x$	$\cot(x) = -\cot x$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$
$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$
$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\cot x$	

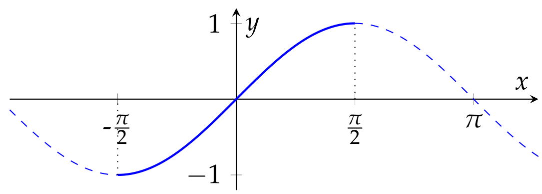
Še nekatere druge zveze, ki jih uporabljamo v geometriji ali pa pri teoretičnem računanju s kotnimi funkcijami, npr. pri integraciji, so:

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$	$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$	$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$	$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$	$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$
$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$	$\tan x = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$
$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$	$\sin x\sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$
$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$	$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$
$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$	$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$

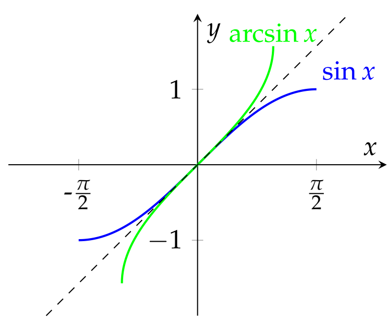
B.5. Ločne funkcije

Kotne funkcije niso injektivne, zato ne obstajajo njihove inverzne funkcije, če jih opazujemo na njihovem celem definicijskem območju. Če pa se omejimo na zoženo območje, kjer je posamezna kotna funkcija injektivna, lahko definiramo njen inverz.



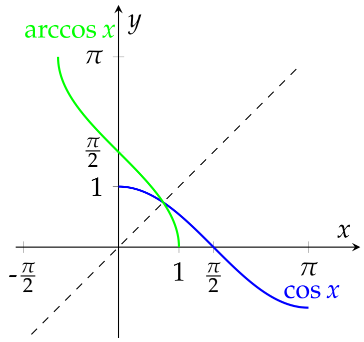
Ker je funkcija $\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ injektivna, lahko definiramo inverzno funkcijo na tem zoženem intervalu.

> Funkcija *arkus sinus* je inverzna funkcija funkcije sinus na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Torej je
> $$y = \arcsin x \quad \text{natanko tedaj, ko je} \quad \sin y = x$$
> za vse $x \in [-1, 1]$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



Podobno definiramo inverzno funkcijo funkcije kosinus, če omejimo definicijsko območje funkcije $\cos x$ na interval $[0, \pi]$.

> Funkcija *arkus kosinus* je inverzna funkcija funkcije kosinus na intervalu $[0, \pi]$. Torej je
> $$y = \arccos x \quad \text{natanko tedaj, ko je} \quad \cos y = x$$
> za vse $x \in [-1, 1]$, $y \in [0, \pi]$.



Tudi za zoženi injektivni funkciji tangens $\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ in kotangens $\cot\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}$ lahko definiramo njima inverzni funkciji *arkus tangens* in *arkus kotangens*, kjer je

$$\mathcal{D}_{\text{arctan}} = \mathcal{D}_{\text{arccot}} = \mathbb{R},\ \mathcal{Z}_{\text{arctan}} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \text{ in } \mathcal{Z}_{\text{arccot}} = (0, \pi).$$