Osnove matematične analize

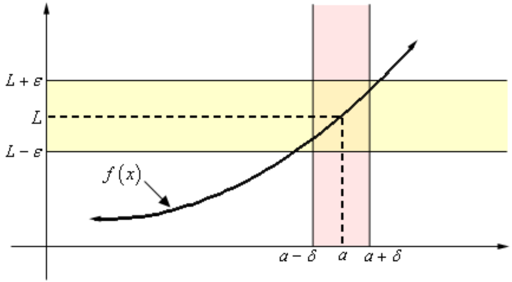
Šesti sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

11. november 2020

Limita funkcije

Zanima nas, kako se funkcija f obnaša v okolici točke a, torej na intervalu $(a-\delta, a+\delta)$ za nek $\delta > 0$, razen morda v točki a.



Število L je **limita** funkcije f v točki a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - L| < \varepsilon$, če je $0 < |x - a| < \delta$.
Pišemo: $L = \lim_{x \to a} f(x)$.

Neformalno: L je limita funkcije f v točki a: vrednost $f(x)$ je poljubno blizu L, če je le x dovolj blizu a (a ne enak a).

Limita funkcije f v točki a ni odvisna od vrednosti funkcije f v točki a.

Leva in desna limita

Število L je **leva limita** funkcije f v točki a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - L| < \varepsilon$, če je $a - \delta < x < a$. Označimo:

$$L = \lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

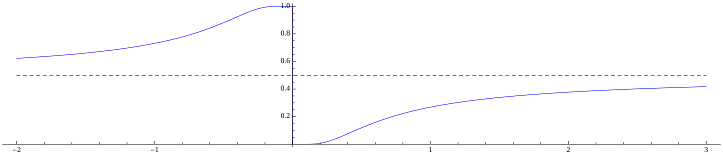
Število L je **desna limita** funkcije f v točki a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - L| < \varepsilon$, če je $a < x < a + \delta$. Označimo:

$$L = \lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Funkcija f ima v točki a limito natanko tedaj, ko ima v točki a tako levo kot desno limito in sta ti dve limiti enaki.

Zgledi

Ali ima funkcija $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$



v točki $a = 0$ levo limito, desno limito oz. limito?

Ali obstajajo limite naslednjih funkcij v točki $a = 0$:

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$
3. $f(x) = \frac{x^2+x}{x}$

Neskončna limita

Če za vsako število $M \in \mathbb{R}$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x) > M$, če le $a - \delta < x < a$, potem pišemo $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = \infty$.

Podobno definiramo simbol $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = -\infty$, če za vsako število $m \in \mathbb{R}$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x) < m$, če le $a - \delta < x < a$.

Če za vsako število $M \in \mathbb{R}$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x) > M$, če le $a < x < a + \delta$, potem pišemo $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \infty$.

Podobno definiramo simbol $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = -\infty$, če za vsako število $m \in \mathbb{R}$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x) < m$, če le $a < x < a + \delta$.

Limita v neskončnosti

Oznaka $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ pomeni, da je število L limita funkcije f, ko gre x čez vse meje, torej da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tako število M, da je $|f(x) - L| < \varepsilon$ za vsak $x > M$.

Podobno definiramo s simbolom $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tako število m, da je $|f(x) - L| < \varepsilon$ za vsak $x < m$.

Karakterizacija limit funkcij prek zaporedij

Trditev

Funkcija f ima v točki a limito L natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $(a_n)_n$, ki konvergira proti a (ter ne vsebuje a) velja $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = L$.

Dokaz implikacije ($\Rightarrow$) (Neobvezen, za radovedne). Predpostavimo, da ima f v točki $x = a$ limito L, tj.

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \text{Iz pogoja } |x-a| < \delta, \text{ sledi } |f(x) - L| < \epsilon. \tag{1}$$

Izberimo poljubno zaporedje $(a_n)_n$, $a_n \neq a$, z $\lim a_n = a$. Dokazati moramo $\lim f(a_n) = L$ oz. po definiciji limite zaporedja

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \text{Iz pogoja } n \geq n_0, \text{ sledi } |f(x_n) - L| < \epsilon. \tag{2}$$

Ker je $\lim a_n = a$, po definiciji limite velja

$$\forall \delta > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N} : \text{Iz pogoja } n \geq n_1, \text{ sledi } |a_n - a| < \delta. \tag{3}$$

Izberimo sedaj $\epsilon > 0$. Po (1) obstaja $\delta > 0$, da $|x-a| < \delta$ implicira $|f(x) - L| < \epsilon$. Po (3) obstaja $n_1 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq n_1$ velja $|a_n - a| < \delta$. Združimo zadnji dve ugotovitvi in sklepamo, da za poljuben $\epsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$ (npr. n_1 iz (3)), tako da za vsak $n \geq n_0$ velja $|f(a_n) - L| < \epsilon$, kar je (2).

