Osnove matematične analize

Deseti sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

12. december 2020

Uporaba odvoda funkcij dveh spremenljivk

1. Linearna aproksimacija funkcije dveh spremenljivk:

   Naj bo funkcija $f(x, y)$ v okolici točke (x_0, y_0) parcialno odvedljiva po x in y in naj bosta $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ zvezni funkciji v (x_0, y_0).

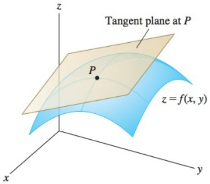
   Linearno funkcijo dveh spremenljivk

   $$\boxed{L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

   imenujemo **linearna aproksimacija** funkcije $f(x, y)$ v točki (x_0, y_0). Členu

   $$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

   pravimo **totalni diferencial** funkcije f v točki (x_0, y_0) in ga označimo z $df(x_0, y_0)$.



Iz izpeljave verižnega pravila se spomnimo izreka, da je funkcija f, za katero obstaja okolica točke (x_0, y_0), v kateri sta oba parcialna odvoda $f_x(x, y)$ in $f_y(x, y)$ zvezni funkciji, diferenciabilna v (x_0, y_0). To pa pomeni, da je pri majhnih spremembah $x - x_0$ in $y - y_0$ totalni diferencial približno enak spremembi funkcijske vrednosti:

$$df(x_0, y_0) \doteq \Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

in vrednost linearne aproksimacije je približno enaka vrednosti f

$$f(x, y) \doteq L(x, y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0).$$

Primer. Izračunajmo približno vrednost $\sqrt{1,01^2 + 2,02^3}$.

Definiramo funkcijo $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$. Zanima nas $f(1.01, 2.02)$. Izračunajmo še $f_x(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^3}} \cdot 2x$ in $f_y(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^3}} \cdot 3y^2$. Velja $f(1, 2) = 3$, $f_x(1, 2) = \frac{1}{3}$, $f_y(1, 2) = 2$. Sledi:

$$\begin{aligned} f(1.01, 2.02) &\doteq f(1, 2) + f_x(1, 2)(1.01 - 1) + f_y(1, 2)(2.02 - 2) \\ &= 3 + \frac{1}{3} \cdot 0.01 + 2 \cdot 0.02 = 3.0433 \cdots . \end{aligned}$$

2. analiza naraščanja in padanja funkcij v izbrani smeri,

   Funkcija f pri premikanju iz točke (x_0, y_0) v smeri vektorja $\vec{e} = (e_1, e_2)$ narašča (oz. strogo narašča), če je $f_{\vec{e}}(x_0, y_0) \geq 0$ (oz. $f_{\vec{e}}(x_0, y_0) > 0$).
   Funkcija f pri premikanju iz točke (x_0, y_0) v smeri vektorja $\vec{e} = (e_1, e_2)$ pada (oz. strogo pada), če je $f_{\vec{e}}(x_0, y_0) \leq 0$ (oz. $f_{\vec{e}}(x_0, y_0) < 0$).

3. Stacionarne točke in ekstremi funkcije več spremenljivk

   Naj bo $f(x_1, \ldots, x_n)$ parcialno odvedljiva funkcija n spremenljivk. Točka $a \in \mathbb{R}^n$ je **stacionarna** ali **kritična točka** funkcije $f(x_1, \ldots, x_n)$, če so vsi parcialni odvodi v točki a enaki 0, tj.

$$f_{x_1}(a) = 0, \quad f_{x_2}(a) = 0, \quad \ldots, \quad f_{x_n}(a) = 0.$$

   V stacionarni točki

   - je gradient funkcije enak ničelnemu vektorju,
   - so vsi smerni odvodi enaki 0,
   - je totalni diferencial enak 0,

Primer. Za $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$ velja $f_x(x,y) = 2x - 2$ in $f_y(x,y) = 2y - 6$, zato je edina stacionarna točka $(1,3)$. Nivojnica skozi $(1,3)$ je množica

$$\begin{aligned}
&\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon f(x,y) = f(1,3) = 4\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14 = 4\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 0\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x-1)^2 + (y-3)^2 = 0\} \\
&= \{(1,3)\}.
\end{aligned}$$

