Osnove matematične analize

Peti sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

4. november 2020

Pravila za računanje z vrstami

Naj bosta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ **konvergentni**. Potem so tudi vrste $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n$, $c \in \mathbb{R}$, in $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ **konvergentne** in velja:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Dokaz primera $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$:

- Označimo s S_m, S'_m in S''_m m-te delne vsote vrst $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ in $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$.
- Velja $S''_m = S_m + S'_m$.
- Po pravilih za računanje limit velja $\lim_m S''_m = \lim_m S_m + \lim_m S'_m$, kar dokaže $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Vrste - dominirana konvergenca/divergenca

Naj bosta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ vrsti z **nenegativnimi členi** in naj za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq b_n$. (V temu primeru pravimo, da vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dominira vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.)

1. Če je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ **konvergentna**, je **konvergentna** tudi vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
2. Če je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **divergentna**, je **divergentna** tudi vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Dokaz točke (1):

- Označimo s S_m in S'_m m-ti delni vsoti vrst $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.
- Kar so členi a_n nenegativni, je zaporedje $\{S_m\}_m$ naraščajoče.
- Ker je $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergentna, je zaporedje $\{S'_m\}_m$ omejeno.
- Iz pogoja $a_n \leq b_n$ za vsak n sledi $S_m \leq S'_m$ za vsak m. Torej je tudi $\{S_m\}_m$ omejeno.
- Po izreku o monotoni konvergenci zaporedij je zaporedje $\{S_m\}_m$ konvergentno. Po definiciji je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergenta.

Kvocientni kriterij

Izrek

Naj bo $\sum a_n$ *vrsta s pozitivnimi členi. Tvorimo zaporedje* $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

1. *Če obstaja* $q < 1$, *tako da za vsak* n *od nekega* n_0 *naprej velja* $D_n \leq q$, *potem vrsta konvergira.*
2. *Če obstaja* $q \geq 1$, *tako da za vsak* n *od nekega* n_0 *naprej velja* $D_n \geq q$, *potem vrsta divergira.*
3. *Naj* $\lim D_n =: D$ *obstaja. Če je:*
   3.1 $D < 1$, *potem vrsta konvergira.*
   3.2 $D = 1$, *potem ne moremo soditi o konvergenci.*
   3.3 $D > 1$, *potem vrsta divergira.*

Primer

Za katere $x > 0$ *vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ *konvergira?*

Dokaz kvocientnega kriterija

Dokaz točke (1):

- Velja
$$\sum_n a_n = (a_0 + a_1 + \ldots + a_{n_0-1}) + (a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots).$$
Vrsta $\sum_n a_n$ konvergira natanko tedaj, ko konvergira vrsta $a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots$ (končno mnogo členov namreč nima vpliva na obstoj limit zaporedja delnih vsot).
- Ker velja $a_{n+1} = D_n a_n$ za vsak n, s k-kratno uporabo te rekurzijo dobimo $a_{n+k} = D_{n+k-1} D_{n+k-2} \cdots D_n a_n$.
- Ocenimo $a_{n_0+k} \leq q^k a_{n_0}$, saj je $D_n \leq q$ za vsak $n \geq n_0$.
- Torej je vrsta $a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots$ dominirana z vrsto $a_{n_0} + q a_{n_0} + q^2 a_{n_0} + q^3 a_{n_0} + \cdots$, ki je geometrijska vrsta z začetnim členom a_{n_0} in kvocientom $q < 1$. Torej konvergira in po izreku o dominirani konvergenci konvergira tudi $\sum_n a_n$.

Dokaz prvega dela točke (3):

Ker je $\lim_n D_n = D < 1$, obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, ki zadošča $|D_n - D| \leq D + \frac{1-D}{2} = \frac{D+1}{2}$. Za q v točki (1) lahko vzamemo $\frac{D+1}{2} < 1$.

Korenski kriterij

Izrek

Naj bo $\sum a_n$ vrsta z nenegativnimi členi. Tvorimo zaporedje $C_n = \sqrt[n]{a_n}$.

