MOČ MNOŽIC ali NAMOČIMO PRST V NESKONČNI OCEAN

Orodja

Kako definirati moč neskončne množice? Za končne množice je odgovor enostaven: če je A končna množica, je njena moč $|A|$ enaka številu njenih elementov. Kako pa sploh ločimo končne množice od neskončnih?

Izkaže se, da štetje elementov ni najboljši način za ugotavljanje moči množic. Pri končnih množicah resda izčrpamo vso množico po istem številu korakov ne glede na vrstni red štetja elementov. Pri neskončnih množicah temu ni tako. Če naravna števila iz množice vseh naravnih števil $\mathbb{N}$ jemljemo po vrsti $0, 1, 2, 3, \ldots$ se zdi, da v *neskončnem številu korakov* pridelamo prazno množico. Če pa bi naravna števila odstranjevali v zaporedju $7, 8, 9, 10, \ldots$, se zdi, da nam jih na koncu nekaj ostane. Še huje: če jih odstranjujemo v zaporedju $1, 3, 5, 7, \ldots$, nam jih po neskončnem času še vedno ostane neskončno mnogo.

Štetje elementov torej ni pravi način za primerjanje moči neskončnih množic. Naslonimo se raje na preslikave med množicami.

Pravimo, da sta množici A in B *enako močni* ali da *imata isto moč*, če obstaja bijektivna preslikava $f : A \to B$. v tem primeru pišemo $|A| = |B|$. Ni se težko prepričati, da velja $|A| = |A|$, da iz $|A| = |B|$ sledi $|B| = |A|$, ustrezni sta kar id_A in k f inverzna preslikava. Ker je kompozitum bijektivnih preslikav znova bijektiven, iz $|A| = |B|$ in $|B| = |C|$ sledi tudi $|A| = |C|$.

Kaj pa če množici A in B nista enako močni? V tem primeru bijekcija med njima ne obstaja. Da se pokazati[1], da za poljubni množici A in B velja natanko ena od naslednjih treh možnosti:

(a) Obstaja bijektivna preslikava $f : A \to B$.

(b) Obstaja injektivna preslikava $f : A \to B$ in nobena preslikava $g : B \to A$ ni injektivna.

(c) Simetrično, obstaja injektivna preslikava $f : B \to A$ in nobena preslikava $g : A \to B$ ni injektivna.

Primer (a) smo obdelali, v tem primeru velja $|A| = |B|$. V primeru (b) pravimo, da je množica B *(po moči) močnejša od* množice A in pišemo $|A| < |B|$. V primeru (c) pravimo $|A| > |B|$.

Uporabiti smemo tudi oznako $|A| \leq |B|$, ki pomeni $\neg(|A| > |B|)$. To pomeni, da obstaja injektivna preslikava $f : A \to B$.

Nadalje pravimo, da je množica A *neskončna*, če je enako močna kot kakšna njena prava podmnožica. In, če množica ni neskončna, je *končna.*

Če je množica A končna, potem oznaka $|A| = n$ pomeni, da je A enako močna kot množica $\{1, \ldots, n\}$. Omenjeno dejstvo pa lahko preberemo tudi kot *A ima n elementov.*

Lahko se prepričamo, da se dosedanje definicije strinjajo z našo predstavo o moči končnih množic. Namreč, če sta A in B končni množici in velja $|A| = n$ in $|B| = m$ ter $|A| \leq |B|$

[1] z uporabo aksioma izbire

(obstaja injektivna preslikava iz A v B), potem velja tudi $n \leq m$ (število elementov množice A je manjše ali enako številu elementov množice B).

Z uporabo Dirichletovega principa moremo pokazati:

Izrek 1 $|A| < |B|$ *v primeru, ko je A končna in B neskončna množica.*

Dokazujemo s protislovjem. Denimo, da velja nasprotno, $|A| \geq |B|$. Potem obstaja injektivna preslikava $f : B \to A$. Ker je B neskončna, naj bo $g : B \to B'$ bijekcija, kjer je B' prava podmnožica B. Tedaj je $f \circ g \circ f^{-1}$ injektivna preslikava iz $\mathcal{Z}_f$ v $\mathcal{Z}_f$, ki ni surjektivna. Omenjeno preslikavo lahko razširimo do injektivne a ne surjektivne preslikave $h : A \to A$ s predpisom

$$h(a) = \begin{cases} a, \text{če } a \notin \mathcal{Z}_f \\ f(g(f^{-1}(a))), \text{če } a \in \mathcal{Z}_f \end{cases} .$$

To pa je v protislovju z Dirichletovim principom. ■

Potrebovali bomo še naslednje orodje, navedimo ga brez dokaza.