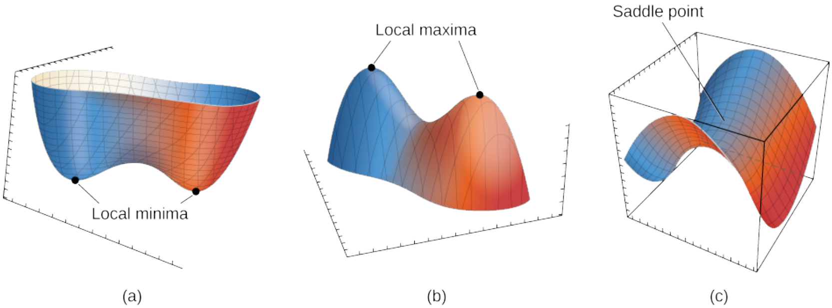
Primer. Za $f(x,y) = x^2 - y^2$ velja $f_x(x,y) = 2x$ in $f_y(x,y) = -2y$, zato je edina stacionarna točka $(0,0)$. Nivojnica skozi $(0,0)$ je množica

$$\begin{aligned}
&\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon f(x,y) = f(0,0) = 0\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 = y^2\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = -y \text{ ali } x = -y\}.
\end{aligned}$$

Funkcija f ima v točki T **lokalni maksimum**, če obstaja tak $\delta > 0$, da je funkcijska vrednost v vseh točkah, ki so od T oddaljene za manj kot δ, manjša ali enaka vrednosti v točki T.

Funkcija f ima v točki T **lokalni minimum**, če obstaja tak $\delta > 0$, da je funkcijska vrednost v vseh točkah, ki so od T oddaljene za manj kot δ, večja ali enaka vrednosti v točki T.

Lokalni ekstrem funkcije so lokalni minimumu in lokalni maksimumi.



Potreben pogoj za lokalni ekstrem funkcije več spremenljivk: Če je funkcija f v točki $a \in \mathbb{R}^n$ parcialno odvedljiva in ima v tej točki lokalni ekstrem, potem je a stacionarna točka funkcije f.

- **Parcialni odvodi 2. reda** funkcije f v točki (x_0, y_0):

$$f_{xx}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad f_{xy}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0),$$

$$f_{yx}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad f_{yy}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

- Matriko

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

imenujemo **Hessejeva matrika** funkcije f v točki (x_0, y_0).

- Če sta f_{xy} in f_{yx} zvezni funkciji v (x_0, y_0), potem je

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Torej je H_f simetrična.

- Funkcija n spremenljivk ima n^2 parcialnih odvodov 2. reda, njena Hesssejeva matrika je simetrična matrika reda $n \times n$.

Trditev o klasifikaciji stacionarnih točk: Naj bo (x_0, y_0) stacionarna točka vsaj dvakrat parcialno zvezno odvedljive funkcije f.
Naj bo

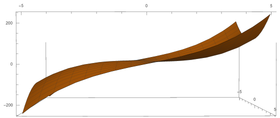
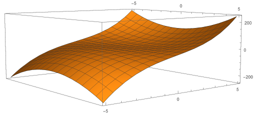
$$D(x_0, y_0) := f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2.$$

$D(x_0, y_0)$ imenujemo tudi **determinanta** matrike $H_f(x_0, y_0)$. Velja:

- Če je $D(x_0, y_0) > 0$, je v točki (x_0, y_0)
  - lokalni minimum, če je $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ in
  - lokalni maksimum, če je $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$.
- Če je $D(x_0, y_0) < 0$, v točki (x_0, y_0) ni ekstrema, imamo sedlo.
- Če je $D(x_0, y_0) = 0$, pa samo iz drugih parcialnih odvodov ne moremo o lokalnih ekstremih v (x_0, y_0) ničesar sklepati.

Primer. Določimo in klasificirajmo lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = x^2y + y^3 - y.$$

Velja $f_x(x,y) = 2xy$ in $f_y(x,y) = x^2 + 3y^2 - 1$. Stacionarne točke so tako

$$(0, \sqrt{\frac{1}{3}}), \quad (0, -\sqrt{\frac{1}{3}}), \quad (1,0) \quad \text{in} \quad (-1,0).$$

Velja še $f_{xx}(x,y) = 2y$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2x$, $f_{yy}(x,y) = 6y$. Sledi

$$H_f(0, \sqrt{\frac{1}{3}}) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & 6\sqrt{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}, \quad H_f(0, -\sqrt{\frac{1}{3}}) = \begin{bmatrix} -2\sqrt{\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & -6\sqrt{\frac{1}{3}} \end{bmatrix},$$

$$H_f(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad H_f(-1,0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Sledi

