GRAFI

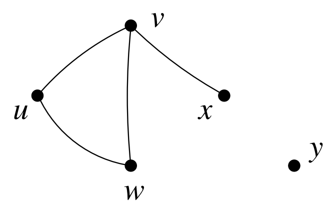
Graf je urejen par $G = (V, E)$, kjer je

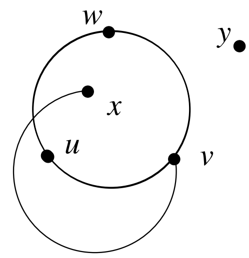
- V neprazna končna množica točk grafa G in
- E množica povezav grafa G, pri čemer je vsaka povezava *par* točk (povezava je množica dveh različnih točk)

Zgled: $V = \{u, v, w, x, y\}$ $\quad$ $E = \{\{u, v\}, \{u, w\}, \{v, w\}, \{v, x\}\}$

Namesto $e = \{u, v\}$ pišemo krajše $e = uv$ ali $e = vu$. V tem primeru pravimo, da sta točki u in v *krajišči* povezave e. Pravimo tudi, da sta u in v *sosednji*, kar označimo z $u \sim v$.

Graf lahko narišemo. Točke grafa predstavimo kot točke v ravnini, povezave pa kot krivulje (morda celo daljice), ki povezujejo pare točk grafa (svojih krajišč). Predstavljeni sta dve sliki grafa G.





V desni sliki se dve izmed povezav sekata. To križišče na sliki pa je lastnost *slike* in ne grafa. Nikakor križišče narisanih povezav ni točka grafa, čeprav morda tako izgleda.

Oznake: $V = V(G)$ ... množica točk grafa G; $E = E(G)$ ... množica povezav grafa G.

Črki V in E uporabljamo kot *funktorja.* Izberimo graf $H = (U, F)$. To pomeni, da ima graf H množico točk enako U in množico povezav enako F. Vseeno pišemo $V(H) = U$ in $E(H) = F$. Črki V in E izvirata iz angleške terminologije, kjer točki/točkam pravimo *vertex/vertices*, povezavam pa *edges.*

Stopnje točk

Stopnja točke $v \in V(G)$ je število povezav, ki imajo v za krajišče. Stopnjo točke v označimo z $\deg(v)$.

Točka stopnje 0 je *izolirana točka*, točki stopnje 1 pravimo tudi *list* grafa.

*Z*gled: v grafu s slike je $\deg(u) = \deg(w) = 2, \deg(v) = 3, \deg(x) = 1, \deg(y) = 0$.

Graf G je *d-regularen*, če so vse točke grafa G stopnje d. 3-regularnim grafom pravimo tudi *kubični grafi.*

Izrek 1 (Lema o parnosti) *Naj bo G graf z n točkami in m povezavami. Potem je*

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2 \cdot m \tag{1}$$

Dokaz. Lemo o parnosti pokažemo tako, da na povezave v grafu pripnemo zastavice. Na vsako povezavo pripnemo dve zastavici, po eno v bližini vsakega izmed krajišč. Potem zastavice preštejemo.

Po eni strani je število zastavic enako dvakratniku števila povezav, $2 \cdot m$. Po drugi strani štejemo zastavice v bližini posameznih točk. Blizu točke v je tako najti natanko $\deg(v)$ zastavic. Potrebno je samo še sešteti omenjene količine po vseh točkah grafa. □

Navedimo še direktni posledici.

Posledica 2 *V vsakem grafu je* sodo *mnogo točk lihe stopnje.*

Dokaz. Levo stran enačbe (1) razpišemo v

$$\sum_{\substack{i=1 \\ \deg(v_i)\text{ je liho}}}^{n} \deg(v_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ \deg(v_i)\text{ je sodo}}}^{n} \deg(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2 \cdot m$$

Pri tem je

$$\sum_{\substack{i=1 \\ \deg(v_i)\text{ je liho}}}^{n}$$

sodo število, primerjaj parnosti izrazov v levi in desni strani enačbe. To pa je možno le, ko je v zadnji vsoti sodo mnogo členov. □

Posledica 3 *Naj bo G d-regularen graf z n točki in m povezavami. Potem je*

$$n \cdot d = 2 \cdot m$$

NEKATERE STANDARDNE DRUŽINE GRAFOV

V tem sestavku si bomo ogledali in spoznali nekatere standardne družine grafov.

Polni grafi

Graf je *poln*, če je vsaka točka v grafu sosedna z vsako drugo točko. Poln graf z $n \geq 1$ točkami označimo z K_n in ga opišemo takole:

$$\begin{aligned} V(K_n) &= \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\} \\ E(K_n) &= \{v_i v_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \text{ oziroma} \\ & v_i \sim v_j \text{ natanko tedaj, ko je } i \neq j. \end{aligned}$$

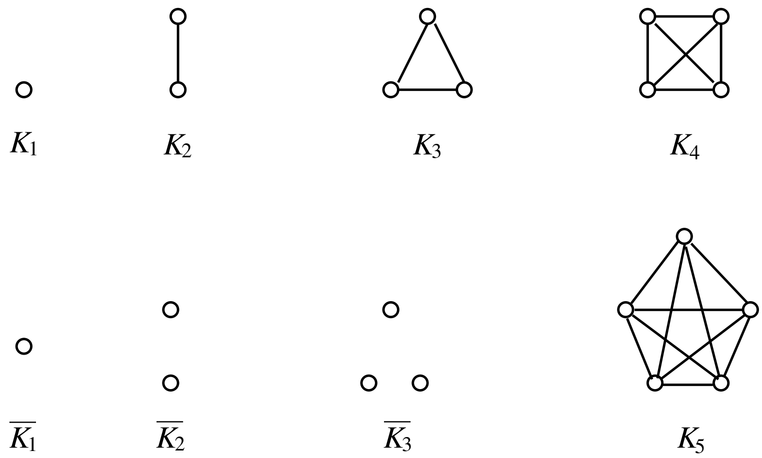
Vsaka točka v polnem grafu K_n je stopnje $n-1$. Torej je K_n $n-1$-regularen graf, $|V(K_n)| = n$ in $|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Polni grafi so predstavljeni na Sliki 1.