Izrek 2 [Cantor-Bernstein] *Množici A in B sta enako močni natanko tedaj, ko obstajata injektivni preslikavi $f : A \to B$ in $g : B \to A$.*

Če je f bijekcija med množicama A in B, potem je f, f^{-1} par ustreznih injektivnih preslikav. Vendar je bijektivno preslikavo med množicama A in B včasih težko najti, medtem ko par injektivnih preslikav poiščemo igraje. Premisli tudi, kaj Cantor-Bernsteinov izrek pove v primeru, ko sta A in B končni množici. Kakšna je v tem primeru preslikava $g \circ f$ iz Izreka 2?

Omenimo še, da je obstoj injektivne preslikave $f : A \to B$ enakovreden[2] obstoju surjektivne preslikave $g : B \to A$. Naj bo $f : A \to B$ injektivna preslikava in $a \in A$. Surjektivno preslikavo $g : B \to A$ lahko opišemo s predpisom

$$g(b) = \begin{cases} a, & \text{če } b \notin \mathcal{Z}_f \\ a', & \text{če } b \in \mathcal{Z}_f \text{ in je } f(a') = b. \end{cases} .$$

V primeru, ko je $g : B \to A$ surjektivna, pa injekcijo $f : A \to B$ dobimo tako, da za $f(a)$ izberemo katerikoli element iz praslike $g^{-1}(\{a\})$.

Za konec prvega razdelka navedimo še eno (intuitivno očitno) lastnost neskončnih množic.

Trditev 3 *Naj bo A neskončna množica in $a_0, a_1, \ldots, a_n$ njeni elementi, pri čemer je n naravno število. Potem je množica $A \setminus \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ neprazna, še več, neskončna.*

Potenčna množica

Takorekoč prototip rezultata o moči množic je naslednji izrek.

Izrek 4 *Naj bo A poljubna množica in $\mathcal{P}A$ njena potenčna množica. Velja $|A| < |\mathcal{P}A|$.*

[2] znova potrebujemo aksiom izbire

Če je A končna množica, je $\mathcal{P}A$ tudi končna, in če je $|A| = n$, potem je $|\mathcal{P}A| = 2^n$. Za dokaz Izreka 4 v primeru končnih množic je potrebno pokazati, da za vsa naravna števila velja neenakost $n < 2^n$. Poskusite sami, morda z indukcijo in zelo grobim ocenjevanjem.

Zgodba je v primeru neskončnih množic popolnoma drugačna. Pokazati je potrebno, prvič, da obstaja injektivna preslikava $f : A \to \mathcal{P}A$ in, drugič, da nobena preslikava $f' : \mathcal{P}A \to A$ ni injektivna. Alternativno smemo pokazati, da ne obstaja surjektivna preslikava $g : A \to \mathcal{P}A$.

Prvi del je relativno enostaven. Definirajmo preslikavo $f : A \to \mathcal{P}A$ s predpisom $f(a) = \{a\}$. Vsakemu elementu množice A priredimo singleton, množico z enim elementom, ki vsebuje natančno dotični element.

Drugi del dokazujemo s protislovjem. Privzemimo, da je $g : A \to \mathcal{P}A$ surjektivna. Vsakemu elementu $a \in A$ ustreza njegova g-slika, $g(a) \subseteq A$. Pravimo, da je $a \in A$ *slab*, če $a \notin g(a)$, podobno rečemo, da je $a \in A$ *dober*, če $a \in g(a)$. Z S označimo množico vseh slabih elementov, $S \subseteq A$. Ker je g surjektivna preslikava obstaja $s \in A$ za katerega je $g(s) = S$.

Kakšne sorte pa je $s \in A$? Je dober ali slab? Če je s slab, potem $s \in S$, ker je S množica slabih elementov. Toda potem je s tudi dober, ker $s \in g(s) = S$. Če pa je s dober, potem mora biti vsebovan v svoji g-sliki $g(s)$. Ampak, ker je $g(s) = S$ množica slabih elementov, je s tudi slab. Protislovju se ne moremo izogniti, torej je naša predpostavka, da obstaja surjektivna preslikava $g : A \to \mathcal{P}A$ napačna.