Karakterizacija limit funkcij prek zaporedij

Dokaz implikacije ($\Leftarrow$) (Neobvezen, za radovedne). Predpostavimo, da za vsako zaporedje $(a_n)_n$, $a_n \neq a$, z $\lim a_n = a$, velja $\lim f(a_n) = L$. Dokazujemo, da ima f v točki $x = a$ limito L, tj.

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \text{Iz pogoja } |x - a| < \delta, \text{ sledi } |f(x) - L| < \epsilon. \tag{4}$$

Pa predpostavimo nasprotno. Torej obstaja $\epsilon > 0$, tako da zanj ne obstaja δ, pri katerem bi $|x - a| < \delta$ impliciralo $|f(x) - L| < \epsilon$. Posebej to velja za vsak $\delta_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Torej obstaja zaporedje $(a_n)_n$ z $|a_n - a| < \delta_n$ in $|f(a_n) - L| \geq \epsilon$. Sledi $\lim a_n = a$ in $\lim f(a_n) \neq L$. To pa je v protislovju s predpostavko.

Pravila za računanje limit

Za računanje limit veljajo enaka pravila kot pri zaporedjih.

Trditev

Naj bo $\lim_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ *in* $\lim_{x \to a} g(x) = K \in \mathbb{R}$. *Potem je*

- $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + K.$

  Dokaz. Po karakterizaciji limit funkcij prek zaporedij moramo za poljubno zaporedje $(a_n)_n$ *z* $\lim a_n = a$ *preveriti* $\lim(f(a_n) + g(a_n)) = L + K$. *Po pravilih za računanje limit zaporedij pa res velja:*

  $$\lim(f(a_n) + g(a_n)) = \lim f(a_n) + \lim g(a_n) = L + K.$$

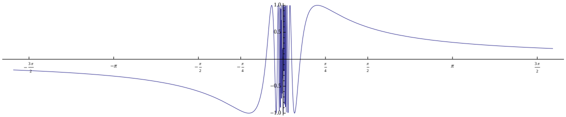
- $\lim_{x \to a} (\alpha f(x)) = \alpha L$ *za vsak* $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{x \to a} f(x) g(x) = LK.$
- *če je* $K \neq 0$, *je* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$.

Primeri

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$
   Za vsak $x \in (0,1)$ obstaja $n \in \mathbb{N}$, tako da je
   $$\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \quad \text{oz.} \quad n \leq \frac{1}{x} < n+1.$$
   Sledi
   $$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$
   Velja
   $$\begin{aligned}\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} &= \lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \\ &= \lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e\cdot 1 = e.\end{aligned}$$
   Podobno
   $$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$
   Po izreku o sedviču za zaporedja sledi $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

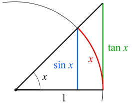
Primeri

2. $\lim\limits_{x\to\frac{2}{\pi}} \sin\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x}$



3. $f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sign}(x)$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.



Za $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ velja $\sin x \le x \le \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Torej je $\frac{\sin x}{x} \le 1$ in $\cos x \le \frac{\sin x}{x}$ oz. $\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$. Sledi

$$1 = \lim_{x\to 0^+} \cos x \le \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \le \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$

Torej je $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Ker je $\frac{\sin -x}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, tudi $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Zveznost funkcije

Funkcija f je **zvezna** v točki a natanko tedaj, ko je

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Z drugimi besedami: funkcija f je zvezna v točki a, ko ima v tej točki limito L, ki je enaka $f(a)$. V $\epsilon - \delta$ notaciji lahko zveznost funkcije f definiramo kot:

Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ je v točki $a \in \mathcal{D}$ zvezna natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

če je $|x - a| < \delta$.