Prazni grafi

Graf je *prazen*, če je brez povezav. Prazen graf z $n \geq 1$ točkami označimo z $\overline{K_n}$ in ga opišemo takole:

$$\begin{aligned} V(\overline{K_n}) &= \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\} \\ E(\overline{K_n}) &= \emptyset \end{aligned}$$

Vsaka točka v praznem grafu $\overline{K_n}$ je stopnje 0. Torej je $\overline{K_n}$ 0-regularen graf, $|V(\overline{K_n})| = n$ in $|E(\overline{K_n})| = 0$. Narišimo tudi slike praznih grafov, glej Sliko 1. Prazni graf $\overline{K_n}$ je komplement polnega grafa K_n.



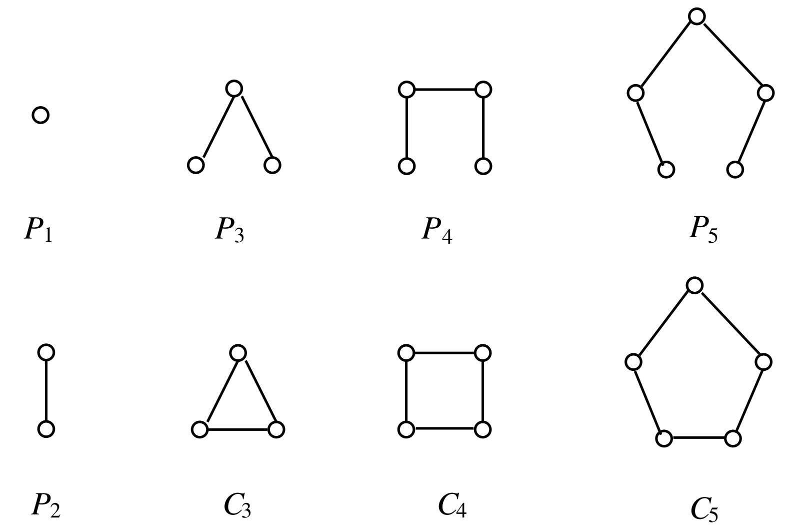
Slika 1: Polni in prazni grafi.

Poti

Pot na n točkah označimo s P_n. Točke poti lahko uredimo po vrsti od prvega do zadnjega, pri čemer je prva točka soseda z drugo, druga s tretjo, ... in predzadnja z zadnjo. Formalno,

$$\begin{aligned} V(P_n) &= \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\} \\ E(K_n) &= \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i < n\}. \end{aligned}$$

Če je točk dovolj, $n \geq 2$, potem ima pot P_n dve točki stopnje 1, ki jima pravimo *krajišči*, preostale točke, ki so stopnje 2, pa so *notranje točke* poti. Poti na n točkah pravimo tudi *pot dolžine* $n-1$. Pot P_n ima n točk in $n-1$ povezav.



Slika 2: Poti in cikli.

Cikli

Cikel je graf z vsaj tremi točkami, ki ga dobimo tako, da v poti na istem številu točk dodamo povezavo med krajiščema. Cikel na n točkah, označimo ga s C_n, je 2-regularen graf, zato je $|V(C_n)| = n$ in $|E(C_n)| = n$. Opišimo cikle še formalno:

$$\begin{aligned} V(C_n) &= \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\} \\ E(C_n) &= \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i < n\} \cup \{v_1 v_n\} = \{v_i v_j \mid j \equiv i + 1 \pmod{n}\}. \end{aligned}$$

Tako poti kot cikli so prikazani na Sliki 2.

Polni dvodelni grafi

Graf je *poln dvodelen*, če lahko množico njegovih točk razbijemo v dve podmnožici, ki jima pravimo barvna razreda grafa, njune točke pa pesniško opišemo kot *rdeča* in *modra* točke, pri čemer sta točki sosedi natanko tedaj, ko sta različnih "barv". Če barvna razreda polnega dvodelnega grafa vsebujeta m oziroma n točk, potem tak graf označimo s $K_{m,n}$.

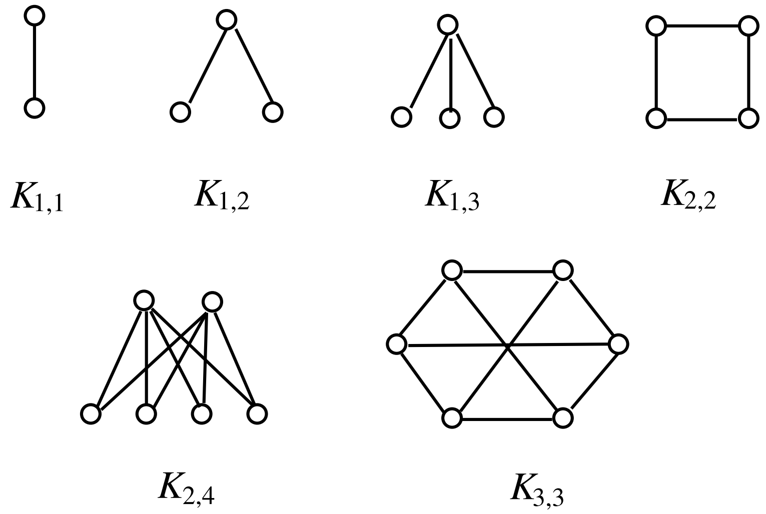
$$\begin{aligned} V(K_{m,n}) &= \{v_1, v_2, \ldots, v_m, u_1, u_2, \ldots, u_n\} \\ E(C_n) &= \{v_i u_j \mid 1 \leq i \leq m \text{ in } 1 \leq j \leq n\} \end{aligned}$$

Poln dvodelni graf $K_{m,n}$ vsebuje $m + n$ točk, poleg tega pa je $|E(K_{m,n})| = m \cdot n$. Točke barvnega razreda moči m so vsa enake stopnje n, medtem ko so vse točke barvnega razreda moči n stopnje m. Polne dvodelne grafe lahko občuduješ na Sliki 3