Dokaz Izreka 4 je s tem zaključen. ■

Uf. Če si predstavljamo zaporedje neskončnih množic $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}\mathbb{N}$, $\mathcal{P}\mathcal{P}\mathbb{N}$, $\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\mathbb{N}$, $\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\mathbb{N}, \ldots$ je vsaka naslednja po moči močnejša od prejšnih. Razdelek sklenimo s tezo. Obstaja neskončno mnogo različnih neskončnosti in ena je večja od druge.

Številne množice

V tem razdelku bomo po moči primerjali nekaj dobro znanih številskih množic: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$. Zdi se nam, da je naravnih števil manj kot celih, le-teh manj kot racionalnih in slednjih manj kot vseh realnih števil, že zato, ker velja $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. V splošnem, če je $A \subseteq B$, potem je $|A| \leq |B|$, saj je vložitev $i : A \to B$, $i(a) = a$, injektivna preslikava.

Trditev 5 $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{R}|$.

Pravo vprašanje, ki si ga je potrebno zastaviti pa je, (samo kot primer) ali je $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ ali pa morda $|\mathbb{N}| < |\mathbb{Z}|$.

Poskusimo poiskati injektivno preslikavo $z : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$. Z nekaj premisleka ni posebej težko. Denimo, da negativna števila preslikamo v soda števila, pozitivna števila pa v liha števila. Bolj natančno

$$z(x) = \begin{cases} -2x, & \text{če } x \leq 0 \\ 2x - 1, & \text{če } x > 0 \end{cases}$$

je iskana injektivna preslikava. Po Cantor-Bernsteinovemu izreku (Izrek 2) je $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$. Omenjeno dejstvo niti ni tako presenetljivo. Preslikava $z : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ je celo bijekcija. Vsa cela števila smo prešteli (preslikali v naravna števila) v naslednjem vrstnem redu $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$

V resnici velja celo naslednja, nekoliko presenetljiva, trditev. Tudi racionalnih števil v resnici ni nič več kot naravnih števil.

Trditev 6 $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$

Želimo poiskati surjektivno preslikavo $q : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. Začeli bomo z iskanjem surjektivne preslikave $q^+ : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{Q}^+$, kjer je $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ in $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Vsako strogo pozitivno racionalno število lahko zapišemo kot ulomek dveh strogo pozitivnih naravnih števil. Pare (ulomke) naravnih števil uredimo v neskončno tabelico.

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \frac{2}{6} & \cdots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{6} & \cdots \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \frac{4}{6} & \cdots \\
\frac{5}{1} & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} & \frac{5}{6} & \cdots \\
\frac{6}{1} & \frac{6}{2} & \frac{6}{3} & \frac{6}{4} & \frac{6}{5} & \frac{6}{6} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array} \tag{1}$$

Elemente tabelice 1 *uredimo* po diagonalah — naraščajočih vsotah števca in imenovalca —

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \ldots,$$

kar definira surjektivno preslikavo $q^+ : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{Q}^+$.

Surjektivno preslikavo, ki zaključuje dokaz Trditve 6, $q : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ potem zapišemo takole:

$$q(x) = \begin{cases} q^+(x), & \text{če } x > 0 \\ -q^+(-x), & \text{če } x < 0 \\ 0, & \text{če } x = 0 \end{cases}$$

Omenimo še, da preslikava q^+ ni bijektivna, saj velja $q^+(2) = \frac{1}{2}$ in tudi $q^+(12) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. ■

Pravimo, da je množica A *števno neskončna*, če je njena moč enaka moči množice naravnih števil $\mathbb{N}$. Množice $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ so števno neskončne. Nadalje, pravimo, da je množica A *števna*, če je ali končna ali števno neskončna. Množica A je *neštevna*, če ni števna. Takšna je na primer množica $\mathcal{P}\mathbb{N}$.

Z metodo diagonalnega štetja (štetje v tabelici (1)) zmoremo pokazati naslednji izrek.

Izrek 7 *Naj bo $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ števna družina števnih množic: I naj bo števna indeksna množica in za vsak indeks $i \in \mathcal{I}$ naj bo A_i števna množica. Potem je*

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$$

števna množica.

