

Za podmnožico $M \subseteq \mathbb{R}^n$ definiramo

$$M^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \text{ za vsak } \mathbf{y} \in M\}.$$

Podmnožica $M^\perp$ je vedno vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$ (Zakaj?), ki ga imenujemo *ortogonalni komplement* podmnožice M . Z besedami: $M^\perp$ je vektorski podprostor vseh vektorjev $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ki so pravokotni na vse vektorje $\mathbf{y} \in M$.

- Poišči bazi za $\{[1, 1, 1]^\top\}^\perp$ ter $(\mathcal{L}(\{[1, 1, 0]^\top, [0, 1, 1]^\top\}))^\perp$.
 - Utemelji, da velja $M^\perp = (\mathcal{L}(M))^\perp$ ter $M^{\perp\perp} = \mathcal{L}(M)$.
- Naj bo V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^4$ razpet na vektorje

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Poišči bazi za podprostora V in $V^\perp$.
- Poišči ortonormirani bazi za podprostora V in $V^\perp$.
- Poišči pravokotni projekciji vektorja $[1, 2, 3, 4]^\top$ na V in $V^\perp$.

Rešitev: (a) $B_V = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, $B_{V^\perp} = \{[1, 0, 0, -1]^\top, [0, 1, -1, 0]^\top\}$.

(b) $B'_V = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{x}, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{y} \right\}$, $B'_{V^\perp} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 0, 0, -1]^\top, \frac{1}{\sqrt{2}}[0, 1, -1, 0]^\top \right\}$.

(c) Pravokotna projekcija na V je $\frac{5}{2}[1, 1, 1, 1]^\top$, pravokotna projekcija na $V^\perp$ je $\frac{1}{2}[-3, -1, 1, 3]^\top$.

- Vektorski podprostor $U \leq \mathbb{R}^4$ razpenjajo vektorji

$$\mathbf{a}_1 = [1, 1, 1, 1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1, 0, 2, 1]^\top \quad \text{in} \quad \mathbf{a}_3 = [1, -1, 1, 1]^\top.$$

- Poišči ortonormirano bazo B_U podprostora U .
- Izrazi vektorje $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ in $\mathbf{a}_3$ v tej bazi.
- Poišči QR–razcep matrike $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$.
- Dopolni bazo B_U do ortonormirane baze prostora $\mathbb{R}^4$.
- Poišči pravokotno projekcijo vektorja $\mathbf{v} = [1, 1, 1, 5]^\top$ na podprostor U .

Rešitev: (a) $B_U = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\} = \left\{ \frac{1}{2}[1, 1, 1, 1]^\top, \frac{1}{\sqrt{2}}[0, -1, 1, 0]^\top, \frac{1}{2}[1, -1, -1, 1]^\top \right\}$.

(b) $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{q}_1$, $\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{q}_1 + \sqrt{2}\mathbf{q}_2$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{q}_1 + \sqrt{2}\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3$.

(c) $Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ in $R = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) B_U dodamo $\mathbf{q}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-1, 0, 0, 1]^\top$.

(e) Pravokotna projekcija $\mathbf{v}$ na U je $[3, 1, 1, 3]^\top$.

4. Poišči QR–razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Rešitev: } Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 2/3 & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -2/3 & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

5. Recimo, da je matrika A ortogonalno podobna diagonalni matriki D . Velja torej $A = PDP^{-1}$, kjer je P ortogonalna matrika. Utemelji, da je tedaj matrika A simetrična, tj. velja $A^T = A$.