Hiperkocke

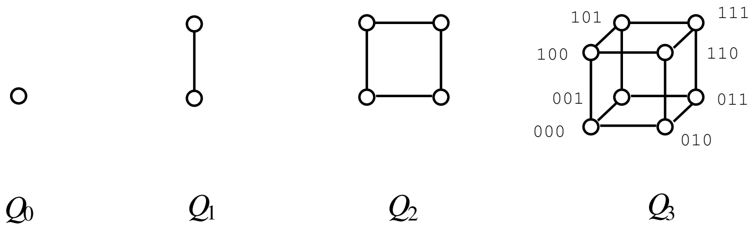
d-razsežno *hiperkocko* Q_d, $d \geq 1$, najlaže opišemo takole: točke d-razsežne hiperkocke so zaporedja ničel in enic dolžine d. Dve točki-zaporedji pa sta sosedi, če se razlikujeta v natančno enem členu.

$$\begin{aligned} V(Q_d) &= \{0,1\}^d = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\} \\ u = (u_1, u_2, \ldots, u_d) \sim v = (v_1, v_2, \ldots, v_d) &\text{ natanko tedaj, ko obstaja } k \in \{1, \ldots, d\}, \\ &\text{ pri čemer je } u_k \neq v_k \\ &\text{ in je } u_i = v_i \text{ za vse } i \in \{1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, d\}. \end{aligned}$$



Slika 3: Polni dvodelni grafi.

Vsaka točka hiperkocke Q_d je soseda z natanko d preostalimi točkami, torej je Q_d d-regularen graf. Velja pa tudi $|V(Q_d)| = 2^d$ in $|E(Q_d)| = d \cdot 2^{d-1}$. Majhne hiperkocke si oglej na Sliki 4.



Slika 4: Hiperkocke.

OPERACIJE Z GRAFI

Opisali bomo nekaj najnujnejših operacij za delo z grafi.

Odstranjevanje točke

Naj bo $G = (V, E)$ graf in naj bo v točka grafa G, $v \in V$. Potem graf $G - v$ dobimo tako, da iz grafa G *odstranimo točko* v, ravno tako pa odstranimo tudi vse povezave, ki imajo v za krajišče. Formalno

$$\begin{aligned} V(G-v) &= V(G) \setminus \{v\} \\ E(G-v) &= \{e \in E(G) \mid e \cap \{v\} = \emptyset\}. \end{aligned}$$

Izberimo cikel C_n in naj bo v katerakoli točka cikla C_n. Graf $C_n - v$ je (izomorfen) P_{n-1}. Če ciklu odstranimo katerokoli vozlišče, pridelamo pot z enim vozliščem manj.

Odstranjevanje povezave

Naj bo $G = (V, E)$ graf in naj bo $e = uv$ povezava v G. Graf $G - e = G - uv$ dobimo tako, da grafu G *odstranimo povezavo* e. Formalno

$$\begin{aligned} V(G-e) &= V(G) \\ E(G-e) &= E(G) \setminus \{e\}. \end{aligned}$$

Izberimo cikel C_n in naj bo e katerakoli povezava cikla C_n. Graf $C_n - e$ je (izomorfen) P_n. Če ciklu odstranimo katerokoli povezavo, pridelamo pot z istim številom vozlišč.

Dodajanje povezave

Naj bo $G = (V, E)$ graf, u, v njegovi točki in privzemimo, da u in v nista sosedi. Potem je $G + uv$ graf, ki ga dobimo iz grafa G tako, da mu *dodamo povezavo* uv.

$$\begin{aligned} V(G+uv) &= V(G) \\ E(G+uv) &= E(G) \cup \{u, v\}. \end{aligned}$$

Če poti P_n dodamo povezavo med njenima krajiščema, pridelamo cikel.

Komplement grafa

Naj bo $G = (V, E)$ poljuben graf. *Komplement grafa* G, označimo ga z $\overline{G}$, je graf z isto množico točk, dve točki pa sta sosedi v grafu $\overline{G}$ natanko tedaj, ko nista sosedi v grafu G.

$$\begin{aligned} V(\overline{G}) &= V(G) \\ E(\overline{G}) &= \{\{u, v\} \mid u \neq v\} \setminus E(G). \end{aligned}$$

Komplement praznega grafa je poln graf, in obratno. Kako izgleda $\overline{C_5}$?

PODGRAFI

V tem sestavku bomo formalizirali pojem *podgrafa.*

Besedica podgraf označuje relacijo med grafi, ki je ustreznica podmnožice v domeni teorije grafov. Toda grafi so kompleksneješe strukture kot množice. Konec koncev je graf formalno urejen par, z množico točk kot prvo koordinato in množico povezav kot drugo koordinato. Pri tem pa množici točk in povezav ne moreta biti čisto neodvisni.

Zato je definicija podgrafa (kot manjšega grafa) po eni strani nekoliko bolj zapletena, po drugi strani pa ločimo različne vrste podgrafov.

Začnimo z definicijo. Naj bosta H in G grafa. Pravimo, da je H *podgraf* grafa G, to označimo z $H \subseteq G$, če je $V(H) \subseteq V(H)$ in $E(H) \subseteq E(H)$. Iz definicije sledi, da je $G \subseteq G$.

Zdi se, da podgrafe grafa $G = (V, E)$ dobimo tako, da izberemo neko podmnožico točk $U \subseteq V(G)$ in neko podmnožico povezav $F \subseteq E(G)$ grafa G ter ju združimo v urejen par (U, F) — graf. Napaka! Potrebno je biti pazljiv, vsa krajišča povezav iz množice F *morajo* ostati v množici U!

Vpeti podgrafi

Naj bo H podgraf grafa G, $H \subseteq G$. Pravimo, da je H *vpet podgraf* grafa G, če velja $V(H) = V(G)$.