Kot smo že omenili dokaz poteka z diagonalnim štetjem. Surjektivno preslikavo $f : \mathbb{N} \to \bigcup \mathcal{A}$ konstruiramo s preštevanjem (1) podobne tabelice.

Za vsako izmed množic A_i z f_i označimo bijektivno preslikavo $f_i : N_i \to A_i$, kjer je N_i ali $\mathbb{N}$ ali pa množica $\{0, \ldots, n_i\}$ pri nekem $n_i \in \mathbb{N}$. Elemente množic A_i znova zložimo v (morda neskončno) tabelico. Ker je tudi $\mathcal{I}$ števna z $i : N_{\mathcal{I}} \to \mathcal{I}$ označimo izbrano bijekcijo med množico (morda ne vseh) naravnih števil in $\mathcal{I}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
f_{i(0)}(0) & f_{i(0)}(1) & f_{i(0)}(2) & f_{i(0)}(3) & f_{i(0)}(4) & f_{i(0)}(5) & \dots \\
f_{i(1)}(0) & f_{i(1)}(1) & f_{i(1)}(2) & f_{i(1)}(3) & f_{i(1)}(4) & f_{i(1)}(5) & \dots \\
f_{i(2)}(0) & f_{i(2)}(1) & f_{i(2)}(2) & f_{i(2)}(3) & f_{i(2)}(4) & f_{i(2)}(5) & \dots \\
f_{i(3)}(0) & f_{i(3)}(1) & f_{i(3)}(2) & f_{i(3)}(3) & f_{i(3)}(4) & f_{i(3)}(5) & \dots \\
f_{i(4)}(0) & f_{i(4)}(1) & f_{i(4)}(2) & f_{i(4)}(3) & f_{i(4)}(4) & f_{i(4)}(5) & \dots \\
f_{i(5)}(0) & f_{i(5)}(1) & f_{i(5)}(2) & f_{i(5)}(3) & f_{i(5)}(4) & f_{i(5)}(5) & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array} \tag{2}$$

Pazi, tabelica (2) morda nima neskončno mnogo vrstic, ravno tako niso nujno vse vrstice neskončno dolgo. ■

Kot posledico Izreka 7 navedimo naslednji trditvi.

Trditev 8 *Naj bosta množici A in B števni. Potem je tudi $A \times B$ števna. Za vsako naravno število n je $A^n = A \times A \times \cdots \times A$ (n faktorjev, vsi enaki A) tudi števna množica.*

Očitno je $|A| = |A \times \{b_0\}|$. Kartezični produkt $A \times B$ lahko zapišemo kot števno unijo števnih množic

$$A \times B = \bigcup_{b \in B} A \times \{b\},$$

kar je po Izreku 7 števna množica.

$A^2 = A \times A$ je po ravno dokazani lastnosti števna. Za višje eksponente dokazujemo induktivno: $A^n = A^{n-1} \times A$ je kartezični produkt dveh števnih množic. ■

Trditev 9 *Družina vseh* končnih *množic naravnih števil je števna.*

Označimo opisano množico z K. Množico K lahko zapišemo kot (števno) neskončno unijo

$$K = \bigcup_{n=0}^{\infty} N_n,$$

kjer N_n označuje družino vseh množic naravnih števil z natanko n elementi. Po Izreku 7 je dovolj pokazati, da je pri poljubnem $n \in \mathbb{N}$ tudi množica N_n števna.

Nič lažjega, uporabimo Trditev 8. Če števila v množici naravnih števil z n elementi uredimo po velikosti, dobimo *urejeno* n-terico naravnih števil. Na tak način definiramo injektivno preslikavo iz N_n v $\mathbb{N}^n$. Zato je N_n števna in dokaz je končan. ■

Na podoben način pokažemo, da je tudi *končnih zaporedij* naravnih števil "le" števno mnogo.

Prepišimo še Trditev 3 v jezik števnih množic.

Trditev 10 *Vsaka neskončna množica A vsebuje števno neskončno podmnožico $A' \subseteq A$.*

Neštevne množice

V matematiki veljajo neštevne množice za velike, neobvladljive. Toliko bolj se jim radi izognemmo pri računalništvu. V teoriji množic pa se prava zabava začne šele z neštevnimi množicami.

V tem razdelku bomo pokazali, da je množica realnih števil $\mathbb{R}$, za razliko od $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$, neštevna. Najprej pa se moramo dogovoriti, kaj sploh so realna števila.

