

## BROOKSOV IZREK

Točke grafa  $G = (V, E)$  želimo obarvati tako, da bosta vsaki sosedni točki obarvani z različnima barvama. Če imamo na voljo premajhno število barv, nam to morda ne bo uspelo (denimo, da imamo na voljo eno samo barvo, graf  $G$  pa ima povezave), z zadosti velikim številom barv barvanje vedno uspe (če imamo na voljo  $|V(G)|$  barv, lahko točke obarvamo s samimi različnimi barvami).

*Kromatično število* grafa  $G$ ,  $\chi(G)$ , je najmanše zadostno število barv, ki jih potrebujemo za barvanje točk grafa  $G$ .

Računanje kromatičnega števila grafa je računsko težaven<sup>1</sup> problem. Optimizacijski problem, poišči barvanje z najmanjšim možnim številom barv je kvečjemu še bolj zahtevna naloga. Na tem mestu bomo želeli kar najbolje oceniti kromatično število grafa, poiskati bomo želeli kar se da tesni zgornjo in spodnjo mejo za kromatično število  $\chi(G)$ .

Na tem mestu omenimo, da se lahko pri barvanju grafov *vedno* omejimo na povezane grafe. Če namreč graf  $G$  ni povezan, potem lahko točke grafa  $G$  obarvamo z zaporednim barvanje točk po vseh komponentah grafa  $G$ . Ravno tako je razlog za morebitno veliko kromatično število grafa  $G$  skrit v kateri izmed komponent, vsaj ena komponenta ora imeti veliko kromatično število. V nadaljevanju privzamemo, da so vsi grafi pod drobnogledom povezani.

Z  $\omega(G)$  označimo *velikost največje klike* (*velikost največjega polnega podgrafa*) v grafu  $G$ . Torej  $\omega(G)$  označuje velikost največje množice točk  $S$  grafa  $G$ , v kateri sta vsaki dve točki tudi sosedi. Vsekakor za barvanje točk grafa  $G$  potrebujemo vsaj toliko barv kot za barvanje točk iz  $S$ . Odtod spodnja meja za kromatično število.

**Trditev 1** *V vsakem grafu je  $\chi(G) \geq \omega(G)$ .*

### Požrešno barvanje

Z  $\Delta(G)$  označimo maksimalno stopnjo točke grafa  $G$ , z  $\delta(G)$  pa minimalno stopnjo točke iz grafa  $G$ . Maksimalna stopnja  $\Delta(G)$  bo tesno povezana z zgornjo mejo za velikost kromatičnega števila grafa  $G$ .

Točke grafa uredimo v zaporedje

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n \tag{1}$$

in jih zaporedoma barvamo v skladu z naslednjim postopkom (pri tem predpostavimo, da so točke z majhnimi indeksi obarvane z barvami  $c(v_1), c(v_2), \dots, c(v_{i-1})$ , preostale točke pa še niso obarvane):

točko  $v_i$  obarvamo z najmanjšo *prosto* barvo  $c(v_i)$ , pri čemer so proste barve tiste, ki niso uporabljene na kateri od obarvanih sosed točke  $v_i$ .

*Požrešno barvanje* je termin, ki ga v literaturi uporabljamo za zgoraj opisan postopek. Število uporabljenih barv je seveda odvisno od vrstnega reda točk (1), nikakor pa število uporabljenih barv ne presega  $\Delta(G) + 1$ .

**Trditev 2** *V vsakem grafu je  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .*

Dovolj je pokazati, da požrešno barvanje uporabi največ  $\Delta(G) + 1$  različnih barv.

Požrešno barvanje za barvo točke  $v_i$ ,  $c(v_i)$ , izbere najmanjšo prosto barvo. Število na obarvanih sosedah točke  $v_i$  uporabljenih barv je vsekakor manjše od števila obarvanih sosed točke  $v_i$ . Število

---

<sup>1</sup>NP-težak, a o teoriji računske zahtevnosti na tem mestu ne bi.

obarvanih sosed točke  $v_i$  je največ število vseh sosed točke  $v_i$  oziroma  $\deg(v_i)$ . Stopnja točke  $\deg(v_i)$  je navzgor omejena z maksimalno stopnjo  $\Delta(G)$ . To pomeni, da obarvane sosede točke  $v_i$  ne uporabijo vsaj ene izmed barv  $1, 2, \dots, \Delta(G) + 1$  in dokaz je zaključen.  $\square$

Število uporabljenih barv v požrešnem barvanju se lahko znatno razlikuje od kromatičnega števila grafa. Morda najbolj znan primer je graf  $G^* = K_{n,n} - M$ , poln uravnovežen dvodelni graf, ki mu odstranimo popolno prirejanje povezav:  $V(G^*) = \{v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , točki  $u_i$  in  $v_j$  sta sosedi natanko tedaj, ko je  $i \neq j$ . Če požrešno obarvamo točke grafa  $G^*$  vzdolž zaporedja točk

$$v_1, u_1, v_2, u_2, \dots, v_n, u_n$$

bo število uporabljenih barv enako  $n$ , medtem ko je  $\chi(G^*) = 2$ .