Vpeti podgrafi grafa G vsebujejo vse točke originalnega grafa. Za povezave to ne velja nujno. Če je $F \subseteq E(G)$, potem z $G[F]$ označimo vpet podgraf grafa G, ki je določen s povezavami iz F. Zanj velja $V(G[F]) = V(G)$ (ker je vpet) in $E(G[F]) = F$.

G je vpet podgraf v G.

Inducirani podgrafi

Naj bo H podgraf grafa G, $H \subseteq G$. Denimo, da za vsaki dve točki $u, v \in V(H)$ velja: če $uv \in E(G)$, potem $uv \in E(H)$. V tem primeru pravimo, da je H *induciran podgraf* grafa G.

Inducirani podgrafi ne vsebujejo nujno vseh točk niti vseh povezav grafa G. Toda če v induciranem podgrafu *preživita* dve točki u in v originalnega grafa G, potem mora v takšnem podgrafu *preživeti* tudi morebitna povezava uv.

Inducirani podgrafi grafa G so določeni s podmnožicami točk grafa G. Če je $U \subseteq V(G)$, potem z $G[U]$ označimo inducirani podgraf grafa G z množico točk U. Zanj velja $V(G[U]) = U$ in $E(G[U]) = \{uv \in E(G) \mid u, v \in U\}$.

G je induciran podgraf G.

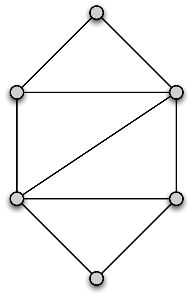
Podgrafi in operacije

Postavimo pojem podgrafa v kontekst z operacijami na grafih. Podgrafe grafa G dobimo tako, da iz grafa G zaporedoma odstranjujemo točke in/ali povezave.

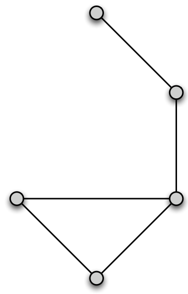
Vpete podgrafe grafa G dobivamo tako, da iz grafa G zaporedoma odstranjujemo *izključno* povezave.

Vsak induciran podgraf grafa G *lahko* dobimo tako, da iz G zaporedoma odstranjujemo *samo* točke.

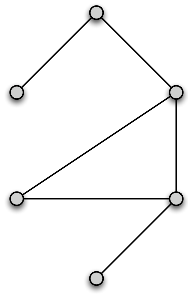
Zgled



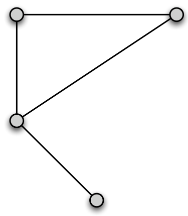
Graf G.



$H_1 \subseteq G$



$H_2 \subseteq G$,
vpet.



$H_3 \subseteq G$,
induciran.

SPREHODI V GRAFIH

Začnimo z definicijo. Naj bo $G = (V, E)$ graf. *Sprehod* v grafu G je alternirajoče zaporedje točk in povezav

$$S = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{n-1} e_n v_n \tag{2}$$

pri čemer za vsak $i = 1, \dots, n$ velja $e_i = v_{i-1}v_i$. *Dolžina sprehoda* $S = v_0e_1v_1e_2v_2 \dots v_{n-1}e_nv_n$ je enaka n, kar označimo z $|S| = n$. Točko v_0 imenujemo *začetek* sprehoda S, točki v_n pravimo *konec* sprehoda S.

Sprehodu z začetkom v točki v in koncem v točki u pravimo tudi $u - v$ sprehod. Začetku in koncu sprehoda z eno besedo pravimo *krajišči* sprehoda.

V splošnem se lahko točka v sprehodu ponavljajo. Sprehod $S = v_0e_1v_1e_2v_2 \dots v_{n-1}e_nv_n$ imenujemo *pot*, če je $v_i \neq v_j$ za vse $0 \leq i < j \leq n$.

Sprehod S je *obhod*, če se začne in konča v isti točki, tj. če je $v_0 = v_n$. Sprehod $S = S = v_0e_1v_1e_2v_2 \dots v_{n-1}e_nv_n$ imenujemo *cikel*, če je $n \geq 3$ in je $v_0 = v_n$, sicer pa so vse točke v S različna.

Na tem mestu omenimo dvojnost pojmov poti in cikla. Poti in cikli po eni strani predstavljajo dve različni družini grafov. V tem kontekstu pa strukture, ki se lahko pojavijo v poljubnem grafu. V uteho nam je lahko le dejstvo, da iz točk poti z upoštevanjem povezav med pari zaporednih točk pridelamo graf, ki je pot. Podobno se zgodi s ciklom. Iz cikla v grafu na tak način pridelamo cikel.

Pri tem naj omenimo še eno podrobnost. Sprehod oziroma pot v grafu ima svojo usmeritev, določeno z začetkom in koncem. Ravno tako ima obhod oziroma cikel v grafu svoj začetek, ki sicer sovpada s koncem. Pot kot vrsta grafa pa sama po sebi ne loči med svojima krajiščema, informacije o tem, da bi bilo eno izmed krajišč začetno drugo pa končno nimamo. Ravno tako cikel kot graf ne vsebuje odlikovanega začetnega točka, kot ga ima cikel kot vrsta obhoda.

Lema 4 *Najkrajši sprehod med točkama u in v v grafu (če kakšen sploh obstaja) je pot.*

Naj bo S najkrajši $u - v$ sprehod v grafu G. S je torej sprehod z začetkom u, koncem v in ima med vsemi možnimi $u - v$ sprehodi v grafu G najkrajšo dolžino $|S|$.

Denimo, da S ni pot. Potem v S vsaj eno točka, imenujmo jo w, nastopi dvakrat:

$$S = ue_1v_1e_2v_2 \dots v_{r-1}e_rwe_{r+1}v_{r+1} \dots v_{s-1}e_swe_{s+1}v_{s+1} \dots v_{n-1}e_nv.$$

Toda v tem primeru je

$$S' = ue_1v_1e_2v_2 \dots v_{r-1}e_rwe_{s+1}v_{s+1} \dots v_{n-1}e_nv$$

krajši $u - v$ sprehod v grafu G. Kar je v protislovju s predpostavko.