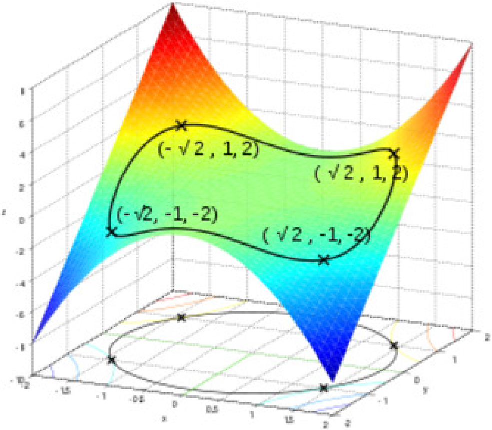
$$D(0, \sqrt{\frac{1}{3}}) = 4, \quad D(0, -\sqrt{\frac{1}{3}}) = 4, \quad D(1,0) = -4 \quad \text{in} \quad D(-1,0) = -4.$$

Točka $\left(0, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ je lokalni minimum, $\left(0, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ lokalni maksimum, točki $(1,0)$ in $(-1,0)$ pa sta sedli.

4. Vezani ekstremi

Vezani ekstremi funkcije f pri pogoju $g(x, y) = 0$ so

- največje in najmanjše vrednosti $f(x, y)$ med točkami, ki zadoščajo pogoju $g(x, y) = 0$,
- lokalni ekstremi funkcije f nad krivuljo, podano z enačbo $g(x, y) = 0$.



Potreben pogoj za lokalni ekstrem (x_0, y_0) funkcije $f(x, y)$ nad krivuljo $g(x, y) = 0$:

$$\exists\lambda \in \mathbb{R}: \ \mathrm{grad}\ f(x_0, y_0) = \lambda\ \mathrm{grad}\ g(x_0, y_0). \tag{1}$$

Dokaz. (Neobvezen, za radovedne.)

- Naj bo (x_0, y_0) lokalni ekstrem $f(x, y)$ nad $g(x, y) = 0$.
- Parametriziramo košček krivulje, določene s pogojem $g(x, y) = 0$, ki se začne v točki (x_0, y_0), s potjo $I(t) := (x(t), y(t))$, kjer je $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ in velja $I(0) = (x_0, y_0)$.
- Tvorimo funkcijo $h(t) := f(x(t), y(t))$. Ker je v $t = 0$ lokalni ekstrem f nad potjo $I(t)$, velja

$$\begin{aligned} 0 = h'(0) &= f_x(x(0), y(0))x'(0) + f_y(x(0), y(0))y'(0) \\ &= \mathrm{grad}\ f(x_0, y_0) \cdot (x'(0), y'(0)). \end{aligned}$$

- Torej je $\mathrm{grad}\ f(x_0, y_0)$ pravokoten na tangento $(x'(0), y'(0))$ na pot $I(t)$ v točki $t = 0$.
- Ker je pot $I(t)$ del nivojnice funkcije g za vrednosti 0, je tangenta $(x'(0), y'(0))$ pravokotna tudi na $\mathrm{grad}\ g(x(0), y(0)) = \mathrm{grad}\ g(x_0, y_0)$.
- To pa pomeni, da sta $\mathrm{grad}\ f(x_0, y_0)$ in $\mathrm{grad}\ g(x_0, y_0)$ vzporedna vektorja in velja (1).

- Na drug način lahko pogoj za obstoj vezanega ekstrema povemo tako, da tvorimo **Lagrangeovo funkcijo**

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y),$$

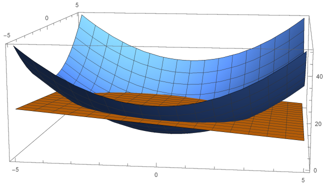
  izračunamo njene stacionarne točke in med njimi študiramo, katere so lokalni ekstremi.

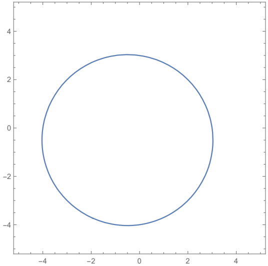
- Stacionarne točke (x_0, y_0, λ_0) funkcije L pa zadoščajo sistemu

$$\begin{aligned} L_x(x_0, y_0, \lambda_0) &= f_x(x_0, y_0) - \lambda_0 g_x(x_0, y_0) = 0 \\ L_y(x_0, y_0, \lambda_0) &= f_y(x_0, y_0) - \lambda_0 g_y(x_0, y_0) = 0 \\ L_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) &= -g(x_0, y_0) = 0. \end{aligned}$$

TODA: Projekcija vsake stacionarne točke (x_0, y_0, λ_0) funkcije L na prvi dve koordinati (x_0, y_0) ni nujno lokalni ekstrem funkcije f.

Primer. Poiščimo najvišjo in najnižjo točko na krivulji, kjer se sekata ravnina $x+y+z=12$ in paraboloid $x^2+y^2=z$.