Zakaj takšna razlika? Zelo verjetno smo si *zaporedje* točk zelo nesrečno izbrali. Najbrž bi s premišljeno izbiro zaporedja točk lahko dosegli precej manjšo potrebo po različnih barvah. Smiselno je zahtevati, da točke majhne stopnje v grafu obarvamo šele na koncu, točke velikih stopenj pa na začetku — takrat bodo imele majhno število obarvanih sosed.

Najenostavnejša uporaba te paradigme se skriva v naslednji trditvi.

**Trditev 3** *Naj bo  $G$  povezan graf, v katerem obstaja točka  $v$  majhne stopnje  $\deg(v) < \Delta(G)$ . Potem je  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .*

Trdimo, da v grafu  $G$  velja naslednja lastnost. Naj bo  $H$  poljuben podgraf grafa  $G$ . Potem  $H$  vsebuje točke *majhne* stopnje  $< \Delta(G)$ .

Opazko je dovolj preveriti na induciranih podgrafih grafa  $G$ . Celoten graf  $G$  vsebuje točko majhne stopnje zaradi predpostavke trditve. Naj bo  $U \neq \emptyset$  prava podmnožica točk grafa  $G$ . Ker je  $G$  povezan, obstaja vsaj ena povezava z enim krajiščem v  $U$  in drugim krajiščem v  $V(G) \setminus U$ . Odtod sledi, da ima vsaj ena točka  $u \in U$  v induciranjem podgrafu  $G[U]$  strogo manjšo stopnjo kot v grafu  $G$ ,  $\deg_{G[U]}(u) < \deg_G(u) \leq \Delta(G)$ , in opazka je dokazana.

Trditev pripeljemo do konca z uporabo pošrešnega barvanja, pri katerem točko majhne stopnje obarvamo na koncu, preostanek grafa pa poprej rekurzivno.  $\square$

Naj bo  $G$  povezan graf. Točka  $v$  je *prerezna točka* ali *1-separator*, če graf  $G - v$  ni povezan. Analogno paru točk  $\{u, v\}$  pravimo *2-separator*, če graf  $G - u - v$  ni povezan.

**Trditev 4** *Naj bo  $G$  povezan graf, ki ima prerezno točko  $v$ . Potem je  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .*

Naj bo par  $G_1, G_2$  ustrezna separacija grafa  $G$  — za grafa  $G_1$  in  $G_2$  velja, da je  $G_1 \cup G_2 = G$  in  $V(G_1) \cap V(G_2) = \{v\}$ . Pri tem pa nobeden od  $G_1, G_2$  ni enak  $G$ . Ker je  $G$  povezan, ima točka  $v$  soseda tako v  $G_1$  kot v  $G_2$ . To pomeni, da je  $\deg_{G_1}(v) < \deg_G(v) \leq \Delta(G)$  in tudi  $\deg_{G_2}(v) < \deg_G(v) \leq \Delta(G)$ . Po Trditvi 3 obstajata barvanji  $c_1, c_2$  grafov  $G_1$  in  $G_2$  z največ  $\Delta(G)$  barvami. Z morebitnim preimenovanjem barv (permutacijo) lahko dosežemo, da se barvanji  $c_1$  in  $c_2$  ujemata v točki  $v$ . Unija barvanj  $c_1$  in  $c_2$  je potem barvanje grafa  $G$  z največ  $\Delta(G)$  barvami.  $\square$

## Brooksov izrek

Na tem mestu se lotimo glavnega rezultata v tem razdelku, Brooksovega izreka.

**Izrek 5 (Brooks)** *Naj bo  $G$  povezan graf. Če  $G$  ni niti poln graf niti cikel lihe dolžine, potem je  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .*

Naj bo  $G$  povezan graf in označimo  $\Delta = \Delta(G)$ . Če je  $\Delta = 1$ , potem je  $G$  izomorfen polnemu grafu na dveh točkah. Po Trditvah 3 in 4 lahko predpostavimo, da je  $G$   $\Delta$ -regularen graf brez prerezne točke.

