1. Zaporedji a_n in b_n sta dani rekurzivno s formulama

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n &= a_{n-1} + 2b_{n-1} \end{aligned}$$

in z začetnima členoma $a_1 = 0$ in $b_1 = 1$. Določi splošna člena zaporedij a_n in b_n.

2. Zaporedje je podano rekurzivno s formulo

$$a_n = -2a_{n-1} + 3a_{n-2}$$

in začetnima členoma $a_0 = 0$ in $a_1 = 1$. Določi eksplicitno formulo za a_n.

   (a) Rekurzivno formulo najprej napiši v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

   za vektor $[a_n, b_n]$, kjer je $b_n = a_{n-1}$.

   (b) Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike A.

   (c) Začetni vektor $\mathbf{x}_1 = [a_1, b_1]^\mathsf{T} = [1,0]^\mathsf{T}$ razvij po lastni bazi matrike A in poišči splošno formulo za a_n.

3. Zaporedje je dano rekurzivno s formulo

$$d_n = d_{n-1} - d_{n-2}$$

in začetnima členoma $d_1 = 1$ in $d_2 = 0$. Poišči eksplicitno formulo za d_n.

4. Dana je matrika

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Poišči vse lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike J.

   (b) Izberi lastne vektorje matrike J tako, da bodo paroma pravokotni (če že niso), nato pa ...

   (c) ... poišči še ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}^3$, ki jo tvorijo lastni vektorji matrike J.

   (d) Zapiši $J = VDV^\mathsf{T}$, kjer je D diagonalna, V pa ortogonalna matrika.

Rešitev: (a) Lastne vrednosti: $\lambda_{1,2} = 2$, $\lambda_3 = 4$, pripadajoči lastni vektorji $\mathbf{v}_1 = [-1,0,1]^\mathsf{T}$, $\mathbf{v}_2 = [0,1,0]^\mathsf{T}$, $\mathbf{v}_3 = [1,0,1]^\mathsf{T}$. (b) So že paroma pravokotni. (c) Ortonormirano bazo tvorimo iz lastnih vektorjev $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-1,0,1]^\mathsf{T}$, $\mathbf{q}_2 = \mathbf{v}_2 = [0,1,0]^\mathsf{T}$, $\mathbf{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,0,1]^\mathsf{T}$. (d) $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $V = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Naj bo A matrika

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

   (a) Poišči ortonormirano bazo $\mathbb{R}^4$ sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike A.

   (b) Zapiši spektralni razcep matrike A – izrazi A kot linearno kombinacijo matrik pravokotnih projekcij.

Rešitev: (a) $B_{\mathbb{R}^4} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

(b) $A = \mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^\top + \mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^\top + 5\mathbf{q}_3\mathbf{q}_3^\top + 9\mathbf{q}_4\mathbf{q}_4^\top.$