Določimo takšen a, da bo spodnja funkcija povsod zvezna:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & x < 1, \\ ax + 3, & x \geq 1. \end{cases}$$

Lastnosti zveznosti

Izrek

Naj bosta $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ *in* $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ *funkciji, ki sta zvezni v točki* $a \in \mathcal{D}_f \cap D_g$.

1. *Potem so tudi funkcije* $f + g,\ f - g,\ fg$ *zvezne v* a.

   Dokaz zveznosti $f + g$. *Po pravilih za računanje limit vemo, da je* $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$. *Ker sta* f *in* g *zvezni v* $x = a$, *sledi* $\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a)$.

2. *Če je še* $g(a) \neq 0$, *potem je* f/g *definirana na neki okolici točke* a *in zvezna v točki* a.
3. *Naj bo* $\mathcal{Z}_f \subseteq \mathcal{D}_g$. *Če je funkcija* f *zvezna v točki* a, g *pa ima v točki* $f(a)$ *limito* L, *je*

   $$\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = L.$$

   Posebej, če je g *zvezna v točki* $f(a)$, *potem je* $g \circ f$ *zvezen v točki* a.

Lastnosti zveznosti

Dokaz (3). Naj bo $(a_n)_n$, $a_n \neq a$, zaporedje z $\lim a_n = a$. Velja $\lim_n (g \circ f)(a_n) = \lim_n g(f(a_n))$. Ker je $\lim f(a_n) = f(a)$, in $\lim g(b_n) = L$ za vsako zaporedje $(b_n)_n$ z $\lim b_n = f(a)$, sledi $\lim_n g(f(a_n)) = L$.

- Vse elementarne funkcije so zvezne povsod, kjer so definirane.
- Če je podatek a podan dovolj natančno (z napako manjšo od δ), bo vrednost $f(a)$ izračunana z napako manjšo od ε.
- Graf zvezne funkcije bo v točki $(a, f(a))$ "nepretrgana krivulja".
- Če vrednost $f(a)$ ni definirana, vendar obstaja $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, lahko funkcijo f razširimo, tako da definiramo $f(a) := L$. Tako razširjena funkcija je zvezna v točki a.
- Zamenjamo lahko vrstni red računanja limite in vrednosti zvezne funkcije.

Izračunajmo $\lim\limits_{x \to 0} \sin(3x^2 + \pi)$.

Ničle zveznih funkcij

Izrek

Če je f zvezna na zaprtem omejenem intervalu $[a, b]$ in je $f(a)f(b) < 0$, tj. f v krajiščih intervala sta predznaka različna, potem obstaja točka $c \in (a, b)$, kjer je $f(c) = 0$.

Dokaz z **bisekcijo**: Definiramo tri zaporedja, a_n, b_n in c_n:

- $a_0 = a$, $b_0 = b$.
- za $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$c_n = (a_n + b_n)/2 \ldots \quad \text{to je razpolovišče intervala } [a_n, b_n],$$

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, c_n], & \text{če je } f(a_n)f(c_n) < 0, \\ [c_n, b_n], & \text{če je } f(c_n)f(b_n) < 0. \end{cases}$$

Če za kakšen c_n velja $f(c_n) = 0$, je $c = c_n$. Sicer pa zaporedja a_n, b_n in c_n vsa konvergirajo k istemu številu c, saj je $a_n \leq c_n \leq b_n$, $(a_n)_n$ je naraščajoče, $(b_n)_n$ padajoče in $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$.

Omejenost zveznih funkcij

Izrek

Naj bo f zvezna funkcija na zaprtem intervalu $[a, b]$. Potem:

- *f je omejena na $[a, b]$, tj. obstajata*

$$M = \sup\{f(x)\ ;\ x \in [a, b]\}, \quad m = \inf\{f(x)\ ;\ x \in [a, b]\}.$$

- *Obstajata $x_m, x_M \in [a, b]$, kjer je*

$$f(x_m) = m \quad \text{in} \quad f(x_M) = M.$$

- *Za vsako vrednost y med m in M, $m \leq y \leq M$, obstaja točka $x_y \in [a, b]$, kjer je $f(x_y) = y$, tj. enačba $f(x) = y$ ima rešitev na intervalu $[a, b]$.*

Drugače povedano, zvezna funkcija f preslika omejen zaprt interval $[a, b]$ v omejen zaprt interval:

$$f([a, b]) = [m, M].$$