Posledica 5 *Če v grafu G obstaja $u - v$ sprehod, potem v G obstaja tudi $u - v$ pot.*

Dokaza menda ne potrebujemo. Gre res za posledico Leme 4.

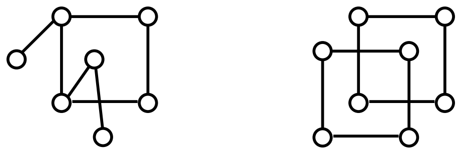
Definirajmo še nekaj operacij s sprehodi v grafu G. Naj bosta $S_1 = u_0e_1u_1 \dots u_k$ in $S_2 = u_ke_{k+1}u_{k+1} \dots u_m$ sprehoda v grafu G. *Stik* sprehodov S_1 in S_2 je sprehod

$$S_1S_2 = u_0e_1u_1 \dots u_ke_{k+1}u_{k+1} \dots u_m.$$

Za dolžino stika sprehodov velja formula $|S_1S_2| = |S_1| + |S_2|$.

Obratni sprehod sprehoda $S = v_0e_1v_1e_2v_2 \dots v_{n-1}e_nv_n$ je sprehod $S^r = v_n \dots v_1e_1v_0$. *Odsek sprehoda* S med v_i in v_j $(i \leq j)$ je sprehod

$$S_{v_i - v_j} = v_ie_{i+1}v_{i+1} \dots v_j.$$



Slika 5: Povezan in nepovezan graf.

Povezanost

Pravimo, da je graf $G = (V, E)$ *povezan*, če za poljubni točki $u, v \in V(G)$ v grafu G obstaja $u - v$ sprehod (kar je enakovredno, da obstaja $u - v$ pot v grafu G).

V množici točk $V(G)$ definirajmo relacijo P takole:

$$uPv \text{ natanko tedaj, ko v } G \text{ obstaja } u - v \text{ sprehod.}$$

Trdimo, da je P ekvivalenčna relacija. P je refleksivna, saj lahko v smatramo kot sprehod dolžine 0 z začetkom v v in koncem v v. Ravno tako je P simetrična, če je namreč S $u - v$ sprehod, je S^R $v - u$ sprehod. Za tranzitivnost izberimo $u - v$ in $v - w$ sprehoda S_1 in S_2. Stik sprehodov $S_1 S_2$ je $u - w$ sprehod, zato je uPw.

Ekvivalenčna relacija P razbije množico točk $V(G)$ v ekvivalenčne razrede $V_1, V_2, \ldots, V_k$; $V(G)/P = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$. Grafi $G[V_1], G[V_2], \ldots, G[V_k]$ so *povezane komponente* grafa G. Njihovo število označimo z $\Omega(G)$.

Navedimo trditev, dokaz pravzaprav ni potreben.

Trditev 6 *Graf G je povezan natanko tedaj, ko je $\Omega(G) = 1$.*

Naj bo G povezan graf. Z $d(u, v)$ označimo *razdaljo* med točkama u in v v grafu G. Definiramo jo kot dolžino najkrajše $u - v$ poti.

Trditev 7 *Razdalja d v povezanem grafu G ustreza trikotniški neenakosti: za poljubne točke $u, v, w \in V(G)$ je*

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$$

Dokažimo trditev. Naj bo P_1 najkrajša $u - v$ pot in P_2 najkrajša $v - w$ pot v grafu G. Velja torej $|P_1| = d(u, v)$ in $|P_2| = d(v, w)$.

Stik poti $P_1 P_2$ je $u - w$ sprehod, morda niti ne najkrajši. Vseeno velja

$$d(u, w) \leq |P_1 P_2| = |P_1| + |P_2| = d(u, v) + d(v, w).$$

Za konec definiramo še *premer grafa*, diam(G), pri čemer mora biti G povezan. Premer kroga je največja razdalja med točkami v krogu. Ravno tako je premer grafa največja razdalja med točkami v grafu,

$$\operatorname{diam}(G) = \max_{u,v \in V(G)} d(u, v).$$

Za dovolj velik n, karkoli že to pomeni, je $\operatorname{diam}(K_n) = 1$, $\operatorname{diam}(P_n) = n - 1$, $\operatorname{diam}(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ in $\operatorname{diam}(Q_n) = n$.

DVODELNI GRAFI

Graf $G = (V, E)$ je *dvodelen*, če lahko točke grafa $V(G)$ razbijemo na dve podmnožici $V(G) = A \cup B$ z lastnostjo, da ima vsaka povezava $e = uv$ v grafu G krajišči v različnih členih razbitja $A \cup B$.

Pogovorno pravimo, da smo točke grafa obarvali z dvema barvama (denimo, da imenujemo točke iz A *bele*, točke iz B pa *črne*), pri čemer naj ima vsaka povezava krajišči različnih barv.

Kateri znani grafi so dvodelni? Drevesa, poti, polni dvodelni grafi (odtod ime, mar ne), cikli sode dolžine, hiperkocke Q_d.

Zakaj slednje? Standardno za točke hiperkocke Q_d izberemo 0/1 zaporedja dolžine d, pri čemer sta točki-zaporedji sosedi natanko tedaj, ko se razlikujeta v eni sami koordinati. Sprememba ene koordinate pomeni spremembo ene enice v ničlo ali obratno. Pri tem pa spremenimo parnost števila enic v zaporedju. Torej: točke hiperkocke Q_d lahko imenujemo *sode* oziroma *lihe* glede na parnost števila enic v zaporedju-točki. Sosedi, ker se razlikujeta v natančno eni koordinati, bosta vedno različnih parnosti-barv.

Kateri znani grafi niso dvodelni? Polni grafi (na vsaj 3 točkah), cikli lihih dolžin.

Če graf G vsebuje cikel lihe dolžine kot podgraf, potem G ni dvodelen. Velja pa tudi obrat, cikli lihih dolžin so edine ovire za dvodelnost grafa.