- Izrazimo z iz enačbe ravnine: $z=12-x-y$. Iščemo lokalne ekstreme funkcije $f(x,y)=12-x-y$ na krivulji, ki je presek ravnine in paraboloida.
- Projekcija krivulje v preseku na xy-os bo naš pogoj $g(x,y)=0$. Projekcijo dobimo tako, da se znebimo koordinate z. V primeru naloge to naredimo tako, da iz obeh enačb izrazimo z in enačimo obe izražavi:

$$\begin{aligned} z = 12-x-y = x^2+y^2 &\Rightarrow \ x^2+x+y^2+y-12=0 \\ &\Rightarrow \ g(x,y)=x^2+x+y^2+y-12. \end{aligned}$$

Opomba.

$$0 = g(x,y) = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{2} \Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

je krožnica s središčem v točki $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ in polmerom $\sqrt{\frac{25}{2}}$.

- Tvorimo Lagrangeovo funkcijo
$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = 12 - x - y - \lambda(x^2 + x + y^2 + y - 12).$$
- Dobimo Lagrangeov sistem
$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= -1 - \lambda(2x+1) = 0, \\ L_y(x,y,\lambda) &= -1 - \lambda(2y+1) = 0, \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= -(x^2 + x + y^2 + x - 12) = 0, \end{aligned}$$
- Iz $L_x(x,y,\lambda)$ in $L_y(x,y,\lambda)$ izrazimo λ in dobimo (če $x \neq -\frac{1}{2}$ in $y \neq -\frac{1}{2}$)
$$\lambda = -\frac{1}{2x+1} = -\frac{1}{2y+1} \Rightarrow 2x+1 = 2y+1 \Rightarrow x = y. \qquad (2)$$
Primera $x = -\frac{1}{2}$ ali $y = -\frac{1}{2}$ moramo obravnavati posebej:
  - Če je $x = -\frac{1}{2}$, potem iz $L_x(-\frac{1}{2}, y, \lambda)$ dobimo $-1 = 0$, kar je protislovje.
  - Če je $y = -\frac{1}{2}$, potem iz $L_y(x, -\frac{1}{2}, \lambda)$ dobimo $-1 = 0$, kar je protislovje.

- Vstavimo dobljen pogoj (2) v $L_y(x, y, \lambda)$ in dobimo

$$2x^2 + 2x - 12 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + x - 6 = 0 \;\Rightarrow\; (x+3)(x-2) = 0$$
$$\Rightarrow\; x_1 = -3,\; x_2 = 2.$$

  Torej sta stacionarni točki $(-3, -3)$ in $(2, 2)$.

- Izračunamo $f(-3, -3) = 18$ in $f(2, 2) = 8$. Torej je točka $(-3, -3)$ lokalni maksimum, $(2, 2)$ pa lokalni minimum.

Opomba. Ker je krivulja, nad katero iščemo ekstrem, omejena (tj. vsebovana v nekem krogu z dovolj velikim radijem) in vsebuje svoj rob (tj. 'krivulja ni prekinjena'), vsaj en globalni minimum in vsaj en globalni maksimum obstajata. Ker sta dobljeni točki edina kandidata, sta to kar globalni minimum in maksimum.

5. Natančnejša aproksimacija funkcije - Taylorjevi polinomi

Če druge parcialne odvode še naprej odvajamo, dobimo **parcialne odvode višjih redov**.

Trditev. Če so višji parcialni odvodi zvezni, so neodvisni od vrstnega reda odvajanja.

Parcialni odvodi 3. reda funkcije $f(x, y)$ v točki (a, b):

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a, b)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(a, b) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(a, b) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a, b)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(a, b) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a, b)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a, b)$$

Primer. Izračunajmo vse parcialne odvode vseh redov funkcije

$$f(x,y) = 1 - 2x^2y + xy^2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -4xy + y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x^2 + 2xy,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -4y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4x + 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x, \quad .$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y) = -4, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = 0. \quad .$$

Vsi odvodi redov od 4 naprej pa bodo enaki 0.

Taylorjev polinom funkcije dveh spremenljivk

$f(x, y)$ naj bo vsaj trikrat parcialno odvedljiva v točki (x_0, y_0).

Taylorjev polinom prve stopnje okrog točke (x_0, y_0)

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

je enak linearni aproksimaciji $L(x, y)$ okrog točke (x_0, y_0).

Taylorjev polinom druge stopnje okrog točke (x_0, y_0):

$$T_2(x, y) = f(x_0, y_0) + (f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)+$$

$$+\frac{1}{2}(f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2)$$