Osnove matematične analize

Tretji sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

21. oktober 2020

Rešitve algebraičnih enačb

Spomnimo se pojma **algebraična enačba**:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{C}$ in $a_n \neq 0$.

Izrek

Vsaka algebraična enačba stopnje $n > 0$ ima **vsaj eno kompleksno** *rešitev $x \in \mathbb{C}$.*

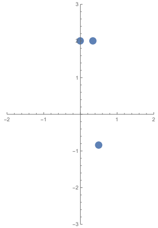
Posledica

- *Vsaka algebraična enačba stopnje $n > 0$ ima natanko n kompleksnih rešitev (ne nujno različnih).*
- *Če so vsi koeficienti a_i realni, potem kompleksne ničle nastopajo v konjugiranih parih, tj. če je $\alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, je rešitev, potem je tudi $\alpha - i\beta$ rešitev.*
- *Poljuben polinom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ima razcep $P(x) = a_n (x - x_1) \ldots (x - x_n)$, kjer so $x_1, \ldots, x_n$ rešitve enačbe $P(x) = 0$.*

Naloga (Izpit 2, 2019/20)

1. *Razložite pojem polarni zapis kompleksnega števila in v polarnem zapisu napišite formulo za potenciranje kompleksnega števila.*

2.
   - *Naj bo dana kompleksna enačba* $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$, *kjer so* $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ *realna števila,* $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *pa ena izmed njenih rešitev. Poiščite še eno rešitev te enačbe in dokažite, da gre res za rešitev.*
   - *Dana je enačba* $z^6 - \frac{z^4}{18} - \frac{8z^3}{9} + \frac{17z^2}{16} - \frac{8z}{9} + \frac{305}{144} = 0$. *Na spodnji sliki so narisane nekatere njene rešitve. Narišite še ostale. (Namig: Enačbe vam ni potrebno reševati.)*



Koreni kompleksnega števila

n-ti koreni števila $\mathbf{a} \in \mathbb{C}$ so rešitve enačbe

$$\mathbf{z^n} = \mathbf{a}.$$

- Enačbo zapišemo v polarni obliki:

$$|\mathbf{z}|^{\mathbf{n}} \mathbf{e}^{\mathbf{in}\varphi} = |\mathbf{a}| \mathbf{e}^{\mathbf{i}\mathrm{Arg}(\mathbf{a})}.$$

- Dobimo n različnih rešitev:

$$\mathbf{z_k} = \sqrt[n]{|a|}\, \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\mathrm{Arg}(\mathbf{a})+2\mathbf{k}\pi}{\mathbf{n}}}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{0}, \ldots \mathbf{n} - \mathbf{1}$$

- Rešitve ležijo na **ogliščih pravilnega *n*-kotnika** v kompleksni ravnini.

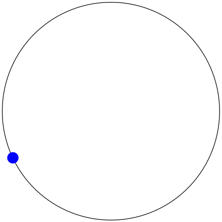
Zgledi

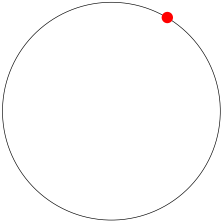
- Poiščimo in narišimo vse $z \in \mathbb{C}$, za katere velja $z^6 = 1$.
- Poiščimo in narišimo vse $z \in \mathbb{C}$, za katere velja $(z^3 - 2)(z^4 + i) = 0$.
- Poiščimo z^{2021} za $z = \frac{1-i}{i}$.

NAUK: polarno obliko uporabljamo pri potenciranju, korenjenju ter (v veliki meri) pri množenju.

