Osnove matematične analize

Četrti sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

29. oktober 2020

Pravila za računanje limit

Naj bo $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ in $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ $\quad (a, b \neq \pm\infty)!$.

- **pravilo vsote**: $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
- **pravilo produkta**: $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$
- **pravilo deljenja**: Če je $b_n \neq 0$ za vsak (dovolj velik) n in $b \neq 0$, je
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Izračunaj naslednje limite:

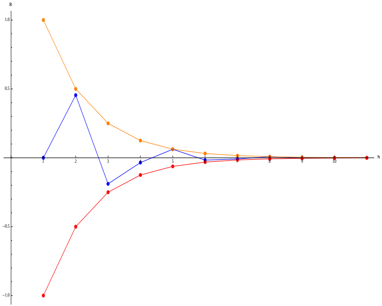
$$\lim_{n\to\infty} \alpha a_n \text{ za poljuben } \alpha \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2}{3n^2+n+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n+6^n}{3^n+6^{n+1}+1}\right)^3.$$

Računanje limit

Izrek (o sendviču)

Če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq b_n \leq c_n$ in $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$, je tudi

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$



Izračunaj naslednje limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(2n)}{2^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n^2}.$$

Pogoji za konvergenco monotonih zaporedij

Izrek (O konvergenci monotonih zaporedij)

- *Naraščajoče zaporedje je konvergentno natanko takrat, kadar je navzgor omejeno.*
- *Padajoče zaporedje je konvergentno natanko takrat, kadar je navzdol omejeno*

Izračunaj limite naslednjih zaporedij

$$
\begin{aligned}
&1.\ a_0 = 0, \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + 6),\\
&2.\ b_0 = 2, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{2}{b_n}\right).
\end{aligned}
$$

Število e kot limita zaporedja

Izkaže se, da je zaporedje

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

konvergentno, njegova limita pa je e.

Dokaz konvergence b_n (neobvezen, za radovedne):

b_n **je naraščajoče:**

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot\cdots\cdot n} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Število e kot limita zaporedja

Dobimo:

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ b_{n+1} &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Primerjava istoležnih koeficientov, tj. pri istih k-jih, pokaže, da je

$$b_n < b_{n+1}.$$

b_n je navzgor omejeno:

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \\ &< 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 3. \end{aligned}$$

Število e kot limita zaporedja

Iz konvergence zaporedja $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se da s pomočjo pravil za računanje limit izpeljati konvergenco zaporedja

$$c_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} c_n &= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) \\
&= e\cdot 1 = e.
\end{aligned}$$

Pri funkcijah bomo videli, da velja celo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Odtod za $k \in \mathbb{Z}$ s substitucijo $x = \frac{n}{k}$ sledi

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \lim_{x\to\operatorname{sign}(k)\cdot\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{xk} = e^k.$$

Definicija potence pri realnem eksponentu

Naj bo $a > 0$ pozitivno število in $r \in \mathbb{R}$ realno število. Radi bi definirali a^r?

- Če je $r \in \mathbb{N}$, potem je $a^r = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{r}$.
- Če je $r \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, potem je $a^r = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdots \frac{1}{a}}_{-r}$.
- Če je $r = \frac{1}{n}$ za $n \in \mathbb{N}$, potem je a^r pozitiven $x > 0$, ki zadošča $x^n = a$. Iz poglavja o korenih enote vemo, da x obstaja in je enoličen. Brez korenov enote, bi dokaz obstoja in enoličnosti zahteval delo.
- Če je $r = \frac{m}{n}$ za $n \in \mathbb{N}$ in $m \in \mathbb{Z}$, potem je a^r enoličen pozitiven $x > 0$, ki zadošča $x^n = a^m$.
- Če je $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, potem izberemo zaporedje $r_n \in \mathbb{Q}$ z $\lim r_n = r$ in definiramo $a^r := \lim a^{r_n}$. Pokazati je treba, da desna limita res obstaja in je neodvisna od izbire zaporedja r_n...delo.

Vrste

Vrsta je simbolična vsota:

$$a_0 + a_1 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Kje bomo pojem vrste potrebovali? Pri definiciji določenega integrala, pri razvoju funkcij v Taylorjevo vrsto (ključno orodje v numerični matematiki, da sploh lahko karkoli izračunamo).

Kako smiselno definirati vsoto? Tako, da seštevamo končno mnogo členov in 'upamo', da se sčasoma rezultat 'ne spreminja več kaj dosti'. Seveda se bo rezultat spreminjal, če bomo prištevali neničelne člene, tako da pojem 'ne spreminja več kaj dosti' nadomestimo z 'se vse bolj približuje neki vrednosti'.

Formalizirajmo zgornji premislek:

m-ta delna vsota vrste je enaka

$$S_m = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Opazimo, da lahko zaporedje delnih vsot tudi rekurzivno definiramo:

$$S_0 = a_0, \qquad S_{m+1} = S_m + a_{m+1}.$$

Vrste

Vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je **konvergentna**, če je konvergentno zaporedje delnih vsot S_m. V tem primeru je njena **vsota** njena enaka limiti zaporedja S_m, tj.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} S_m = S.$$

Vrsti, ki ni konvergentna, pravimo **divergentna**.

Trditev (Potreben pogoj za konvergenco)

Če je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergentna, potem velja* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Obratno pa ne velja!

Analiziraj konvergenco naslednjih vrst:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Geometrijska vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$$

- Konvergenca je odvisna od **kvocienta** q:
  - konvergira, če je $|q| < 1$,
  - divergira, če je $|q| \geq 1$.

- Za $|q| < 1$ je

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}$$

- $\sum_{n=M}^{\infty} a \cdot q^n = aq^M + aq^{M+1} + \cdots + aq^n + \cdots = \frac{aq^M}{1-q}$.

Izračunajmo vsoti $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$ in $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$,

.