1. Spodnje sisteme linearnih enačb zapiši v obliki $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ in jih reši z uporabo Gaussove eliminacije.

   (a) $$\begin{aligned} x + y + 2z &= 3 \\ 2x - y + 4z &= 0 \\ 3x - y + z &= 1 \end{aligned}$$

   (b) $$\begin{aligned} t + u + 2v + w &= 3 \\ 2t + 2u + 4v + 3w &= 5 \\ 2t + 2v + w &= 1 \\ u + v + w &= 1 \end{aligned}$$

   (c) $$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

2. Graf polinoma tretje stopnje $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ gre skozi točke $A(-2,-1)$, $B(-1,0)$, $C(1,2)$ in $D(2,-9)$. Poišči ta polinom!

3. Določi polmer in središče krožnice, ki gre skozi točke $A(-1,1)$, $B(0,2)$ in $C(6,-6)$.

4. Naj bosta A in B matriki
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

   (a) Poišči inverz matrike A.

   (b) Poišči matriko X, da bo $AX = B$.

   Rešitev: (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

5. Dani so matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 1 & -9 \\ -2 & 3 & 7 & 0 & -5 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ in vektorja } \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ ter } \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

   Poišči vse rešitve sistemov $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ ter $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$.

   Rešitev: Rešitve sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ so vektorji $\mathbf{x} = [2x_5 - x_3, 3x_5 - 3x_3, x_3, x_5 - 1, x_5]^\mathsf{T}$, kjer sta x_3 in x_5 poljubni realni števili. Sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ nima rešitev.

6. Poišči matriko X, da bo veljalo
$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

   Rešitev: $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

7. Z uporabo Gauss–Jordanove eliminacije izračunaj inverza matrik

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ter} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 4 & 0 \\ -8 & 8 & -8 & -8 \end{bmatrix},$$

če seveda obstajata. Preveri pravilnost.

Rešitev: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & -1 \\ 7 & -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, matrika B nima inverza.

8. Naj bodo A, B in C matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 9 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Poišči matrike X, Y in Z, da bo veljalo

$$AX = C \,, \quad YB = C \quad \text{in} \quad AZB = C.$$

Rešitev: $X = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$, $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.