Naloga (Izpit 1, 2019/20)

- *Razložite pojem n-ti koren kompleksnega števila $a \in \mathbb{C}$. Navedite tudi eksplicitne formule za izračun vseh n-tih korenov števila $a \in \mathbb{C}$.*
- *Naj bo $n_1 = 2$ in $n_2 = 6$. Na levi sliki je eden od n_1-tih, na desni pa eden od n_2-tih korenov nekega kompleksnega števila. Na skicah čim bolj natančno označite ostale korene, tj. n_1-te na levi in n_2-te na desni. Pri tem mora biti jasno razvidno, kako ste jih določili. Upoštevajte, da sta središči krožnic v točki $(0, 0)$.*





mmmm

Zaporedja

Zaporedje je preslikava

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto a_n \end{aligned}$$

Pišemo tudi:

$$(a_n)_n = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

n ... indeks

a_n ... n-ti člen zaporedja

Zaporedja

Zaporedje lahko opišemo

- **eksplicitno**: $\mathbf{a_n = f(n)}$, kjer je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ neka preslikava.

  Npr., $a_n = \frac{1}{n}$ za $n \geq 1$.

  Kaj je splošni člen zaporedja:

  $$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots ?$$

- **rekurzivno**:
  - $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_{n+1} = f(a_n)}$, kjer je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neka preslikava, $n \geq 0$ (**enočlena rekurzija**)
    Npr.,

    $$a_{n+1} = 3a_n + 5, \quad a_0 = 1.$$

  - $\mathbf{a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}}$, $\mathbf{a_{n+k} = f(a_n, \ldots, a_{n+k-1})}$, kjer je $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ neka preslikava, $n \geq 0$ (***k*-členа rekurzija**)
    Npr.,

    $$a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1} + 3a_{n-2}, \quad a_0 = 1, \ a_1 = 3, \ a_2 = 4.$$

Primer - rekurzivno zaporedje

V hranilniku imaš en kovanec. Vsak dan naredimo naslednje: v primeru, ko imaš v hranilniku manj kot 10 kovancev, število kovancev v hranilniku podvojimo, v nasprotnem primeru pa moraš ven vzeti 5 kovancev. Zapiši splošni člen zaporedja.

Naj bo b_n število kovancev n-ti dan, pri čemer je začetno stanje 0-ti dan.

Potem je

$$b_n = \begin{cases} 2b_{n-1}, & \text{če je } b_{n-1} < 10, \\ b_{n-1} - 5, & \text{če je } b_{n-1} \geq 10. \end{cases}$$

Nekaj členov:

$$1, 2, 4, 8, 16, 11, 6, 12, 7, 14, \ldots.$$

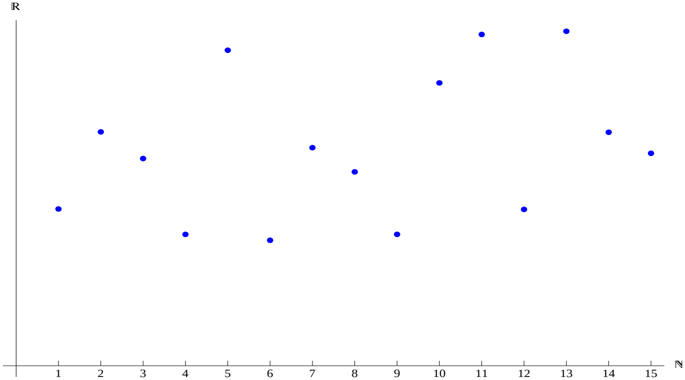
Vprašanje: Koliko kovancev je največ lahko v hranilniku na nek dan?

Primer - rekurzivno zaporedje

Število 13 slovi kot nesrečno število. Vsako število, ki v svojem zapisu vsebuje 13, je tudi tako $(113, 1345, 9813045, \ldots)$. Naj bo t_n število **največ** n-mestnih števil, ki so nesrečna. Zapiši rekurzivno zvezo za t_n.

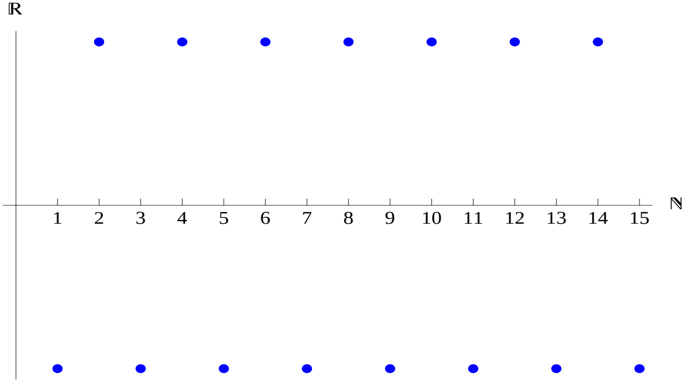
Geometrijski prikaz

- kot točke na številski premici,
- kot točke (n, a_n), $n \in \mathbb{N}$, v ravnini.



