

1. S topom, ki je postavljen v koordinatno izhodišče $(0, 0, 0)$, želimo zadeti tarčo, ki leži na xy -ravnini (recimo v točki $T(400\text{ m}, 300\text{ m})$). Hitrost kroglice v trenutku izstrelitve je $v_0 = 300\text{ m/s}$, top pa lahko poljubno vrtimo okrog z -osi in spreminjamo naklon cevi. Krogla seveda čuti zračni upor $c = 0.004$ (kvadratni zakon upora), poleg tega pa nam nagaja tudi veter, ki piha s konstantno hitrostjo $\mathbf{w} = [5, -2, 0]^T\text{ m/s}$.

Kam moramo usmeriti top in kako nastaviti naklon, da bomo zadeli tarčo?

- (a) Zapiši vse sile, ki delujejo na izstrelak (kroglo) z maso m , položajem \mathbf{x} in hitrostjo $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$. Nato se z uporabo 2. Newtonovega zakona prepričaj, da je enačba gibanja izstrelka

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{g} + c(\mathbf{w} - \dot{\mathbf{x}})\|\mathbf{w} - \dot{\mathbf{x}}\|.$$

- (b) Prevedi zgornji sistem treh DE 2. reda v sistem šestih DE 1. reda.
 (c) Zapišimo začetno hitrost izstrelka kot

$$\mathbf{v}_0 = v_0 \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix},$$

kjer kota ϕ in θ določata začetno smer. Izstrelak zadane xy -ravnino v točki $[x, y, 0]^T$. Imamo torej funkcijo dveh spremenljivk \mathbf{F} , ki smeri določeni s kotoma ϕ in θ priredi točko na ravnini $[x, y]^T = \mathbf{F}([\phi, \theta]^T)$. Napiši funkcijo $\mathbf{T} = \text{izstrelak}([\phi; \theta])$ v octave-u, ki vrne mesto zadetka $\mathbf{T} = [x; y]$ pri začetni smeri določeni s $[\phi; \theta]$. (Zgornji sistem DE rešujemo numerično z Runge–Kutta metodo, dokler izstrelak ne zadane xy -ravnine.)

- (d) Poišči rešitev $[\phi, \theta]^T$ enačbe $\mathbf{F}([\phi, \theta]^T) = \mathbf{r}_T$ s spodaj opisano sekantno (oz. diskretizirano Newtonovo ali Broydenovo) metodo. Napiši octave funkcijo $\mathbf{x} = \text{secant}([\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n], \mathbf{F}, \text{tol}, \text{maxit})$.

Reševanje sistemov nelinearnih enačb, 2. del

Rešitev sistema $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, kjer je $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zvezno odvedljiva preslikava, že znamo poiskati z Newtonovo metodo. Poleg začetnega približka $\mathbf{x}^{(0)}$ in funkcije \mathbf{F} metoda potrebuje tudi Jacobijevo matriko $J\mathbf{F}$ funkcije \mathbf{F} . Kaj narediti, če Jacobijeve matrike *nimamo*? (Recimo, da je Jacobijevo matriko težko izračunati, ali je ne znamo, ali pa je izračun $J\mathbf{F}$ preveč časovno potraten.) Opisali bomo tri možnosti, izvedli pa eno (mogoče dve) od teh možnosti.

- *Diskretizirana Newtonova metoda* parcialne odvode $\partial F_i / \partial x_j$ nadomesti s končnimi diferencami oblike

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \doteq \frac{F_i(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - F_i(\mathbf{x})}{h},$$

kjer je h primerno (majhno) število (običajno $h \geq \sqrt{\epsilon}$). Iz tega sestavimo približek za Jacobijevo matriko na vsakem koraku iteracije. Preostanek metode se ujema z običajno Newtonovo iteracijo. Slabost: Na vsakem koraku

moramo izračunati $n + 1$ funkcijskih vrednosti (funkcije \mathbf{F}). Prednost: Red konvergence je praktično enak kot pri običajni Newtonovi metodi, tj. 2, in ni odvisen od n (dimenzije prostora \mathbb{R}^n).

- *Večrazsežna sekantna metoda* je posplošitev sekantne metode za zvezno funkcijo f ene spremenljivke x in enačbo $f(x) = 0$. Pri (enorazsežni) sekantni metodi začnemo z začetnima približkoma $x^{(0)}$ in $x^{(1)}$, poiščemo enačbo premice $y = ax + b$, ki gre skozi točki $(x^{(0)}, f(x^{(0)}))$ in $(x^{(1)}, f(x^{(1)}))$, in rešimo enačbo $ax + b = 0$, dobimo rešitev $x^{(2)}$. Nato zavržemo $x^{(0)}$ in uporabimo $x^{(1)}$ in $x^{(2)}$ za nova približka pri naslednjem koraku iteracije. . .