Izrek 8 *Graf G je dvodelen natanko tedaj, ko ne vsebuje nobenega lihega cikla kot podgraf.*

Z dokazom izreka malo počakajmo. Za začetek si oglejmo tehnični rezultat

Lema 9 *Če graf G vsebuje kakšen obhod lihe dolžine, potem G vsebuje tudi cikel lihe dolžine. Natančneje, najkrajši obhod lihe dolžine v grafu G je cikel.*

Naj bo

$$O = u_0 u_1 u_2 \dots u_{k-1} u_0 \tag{3}$$

najkrajši obhod lihe dolžine v grafu G.

Dolžina obhoda $|O|$ je enaka k, ki je liho število in *ni* enako 1, saj graf G nima zank. Odtod sledi, da je dolžina *vsakega* obhoda lihe dolžine v grafu G vsaj 3.

Denimo, da obhod O ni cikel. Ker O izpolnjuje pogoj $|O| \geq 3$, obhod O ni cikel zaradi ponovljenih točk. Privzamemo lahko, da se (neka) točka x vzdolž obhoda O pojavi dvakrat, $x = u_i$ in $x = u_j$, pri indeksih $i < j$.

Obhod O razcepimo na dva obhoda: $O_1 = u_0 \dots u_{i-1} x u_{j+1} \dots u_{k-1} u_0$ in $O_2 = x u_{i+1} \dots u_{j-1} x$. Obhoda O_1 in O_2 sta oba strogo krajša od O, obenem pa velja tudi $|O_1| + |O_2| = |O|$. Odtod sledi, da je natanko eden od O_1, O_2 lihe dolžine, kar je v nasprotju s predpostavko, da je O najkrajši lih obhod v grafu G. Torej je O cikel in Lema 9 je pod streho. $\square$

Za dokaz Izreka 8 je dovolj opazovati povezane grafe. Točke nepovezanega grafa lahko ustrezno obarvamo z dvema barvama natanko tedaj, ko lahko obarvamo vsako od njegovih komponent. Ravno tako je morebitni lih cikel v G vsebovan v eni od njegovih povezanih komponent.

Naj bo torej G povezan graf; izberimo poljubno točko v_0 grafa G. Naj bo $V_0, V_1, V_2, V_3, \dots$ *razdaljna particija* točk grafa G glede na v_0: V_i je množica točk grafa G, ki od točke v_0 oddaljene natanko i. To med drugim pomeni, da je $V_0 = \{v_0\}$ in da je V_1 množica sosed točke v_0. Množice točk V_i, $i = 0, 1, \dots$ imenujmo *vreče* razdaljne particije.

Kaj lahko povemo o najkrajši poti med točkama v_0 in v_i? Najkrajših poti med dvema točkama v grafu je načeloma lahko več, vsekakor pa so vse najkrajše $v_0 - v_i$ poti iste dolžine, ki je enaka razdalji med točkama v_0 in v_i, torej natako i. Za vsako točko x grafa G naj P_x označuje neko najkrajšo $v_0 - x$ pot.

Katere povezave so lahko prisotne v grafu G? Razdelimo jih na tri skupine glede na lego njihovih krajišč v razdaljni particiji.

(P1) povezava $e = uv$ ima krajišči v isti vreči, $u \in V_i$ in $v \in V_i$,

(P2) povezava $e = uv$ ima krajišči v zaporednih vrečah, $u \in V_i$ in $v \in V_{i+1}$,

(P3) povezava $e = uv$ ima krajišči v nezaporednih vrečah, $u \in V_i$, $v \in V_j$ in $j \geq i + 2$.

Naj bo $e = uv$ povezava tipa (P3) in naj velja $u \in V_i$ in $v \in V_j$, kjer je $j \geq i + 2$. Naj bo P_u najkrajša $u_0 - u$ pot, ki je seveda dolžine i. Pot P_u lahko z uporabo povezave $e = uv$ podaljšamo do $u_0 - v$ poti dolžine $i + 1$. To je v nasprotju z dejstvom, da je razdalja med točkama u_0 in v enaka j, saj je $j > i + 1$. Torej v grafu G *sploh ni* povezav tipa (P3).

Denimo, da v grafu G obstaja povezava $e = uv$ tipa (P1). Naj bosta P_u in P_v najkrajši $u_0 - u$ oziroma $u_0 - v$ poti, ki sta seveda iste dolžine i. Sledenje poti P_v v smeri proti u_0, nato poti P_u v smeri proti v in na koncu uporaba povezave $e = uv$ določa obhod lihe dolžine $2i + 1$. Po Lemi 9 v grafu G obstaja cikel lihe dolžine in zato graf G ni dvodelen.

V nasprotnem primeru graf G *ne vsebuje* nobene povezave tipa (P1), kar pomeni, da točke iz posamezne vreče inducirajo prazen graf. Sedaj obarvamo vse točke iz vreč $V_0, V_2, V_4, \ldots$ s *sodo* barvo, točke iz vreč z lihimi indeksi $V_1, V_3, V_5, \ldots$ pa z *liho* barvo. Vsaka izmed povezav, ker je tipa (P2), ima krajišči obarvani z različnima barvama, zato je graf G dvodelen. $\square$

BROOKSOV IZREK

Točke grafa $G = (V, E)$ želimo obarvati tako, da bosta vsaki sosedni točki obarvani z različnima barvama. Če imamo na voljo premajhno število barv, nam to morda ne bo uspelo (denimo, da imamo na voljo eno samo barvo, graf G pa ima povezave), z zadosti velikim številom barv barvanje vedno uspe (če imamo na voljo $|V(G)|$ barv, lahko točke obarvamo s samimi različnimi barvami).

Kromatično število grafa G, $\chi(G)$, je najmanše zadostno število barv, ki jih potrebujemo za barvanje točk grafa G.

Računanje kromatičnega števila grafa je računsko težaven[1] problem. Optimizacijski problem, poišči barvanje z najmanjšim možnim številom barv je kvečjemu še bolj zahtevna naloga. Na tem mestu bomo želeli kar najbolje oceniti kromatično število grafa, poiskati bomo želeli kar se da tesni zgornjo in spodnjo mejo za kromatično število $\chi(G)$.