Če je  $\Delta = 2$ , potem je  $G$  cikel, in je njegovo kromatično število enako  $\Delta(G) + 1 = 3$  natanko tedaj, ko je  $G$  cikel lihe dolžine. Zato v nadaljevanju privzamemo, da je  $\Delta \geq 3$  in da  $G$  ni poln graf.

Denimo, da v grafu  $G$  obstaja 2-separator  $\{x, y\}$ . Podobno kot v dokazu Trditve 4 z  $G_1, G_2$  označimo grafa, za katera velja  $G_1 \cup G_2 = G$ ,  $V(G_1) \cap V(G_2) = \{x, y\}$ , pri čemer niti  $G_1$  niti  $G_2$  nista enaka  $G$ . Ker  $G$  nima prereznih točk, imata obe točki separatorja  $x$  in  $y$  sosedi tako v  $G_1$  kot v  $G_2$ . Zato je  $\deg_{G_1}(x) < \deg_G(x) \leq \Delta$  in po Trditvi 3 obstaja  $\Delta$ -barvanje grafa  $G_1$ , analogno je z grafom  $G_2$ .

Toda barvanj grafov  $G_1$  in  $G_2$  v splošnem ne moremo sestaviti v  $\Delta$ -barvanje grafa  $G$  (tudi s permutacijo barv v enem od barvanj), saj morda eno izmed barvanj želi obarvati točki  $x$  in  $y$  z *isto* barvo, drugo pa zahteva, da sta  $x$  in  $y$  obarvani z različnima barvama. Treba bo biti malenkost bolj pazljiv.

Če sta točki  $x$  in  $y$  sosedi v grafu  $G$  ni težav. Povezava  $xy$  sme biti prisotna tako v  $G_1$  kot v  $G_2$ , obe  $\Delta$ -barvanji grafov  $G_1$  in  $G_2$  obarvata točki  $x$  in  $y$  z različnima barvama. S permutacijo barv lahko barvanji sestavimo v barvanje celotnega grafa  $G$ .

Torej privzamemo, da točki 2-separatorja  $x$  in  $y$  nista sosedi. Dodajmo povezavo  $xy$  v grafa  $G_1$  in  $G_2$ , dobljena grafa označimo z  $G_1^+$  in  $G_2^+$ . Za stopnjo točke  $x$  v obeh grafih velja ocena  $\deg_{G_1^+}(x) \leq \Delta$  in  $\deg_{G_2^+}(x) \leq \Delta$ , ista ocena velja tudi za stopnjo točke  $y$ . Toda  $\deg_{G_1^+}(x) = \Delta$  implicira, da ima točka  $x$  enega samega soseda  $x'$  v grafu  $G_2$ . Podobno, če je  $\deg_{G_2^+}(y) = \Delta$ , ima točka  $y$  enega samega soseda  $y'$  v grafu  $G_1$ . Zdaj pa opazujemo separatorje  $\{x, y\}$ ,  $\{x, y'\}$ ,  $\{x', y\}$  in  $\{x', y'\}$  (le tiste, kjer so ustrezne točke tudi definirane). Za vsaj enega od separatorjev velja, da tudi če dodamo povezavo med točkama separatorja, oba ustrezna dela separacije vsebujeta kakšno točko stopnje  $< \Delta$ . Po Trditvi 3 ju lahko obarvamo z  $\Delta$  barvami, barvanji pa s permutacijo sestavimo v  $\Delta$ -barvanje celotnega grafa  $G$ .

Slednjič privzamemo, da  $G$  ne vsebuje nobenega 2-separatorja. Naj bo  $u_0$  točka stopnje  $\Delta$  v grafu  $G$ . Ker  $G$  ni poln, vsaj dve izmed sosed točke  $u_0$ , imenujmo ju  $v_1$  in  $v_2$ , nista sosedi. Vemo tudi, da je  $G_0 = G - v_1 - v_2$  povezan graf. Zdaj se lotimo barvanja, točki  $v_1$  in  $v_2$  obarvajmo z isto barvo 1. Preostale točke grafa  $G$  uredimo po padajoči oddaljenosti v grafu  $G_0$  od točke  $u_0$  in jih barvamo požrešno. Katero barvo izberemo za točko  $u \neq u_0$ ? Vsaj ena od sosed točke  $u$  je še neobarvana, denimo tista, ki leži bližje  $u_0$  vzdolž najkrajše  $u - u_0$  poti. Torej obarvane sosede točke  $u$  uporabijo največ  $\Delta - 1$  barv. Na koncu obarvamo točko  $u_0$ . Ker sta dve njeni sosedi,  $v_1$  in  $v_2$  obarvani z isto barvo, je vsaj ena izmed  $\Delta$  barv prosta tudi za  $u_0$ .  $\square$