Primeri zaporedij

1. $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$



Primeri zaporedij

2. $a_n = \dfrac{n-1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}$

3. **aritmetično zaporedje**
   - eksplicitni opis: $a_n = a + nd,\ a, d \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$.
   - rekurzivni opis: $a_0 = a \in \mathbb{R},\ a_{n+1} = a_n + d,\ d \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$.

4. **geometrijsko zaporedje**
   - eksplicitni opis: $a_n = aq^n,\ a, q \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$.
   - rekurzivni opis: $a_0 = a \in \mathbb{R},\ a_{n+1} = a_n q,\ q \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$.

5. **Fibonaccijevo zaporedje**

$$a_0 = 1, a_1 = 1, \qquad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

6. $a_0 = 3, \quad a_n = \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \dfrac{2}{a_{n-1}}\right)$

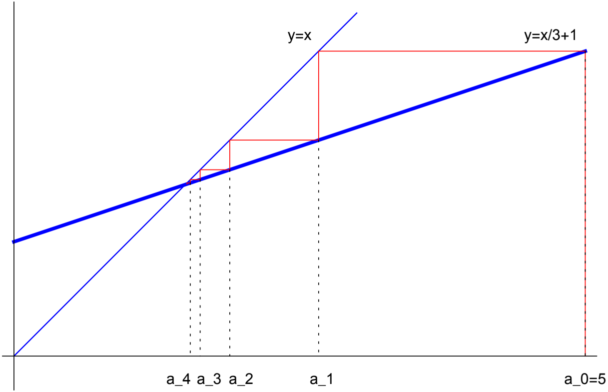
Grafični prikaz rekurzije

$a_0 = a, \quad a_{n+1} = f(a_n)$

- narišemo grafa $y = f(x)$ in $y = x$,
- a_0 nanesemo na x-os,
- $(a_0, f(a_0)) = (a_0, a_1)$ je točka na grafu $(x, f(x))$ pri $x = a_0$
- za vsak n,
  - (a_{n-1}, a_n) je točka na grafu $(x, f(x))$,
  - (a_n, a_n) je točka na isti vodoravno premici na grafu $y = x$,
  - (a_n, a_{n+1}) je točka na isti navpični premici na grafu $y = f(x)$.

Primer

$$a_0 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{3} + 1$$



Lastnosti zaporedij - omejenost

Definicija

Zaporedje $(a_n)_n$ *je* **navzgor omejeno**, *če ima* zgornjo mejo, *to je tako število* $\mathbf{M} \in \mathbb{R}$, *da je* $\mathbf{a_n} \leq \mathbf{M}$ *za vsak* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$.

Če je zaporedje $(a_n)_n$ *navzgor omejeno, potem* **najmanjšo** *izmed zgornjih mej imenujemo* **supremum** *zaporedja* $(a_n)_n$ *in označimo z* $\sup_n a_n$.

Zaporedje $(a_n)_n$ *je* **navzdol omejeno**, *če ima* spodnjo mejo, *to je tako število* $\mathbf{m} \in \mathbb{R}$, *da je* $\mathbf{a_n} \geq \mathbf{m}$ *za vsak* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$.

Če je zaporedje $(a_n)_n$ *navzdol omejeno, potem* **največjo** *izmed spodnjih mej imenujemo* **infimum** *zaporedja* $(a_n)_n$ *in označimo z* $\inf_n a_n$.