Na tem mestu omenimo, da se lahko pri barvanju grafov *vedno* omejimo na povezane grafe. Če namreč graf G ni povezan, potem lahko točke grafa G obarvamo z zaporednim barvanje točk po vseh komponentah grafa G. Ravno tako je razlog za morebitno veliko kromatično število grafa G skrit v kateri izmed komponent, vsaj ena komponenta ora imeti veliko kromatično število. V nadaljevanju privzamemo, da so vsi grafi pod drobnogledom povezani.

Z $\omega(G)$ označimo *velikost največje klike (velikost največjega polnega podgrafa)* v grafu G. Torej $\omega(G)$ označuje velikost največje množice točk S grafa G, v kateri sta vsaki dve točki tudi sosedi. Vsekakor za barvanje točk grafa G potrebujemo vsaj toliko barv kot za barvanje točk iz S. Odtod spodnja meja za kromatično število.

Trditev 10 *V vsakem grafu je $\chi(G) \geq \omega(G)$.*

Požrešno barvanje

Z $\Delta(G)$ označimo maksimalno stopnjo točke grafa G, z $\delta(G)$ pa minimalno stopnjo točke iz grafa G. Maksimalna stopnja $\Delta(G)$ bo tesno povezana z zgornjo mejo za velikost kromatičnega števila grafa G.

Točke grafa uredimo v zaporedje

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n \tag{4}$$

in jih zaporedoma barvamo v skladu z naslednjim postopkom (pri tem predpostavimo, da so točke z majhnimi indeksi obarvane z barvami $c(v_1), c(v_2), \ldots, c(v_{i-1})$, preostale točke pa še niso obarvane):

> točko v_i obarvamo z najmanjšo *prosto* barvo $c(v_i)$, pri čemer so proste barve tiste, ki niso uporabljene na kateri od obarvanih sosed točke v_i.

Požrešno barvanje je termin, ki ga v literaturi uporabljamo za zgoraj opisan postopek. Število uporabljenih barv je seveda odvisno od vrstnega reda točk (4), nikakor pa število uporabljenih barv ne presega $\Delta(G) + 1$.

Trditev 11 *V vsakem grafu je $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Dovolj je pokazati, da požrešno barvanje uporabi največ $\Delta(G) + 1$ različnih barv.

Požrešno barvanje za barvo točke v_i, $c(v_i)$, izbere najmanjšo prosto barvo. Število na obarvanih sosedah točke v_i uporabljenih barv je vsekakor manjše od števila obarvanih sosed točke v_i. Število

[1] NP-težak, a o teoriji računske zahtevnost na tem mestu ne bi.

obarvanih sosed točke v_i je največ število vseh sosed točke v_i oziroma $\deg(v_i)$. Stopnja točke $\deg(v_i)$ je navzgor omejena z maksimalno stopnjo $\Delta(G)$. To pomeni, da obarvane sosede točke v_i ne uporabijo vsaj ene izmed barv $1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1$ in dokaz je zaključen. $\square$

Število uporabljenih barv v požrešnem barvanju se lahko znatno razlikuje od kromatičnega števila grafa. Morda najbolj znan primer je graf $G^* = K_{n,n} - M$, poln uravnotežen dvodelni graf, ki mu odstranimo popolno prirejanje povezav: $V(G^*) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, točki u_i in v_j sta sosedi natanko tedaj, ko je $i \neq j$. Če požrešno obarvamo točke grafa G^* vzdolž zaporedja točk

$$v_1, u_1, v_2, u_2, \ldots, v_n, u_n$$

bo število uporabljenih barv enako n, medtem ko je $\chi(G^*) = 2$.

Zakaj takšna razlika? Zelo verjetno smo si *zaporedje* točk zelo nesrečno izbrali. Najbrž bi s premišljeno izbiro zaporedja točk lahko dosegli precej manjšo potrebo po različnih barvah. Smiselno je zahtevati, da točke majhne stopnje v grafu obarvamo šele na koncu, točke velikih stopenj pa na začetku — takrat bodo imele majhno število obarvanih sosed.

Najenostavnejša uporaba te paradigme se skriva v naslednji trditvi.

Trditev 12 *Naj bo G povezan graf, v katerem obstaja točka v* majhne *stopnje* $\deg(v) < \Delta(G)$. *Potem je $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Trdimo, da v grafu G velja naslednja lastnost. Naj bo H poljuben podgraf grafa G. Potem H vsebuje točke *majhne* stopnje $< \Delta(G)$.

Opazko je dovolj preveriti na induciranih podgrafih grafa G. Celoten graf G vsebuje točko majhne stopnje zaradi predpostavke trditve. Naj bo $U \neq \emptyset$ prava podmnožica točk grafa G. Ker je G povezan, obstaja vsaj ena povezava z enim krajiščem v U in drugim krajiščem v $V(G) \setminus U$. Odtod sledi, da ima vsaj ena točka $u \in U$ v induciranem podgrafu $G[U]$ strogo manjšo stopnjo kot v grafu G, $\deg_{G[U]}(u) < \deg_G(u) \leq \Delta(G)$, in opazka je dokazana.

Trditev pripeljemo do konca z uporabo pošrešnega barvanja, pri katerem točko majhne stopnje obarvamo na koncu, preostanek grafa pa poprej rekurzivno. $\square$

Naj bo G povezan graf. Točka v je *prerezna točka* ali 1-*separator*, če graf $G - v$ ni povezan. Analogno paru točk $\{u, v\}$ pravimo *2-separator*, če graf $G - u - v$ ni povezan.