1. *Če obstaja $q < 1$, tako da za vsak n od nekega n_0 naprej velja $C_n \leq q$, potem vrsta konvergira.*
2. *Če za vsak n od nekega n_0 naprej velja $C_n \geq 1$, potem vrsta divergira.*
3. *Naj* $\lim C_n =: C$ *obstaja. Če je:*
   3.1 *$C < 1$, potem vrsta konvergira.*
   3.2 *$C = 1$, potem ne moremo soditi o konvergenci.*
   3.3 *$C > 1$, potem vrsta divergira.*

Primer

Za katere $x > 0$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$ konvergira?

Dokaz korenskega kriterija

Dokaz točke (1):

- Kot v dokazu kvocientnega kriterija zadošča dokazati konvergenco vrste $(a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots)$.
- Ker velja $a_n = C_n^n$ za vsak n in $C_n \leq q$ za vsak $n \geq n_0$, velja $a_n \leq q^n$.
- Torej je vrsta $a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots$ dominirana z vrsto $q^{n_0} + q^{n_0+1} + q^{n_0+2} + q^{n_0+3} + \ldots$, ki je geometrijska vrsta z začetnim členom q^{n_0} in kvocientom $q < 1$. Torej konvergira in po izreku o dominirani konvergenci konvergira tudi $\sum_n a_n$.

Dokaz prvega dela točke (3):

Ker je $\lim_n C_n = C < 1$, obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, ki zadošča $|C_n - C| \leq C + \frac{1-C}{2} = \frac{C+1}{2}$. Za q v točki (1) lahko vzamemo $\frac{C+1}{2} < 1$.

Leibnizov kriterij

Izrek (Leibnizov kriterij)

Če zaporedje a_n pada proti 0 in so vsi členi a_n pozitivni, potem je $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$ konvergentna.

Dokaz:

- Iz rekurzivne zveze $S_{2n} = S_{2n-2} - a_{2n-1} + a_{2n}$ sledi $S_{2n} \leq S_{2n-2}$. (Saj je $a_{2n-1} \geq a_{2n}$.)
- Podobno iz $S_{2n+1} = S_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1}$ sledi $S_{2n+1} \geq S_{2n-1}$. (Saj je $a_{2n} \geq a_{2n+1}$.)
- Torej je zaporedje $\{S_{2n}\}$ padajoče, zaporedje $\{S_{2n+1}\}$ pa naraščajoče.
- Ker velja $S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1}$, je $S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_0$. Torej je zaporedje $\{S_{2n+1}\}$ navzgor omejeno z S_0 in zato po izreku o monotoni konvergenci, konvergentno. Podobno premislimo, da je $\{S_{2n}\}$ navzdol omejeno z S_1 in konvergentno.
- Velja
$$\lim S_{2n} - \lim S_{2n+1} = \lim(S_{2n} - S_{2n+1}) = \lim a_{2n+1} = 0.$$
- Sledi $\lim S_{2n} = \lim S_{2n+1}$ in zaporedje $\{S_n\}_n$ je konvergentno.

Primer

Preveri, da je alternirajoča harmonična vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ *konvergentna.*

Naloga (Izpit 1, 2019/20)

1. *Navedite definicijo supremuma (natančne zgornje meje) zaporedja* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}$.
2. *Navedite izrek o konvergenci monotonih zaporedij.*
3. *Obravnavajte konvergenco naslednjih zaporedij. Odgovore dobro utemeljite. Pri tem se lahko skličete na lastnosti tistih zaporedij in vrst, ki smo jih obravnavali na predavanjih.*
   - $b_0 = 0$, $b_n = b_{n-1} + \frac{1}{n}$ *za* $n \geq 1$.
   - $c_0 = 0$, $c_n = c_{n-1} + (-1)^n \Big(e - \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n\Big)$ *za* $n \geq 1$.

Naloga (Izpit 2, 2019/20)

1. *Napišite definicijo limite zaporedja* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}$.
2. - *Napišite izrek o sendviču za limite zaporedij.*
   - *Naj bosta dani vrsti* $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *in* $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, *kjer je* $a_n = \frac{2}{3^{n+1}}$ *in* $b_n = \frac{1}{2^n}$. *Koliko sta njuni vsoti* A *in* B*?*
   - *Naj bo* $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, *kjer je* $c_n \in \{a_n, b_n\}$. *Npr.,* $c_0 = b_0, c_1 = a_1, c_2 = b_2, c_3 = a_3, \ldots$ *Navzgor in navzdol omejite vsoto vrste* C *s pomočjo* A *in* B. *Odgovor dobro utemeljite.*

Kaj je funkcija ene spremenljivke?