Pri večrazsežni sekantni metodi bomo preslikavo \mathbf{F} aproksimirali z afino preslikavo $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ (to je direktna posplošitev $x \mapsto ax + b$). Za to bomo potrebovali $n + 1$ začetnih približkov $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$. Rešitev $\mathbf{x}^{(n+1)}$ enačbe $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ nato dodamo med približke za rešitev in zavržemo $\mathbf{x}^{(0)}$. Ponavljamo. . .

Opišimo natančneje, kako bomo izvedli en korak te iteracije. Na prvi pogled se zdi, da bomo morali na vsakem koraku rešiti linearen sistem oblike

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{b} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}), \\ \mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{b} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}), \\ &\vdots \\ \mathbf{A}\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{b} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(n)}), \end{aligned}$$

kjer so neznanke $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ in $\mathbf{b} = [b_i]^\top$. (To je sistem $n^2 + n$ enačb z $n^2 + n$ neznankami!) Ko dobimo \mathbf{A} in \mathbf{b} , rešimo še $\mathbf{A}\mathbf{x} = -\mathbf{b}$ in dobimo $\mathbf{x}^{(n+1)}$. (Ta sistem je precej manjši; ima n enačb in n neznank.) Izkaže se, da lahko do $\mathbf{x}^{(n+1)}$ pridemo skoraj direktno, če rešimo ustrezen sistem $n + 1$ enačb. Tako: Naj bo $\mathbf{X} = [\mathbf{x}^{(0)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}]$ matrika začetnih približkov (to je $n \times (n+1)$ matrika). Nov približek $\mathbf{x}^{(n+1)}$ dobimo tako, da najprej rešimo sistem $\mathbf{Z}\mathbf{z} = \mathbf{e}_1$, kjer je

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) & \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) & \dots & \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(n)}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = [1, 0, \dots, 0]^\top,$$

in postavimo $\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{X}\mathbf{z}$.

Prednost sekantne metode: Na vsakem koraku (razen pri prvem) moramo izračunati le eno funkcijsko vrednost. Slabost: Red konvergence je odvisen od n , enak je pozitivni rešitvi enačbe $t^{n+1} - t^n - 1 = 0$. (Za $n = 1$ je $t \doteq 1.618$, za $n = 2$ je $t \doteq 1.466$, pri $n = 3$ je $t \doteq 1.380$, . . .)

- *Broydenova metoda* je podobna (diskretizirani) Newtonovi metodi. Namesto izračuna (približka) Jacobijeve matrike na vsakem koraku le malo popravimo (približek) Jacobijeve matrike funkcije \mathbf{F} . Naj bo $J_0 = J\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$ (približek) za Jacobijevo matriko \mathbf{F} v $\mathbf{x}^{(0)}$. Naj bo J_k približek za Jacobijevo matriko \mathbf{F} na k -tem koraku, $\mathbf{x}^{(k)}$ pa približek iteracije na k -tem koraku. Nov približek iteracije je potem

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - J_k^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}).$$

Zahtevamo, da nov približek Jacobijeve matrike, J_{k+1} , zadošča *sekantni enačbi*

$$J_{k+1}(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k+1)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}).$$

Matrik J_{k+1} , ki zadoščajo zgornji enačbi, je precej. Pri Broydenovi metodi za J_{k+1} vzamemo

$$J_{k+1} = J_k + \frac{1}{\|\mathbf{d}_k\|^2} (\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k+1)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) - J_k \mathbf{d}_k) \mathbf{d}_k^T,$$

kjer je $\mathbf{d}_k = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$. (Prepričaj se, da ta J_{k+1} res zadošča sekantni enačbi!)

Velika prednost Broydenove metode v primerjavi z diskretizirano Newtonovo je ta, da potrebuje le en izračun funkcijske vrednosti na vsakem koraku. Slabost: Za konvergenco potrebujemo več korakov, saj na vsakem koraku le približno popravimo Jacobijevo matriko (oz. približek le-te). To niti ni huda slabost; koraki Broydenove metode se običajno precej hitreje izvedejo, saj nam ni treba izračunati $n + 1$ funkcijskih vrednosti na vsakem koraku. To pa seveda pomeni, da do rešitve pridemo hitreje.