Trditev 13 *Naj bo G povezan graf, ki ima prerezno točko v. Potem je $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Naj bo par G_1, G_2 ustrezna separacija grafa G — za grafa G_1 in G_2 velja, da je $G_1 \cup G_2 = G$ in $V(G_1) \cap V(G_2) = \{v\}$. Pri tem pa nobeden od G_1, G_2 ni enak G. Ker je G povezan, ima točka v soseda tako v G_1 kot v G_2. To pomeni, da je $\deg_{G_1}(v) < \deg_G(v) \leq \Delta(G)$ in tudi $\deg_{G_2}(v) < \deg_G(v) \leq \Delta(G)$. Po Trditvi 12 obstajata barvanji c_1, c_2 grafov G_1 in G_2 z največ $\Delta(G)$ barvami. Z morebitnim preimenovanjem barv (permutacijo) lahko dosežemo, da se barvanji c_1 in c_2 ujemata v točki v. Unija barvanj c_1 in c_2 je potem barvanje grafa G z največ $\Delta(G)$ barvami. $\square$

Brooksov izrek

Na tem mestu se lotimo glavnega rezultata v tem razdelku, Brooksovega izreka.

Izrek 14 (Brooks) *Naj bo G povezan graf. Če G ni niti poln graf niti cikel lihe dolžine, potem je $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Naj bo G povezan graf in označimo $\Delta = \Delta(G)$. Če je $\Delta = 1$, potem je G izomorfen polnemu grafu na dveh točkah. Po Trditvah 12 in 13 lahko predpostavimo, da je G Δ-regularen graf brez prerezne točke.

Če je $\Delta = 2$, potem je G cikel, in je njegovo kromatično število enako $\Delta(G) + 1 = 3$ natanko tedaj, ko je G cikel lihe dolžine. Zato v nadaljevanju privzamemo, da je $\Delta \geq 3$ in da G ni poln graf.

Denimo, da v grafu G obstaja 2-separator $\{x, y\}$. Podobno kot v dokazu Trditve 13 z G_1, G_2 označimo grafa, za katera velja $G_1 \cup G_2 = G$, $V(G_1) \cap V(G_2) = \{x, y\}$, pri čemer niti G_1 niti G_2 nista enaka G. Ker G nima prereznih točk, imata obe točki separatorja x in y sosedi tako v G_1 kot v G_2. Zato je $\deg_{G_1}(x) < \deg_G(x) \leq \Delta$ in po Trditvi 12 obstaja Δ-barvanje grafa G_1, analogno je z grafom G_2.

Toda barvanj grafov G_1 in G_2 v splošnem ne moremo sestaviti v Δ-barvanje grafa G (tudi s permutacijo barv v enem od barvanj), saj morda eno izmed barvanj želi obarvati točki x in y z *isto* barvo, drugo pa zahteva, da sta x in y obarvani z različnima barvama. Treba bo biti malenkost bolj pazljiv.

Če sta točki x in y sosedi v grafu G ni težav. Povezava xy sme biti prisotna tako v G_1 kot v G_2, obe Δ-barvanji grafov G_1 in G_2 obarvata točki x in y z različnima barvama. S permutacijo barv lahko barvanji sestavimo v barvanje celotnega grafa G.

Torej privzamemo, da točki 2-separatorja x in y nista sosedi. Dodajmo povezavo xy v grafa G_1 in G_2, dobljena grafa označimo z G_1^+ in G_2^+. Za stopnjo točke x v obeh grafih velja ocena $\deg_{G_1^+}(x) \leq \Delta$ in $\deg_{G_2^+}(x) \leq \Delta$, ista ocena velja tudi za stopnjo točke y. Toda $\deg_{G_1^+}(x) = \Delta$ implicira, da ima točka x enega samega soseda x' v grafu G_2. Podobno, če je $\deg_{G_2^+}(y) = \Delta$, ima točka y enega samega soseda y' v grafu G_1. Zdaj pa opazujemo separatorje $\{x, y\}$, $\{x, y'\}$, $\{x', y\}$ in $\{x', y'\}$ (le tiste, kjer so ustrezne točke tudi definirane). Za vsaj enega od separatorjev velja, da tudi če dodamo povezavo med točkama separatorja, oba ustrezna dela separacije vsebujeta kakšno točko stopnje $< \Delta$. Po Trditvi 12 ju lahko obarvamo z Δ barvami, barvanji pa s permutacijo sestavimo v Δ-barvanje celotnega grafa G.

Slednjič privzamemo, da G ne vsebuje nobenega 2-separatorja. Naj bo u_0 točka stopnje Δ v grafu G. Ker G ni poln, vsaj dve izmed sosed točke u_0, imenujmo ju v_1 in v_2, nista sosedi. Vemo tudi, da je $G_0 = G - v_1 - v_2$ povezan graf. Zdaj se lotimo barvanja, točki v_1 in v_2 obarvajmo z isto barvo 1. Preostale točke grafa G uredimo po padajoči oddaljenosti v grafu G_0 od točke u_0 in jih barvamo požrešno. Katero barvo izberemo za točko $u \neq u_0$? Vsaj ena od sosed točke u je še neobarvana, denimo tista, ki leži bližje u_0 vzdolž najkrajše $u - u_0$ poti. Torej obarvane sosede točke u uporabijo največ $\Delta - 1$ barv. Na koncu obarvamo točko u_0. Ker sta dve njeni sosedi, v_1 in v_2 obarvani z isto barvo, je vsaj ena izmed Δ barv prosta tudi za u_0. $\square$

USMERJENI GRAFI

Usmerjen graf je urejen par $G = (V, \vec{E})$, kjer je

- V neprazna končna množica *točk (točk)* grafa G in
- $\vec{E}$ množica *usmerjenih* povezav grafa G, pri čemer je vsaka povezava *urejen par* točk (povezava je množica dveh različnih točk)

Zgled: $V = \{u, v, w, x, y\}$ $\quad E = \{(u, v), (u, w), (v, w), (v, x)\}$

V primeru usmerjenih grafov namesto $\vec{e} = (u, v)$ raje pišemo $\vec{e} = u\vec{v}$, še rajši pa (če implicitno vemo, da je povezava e usmerjena - denimo, da se pogovarjamo samo o usmerjenih grafi) recikliramo oznako in pišemo $e = uv$.

Točki u pravimo *začetek*, točki v pa *konec* (usmerjene) povezave e.