Funkcija je predpis, ki vsakemu elementu x iz **definicijskega območja** $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ priredi natanko določeno število $f(x) \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Če $\mathcal{D}_f$ ni podano, je največja množica, kjer ima predpis f smisel.

- $x \ldots$ neodvisna spremenljivka
- $y = f(x) \ldots$ odvisna spremenljivka
- $f(A) = \{f(x)\,;\, x \in A\} \ldots$ **slika** množice $A \subset \mathcal{D}_f$
- $\mathcal{Z}_f = f(\mathcal{D}_f) \ldots$ **zaloga vrednosti** funkcije f
- $f^{-1}(B) = \{x\,;\, f(x) \in B\} \ldots$ **praslika** množice $B \subset \mathcal{Z}_f$

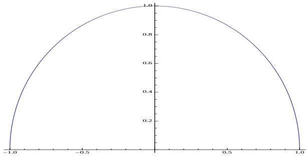
Primera:

- $f(x) = y$, kjer je $y = x^4$, je funkcija. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_f = [0, \infty)$.
- $f(x) = y$, kjer je $y^4 = x$, ni funkcija.

Graf funkcije in podajanje funkcij

Graf funkcije $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ je krivulja v ravnini:

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x))\ ; x \in \mathcal{D}_f\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$



- Graf funkcije seka poljubno navpično premico največ v eni točki.
- Projekcija grafa na os x je $\mathcal{D}_f$, projekcija grafa na os y pa je $\mathcal{Z}_f$.

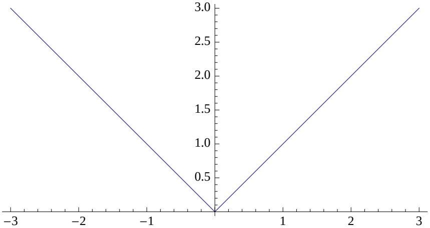
Predpis lahko podamo na več načinov.

- **eksplicitno**: $y = f(x)$, npr. $y = \sqrt{1 - x^2}$
- **implicitno**: $F(x, y) = 0$, npr. $x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad y \geq 0$
- **parametrično**: $x = x(t)$, $y = y(t)$, npr.

$$x = \cos t,\ y = \sin t, \quad t \in [0, \pi]$$

Primera

1. $f(x) = |x|$



$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_f = [0, \infty)$

2. $g(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

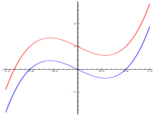
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_f = \{-1, 0, 1\}$

Transformacije funkcij

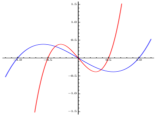
- $g(x) = f(x-a)\dots$ vodoravni premik za $|a|$ v desno ($a > 0$) oz. levo ($a < 0$)
- $g(x) = f(x) + c\dots$ navpični premik za $|c|$ navzgor ($c > 0$) oz. navzdol ($c < 0$)
- $g(x) = f(\frac{x}{a})\dots$ vodoravni razteg ($a > 1$) oz. skrček ($a < 1$) za faktor a
- $g(x) = cf(x)\dots$ navpični razteg ($c > 1$) oz. skrček ($c < 1$) za faktor c
- $g(x) = -f(x)\dots$ zrcaljenje preko osi x
- $g(x) = f(-x)\dots$ zrcaljenje preko osi y

Denimo, da znamo narisati graf funkcije $y = f(x)$.

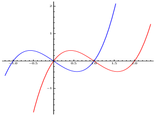
$f(x)+1$



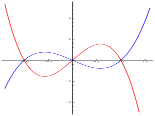
$f(2x)$



$f(x-1)$



$-2f(x)$



Operacije s funkcijami

Naj bosta $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ in $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ funkciji. Na preseku $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ lahko definiramo nove funkcije:

- **vsoto** $f + g$ s predpisom $x \mapsto f(x) + g(x)$,
- **razliko** $f - g$ s predpisom $x \mapsto f(x) - g(x)$,
- **produkt** fg s predpisom $x \mapsto f(x)g(x)$,
- **kvocient** f/g s predpisom $x \mapsto f(x)/g(x)$, če $g(x) \neq 0$.