Omejeno zaporedje *je navzgor in navzdol omejeno.*

Lastnosti zaporedij - monotonost

Zaporedje je **naraščajoče**, če je $\mathbf{a_n \leq a_{n+1}}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, in je **padajoče**, če je $\mathbf{a_n \geq a_{n+1}}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Primer

Analiziraj omejenost in monotonost zaporedj:

1. $b_n = \dfrac{n^2 - 1}{n}$ *za* $n \geq 1$.
2. $c_n = \dfrac{c_{n-1}}{2}$ *za* $n \geq 1$ *in začetnim členom* $c_0 = 1$.

Limita zaporedja

Število $a \in \mathbb{R}$ je **limita** zaporedja $(\mathbf{a_n})_\mathbf{n}$, kar označimo z

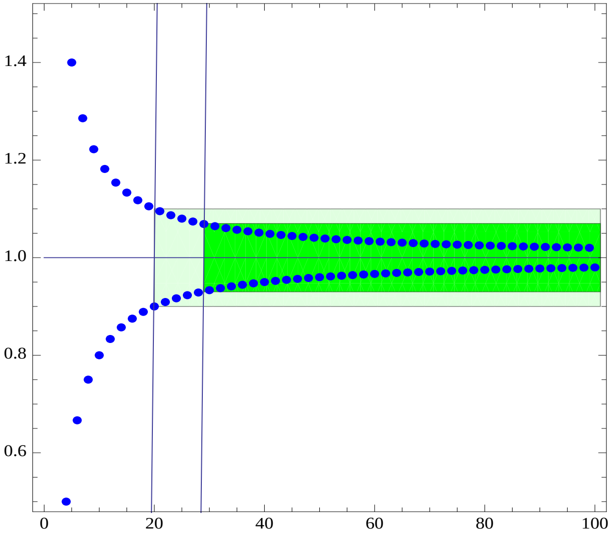
$$\mathbf{a} = \lim_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{a_n},$$

če za vsak $\varepsilon > \mathbf{0}$ obstaja tak indeks $\mathbf{N} \in \mathbb{N}$, da za vsak $\mathbf{n} \geq \mathbf{N}$ velja $|\mathbf{a} - \mathbf{a_n}| < \varepsilon$.

Neformalno: vsi členi od nekje dalje so poljubno blizu limite a.

Število N je odvisno od ε. Pri manjšem ε mora biti N večji.

Limita zaporedja



Limita zaporedja

Zaporedje $(a_n)_n$ je **konvergentno**, če ima limito. Sicer je **divergentno.**

Trditev

Če je zaporedje konvergentno, potem je omejeno.

Kaj to pomeni (s stališča računanja)?

- ε – računska natančnost
- **N** – od tu dalje so vsi členi pri tej natančnosti enaki a

Limita zaporedja - primeri

Primer

Razišči, ali imajo spodnja zaporedja limito:

1. $a_n = (-1)^n$
2. $b_n = 0.\underbrace{333\ldots3}_{n}$
3. $c_n = \frac{1}{n^2}$. *Od katerega člena naprej so členi oddaljeni manj kot* 0.01 *od limite?*
4. *Prejšnjo točko se da posplošiti iz 2 na poljuben* $k > 0$.
5. $d_n = e^{-n}$
6. $f_n = e^n$

Naraščanje ter padanje preko vseh meja

Zaporedje $(a_n)_n$ **narašča prek vsake meje**, če za vsak $\mathbf{M} \in \mathbb{R}$ obstaja indeks $\mathbf{N} \in \mathbb{N}$, da za vsak $\mathbf{n} \geq \mathbf{N}$ velja $\mathbf{a_n} \geq \mathbf{M}$.

Oznaka: $\lim_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{a_n} = \infty$.

Opomba

Tako zaporedje ni konvergentno, saj nima limite!

Zaporedje $(a_n)_n$ **pada prek vsake meje**, če za vsak $\mathbf{M} \in \mathbb{R}$ obstaja indeks $\mathbf{N} \in \mathbb{N}$, da za vsak $\mathbf{n} \geq \mathbf{N}$ velja $\mathbf{a_n} \leq -\mathbf{M}$.

Oznaka: $\displaystyle\lim_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{a_n} = -\infty$.

Opomba

Tako zaporedje ni konvergentno, saj nima limite!