Če je $Z_f \subseteq \mathcal{D}_g$, potem lahko definiramo funkcijo $g \circ f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

in imenujemo **kompozitum** funkcij g in f.

V splošnem $f \circ g \neq g \circ f$.

Izračunaj kompozituma funkcij

$$f(x) = x^2 + 1, \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}, \qquad g(x) = \log x^2, \quad \mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Lastnosti funkcij

Funkcija $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ je

- **naraščajoča**, če velja $f(x_1) \leq f(x_2)$ za vsaka $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, ki zadoščata $x_1 \leq x_2$.
- **padajoča**, če velja $f(x_1) \geq f(x_2)$ za vsaka $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, ki zadoščata $x_1 \leq x_2$.
- **navzgor omejena**, če obstaja $M \in \mathbb{R}$, ki za vsak $x \in \mathcal{D}_f$ zadošča $f(x) \leq M$. Število M pravimo **zgornja meja** funkcije f na $\mathcal{D}_f$.
- **navzdol omejena**, če obstaja $m \in \mathbb{R}$, ki za vsak $x \in \mathcal{D}_f$ zadošča $m \leq f(x)$. Številu m pravimo **spodnja meja** funkcije f na $[a, b]$.
- **omejena** na $\mathcal{D}_f$, če je na $\mathcal{D}_f$ nazvdol in navzgor omejena.
- **soda**, če je $f(-x) = f(x)$ za vsak $x \in \mathcal{D}_f$
- **liha**, če je $f(-x) = -f(x)$ za vsak $x \in \mathcal{D}_f$.
- **injektivna**, če različni točki $x \neq y \in \mathcal{D}_f$ preslika v različni vrednosti $f(x) \neq f(y) \in \mathcal{Z}_f$.
- **surjektivna**, če je $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$.
- **bijektivna**, če je injektivna in surjektivna.

Primeri

- Določi, kje sta funkciji $f(x) = x^3$ in $g(x) = x^4$ naraščajoči oz. padajoči.
- Določi, kateri od funkcij $f(x) = \cos x$ in $g(x) = e^x$ sta omejeni.
- Preveri:
  - $f(x) = |x|$, $g(x) = x^{2k}$ za $k \in \mathbb{Z}$, $h(x) = \cos x$ so sode.
  - $f(x) = \operatorname{sign}(x)$, $g(x) = x^{2k+1}$ za $k \in \mathbb{Z}$, $h(x) = \sin x$ so lihe.
  - $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = x^2 + 2x + 1$ niso ne sode in ne lihe.
- Premisli:
  - Graf sode funkcije je simetričen glede na os y, graf lihe pa glede na koordinatno izhodišče.
  - Vsota sodih funkcij je soda funkcija, vsota lihih je liha funkcija.
  - Produkt dveh sodih ali dveh lihih funkcij je soda funkcija, produkt lihe in sode funkcije je liha funkcija.
  - Graf injektivne funkcije seka poljubno vodoravno premico v največ eni točki.
  - Vsaka vodoravna premica seka graf surjektivne funkcije v vsaj eni točki.

Inverzna funkcija

Naj bo $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ **injektivna** funkcija. Potem funkcijo $f^{-1} : \mathcal{Z}_f \to \mathcal{D}_f$, za katero velja

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

za vsak $x \in \mathcal{D}_f$, imenujemo **inverzna funkcija** funkcije f.

- Ekvivalentno: $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$.
- Definicijsko območje in zaloga vrednosti se zamenjata: $D_{f^{-1}} = Z_f, \quad Z_{f^{-1}} = D_f$.
- Inverzno funkcijo f^{-1} eksplicitno podane funkcije f izračunamo tako, da zamenjamo vlogi spremenljivk $y = f(x)$, torej $x = f(y)$, in nato izrazimo y kot funkcijo x.
- Graf inverzne funkcije f^{-1} dobimo tako, da prezrcalimo graf funkcije f prek simetrale lihih kvadrantov.

Inverzna funkcija

Primer

Naj bo dana funkcija

$$f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}.$$

Določi $\mathcal{D}_f, \mathcal{Z}_f$, f^{-1} *(če obstaja)*, $\mathcal{D}_{f^{-1}}$, $\mathcal{Z}_{f^{-1}}$.