Omejimo se za začetek na interval $I = [0, 1)$. Vsako realno število $x \in I$ lahko zapišemo z neskončnim zaporedjem decimalk. Decimalni zapis števila x je enoličen, če zahtevamo, da v zaporedju decimalnih cifer od nekega mesta naprej ne nastopajo same devetice. Vemo namreč, da je $0{,}39999\overline{9} = 0{,}40000\overline{0}$. Navedimo naslednjo trditev:

Trditev 11 *Vsako realno število $x \in [0, 1)$ lahko na enoličen način zapišemo kot decimalno število*

$$x = 0{,}x_0x_1x_2x_3x_4x_5x_6\ldots,$$

kjer so decimalne cifre $x_0, x_1, x_2, \ldots \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$ in je neskončno mnogo decimalnih cifer različnih od 9. Pri tem bomo končno decimalno število nasledili z neskončnim zaporedjem ničel.

Naših deset prstov je v resnici razlog, zakaj realna števila zapisujemo z decimalno številko. Kot računalničarji se raje odločimo za zapis v dvojiškem sistemu, z dvojiškimi ciframi za celoštevilsko (in ne decimalno) vejico:

Trditev 12 *Vsako realno število $x \in [0, 1)$ lahko na enoličen način zapišemo v dvojiškem številskem sestavu*

$$x = 0{,}b_0b_1b_2b_3b_4b_5b_6\ldots_{(2)},$$

kjer so dvojiške cifre $b_0, b_1, b_2, \ldots \in \{0, 1\}$ in je neskončno mnogo dvojiških cifer različnih od 1.

V dvojiškem zapisu, podobno kot v desetiškem, velja $0{,}01111\overline{1}_{(2)} = 0{,}10000\overline{0}_{(2)}$.

Trditvi 11 in 12 bomo uporabili, da pokažemo naslednji izrek.

Izrek 13 *Množici $[0, 1)$ in $\mathcal{P}\mathbb{N}$ sta enako močni.*

Poiščimo najprej injektivno preslikavo iz $[0, 1)$ v $\mathcal{P}\mathbb{N}$. Izberimo poljubno število $x \in [0, 1)$ in ga zapišimo v dvojiškem sestavu $x = 0{,}b_0b_1b_2b_3b_4b_5b_6\ldots_{(2)}$ kot opisuje Trditev 12. Množico $A_x \subseteq \mathbb{N}$, sliko realnega števila x sestavimo v skladu dvojiškimi ciframi števila x. Če je $b_n = 1$, naj $n \in A_x$; če pa je $b_n = 0$, potem naj $n \notin A_x$. Tako definirana preslikava iz $[0, 1)$ v $\mathcal{P}\mathbb{N}$ je injektivna.

Kaj pa injektivna preslikava iz $\mathcal{P}\mathbb{N}$ v $[0, 1)$. Podmnožico $A \subseteq \mathbb{N}$ znova opišemo z zaporedjem ničel in enic $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$. Pri tem $x_n = 1$ pomeni, da $n \in A$, in, analogno, iz $x_n = 0$ sledi $n \notin A$. Realno število $x_A \in [0, 1)$, sliko množice A, pridelamo, če $0{,}x_0x_1x_2x_3\ldots$ interpretiramo kot decimalno število (*pazi: v desetiškem sistemu*). Tako definirana preslikava je injektivna.

Po Izreku 2 velja $|\mathcal{P}\mathbb{N}| = |[0, 1)|$. ■

V literaturi mnogokrat zasledimo naslednji dokaz dejstva $|\mathbb{N}| < |[0, 1)|$.

Denimo, da obstaja surjektivna preslikava $f : \mathbb{N} \to [0,1)$. Torej je $x_n = f(n)$ realno število iz intervala $[0,1)$. Omenjena števila zapišimo v decimalnem zapisu v skladu s Trditvijo 11 in zložimo v stolpec:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0{,}x_{00}x_{01}x_{02}x_{03}x_{04}x_{05}x_{06}\ldots \\ x_1 &= 0{,}x_{10}x_{11}x_{12}x_{13}x_{14}x_{15}x_{16}\ldots \\ x_2 &= 0{,}x_{20}x_{21}x_{22}x_{23}x_{24}x_{25}x_{26}\ldots \\ x_3 &= 0{,}x_{30}x_{31}x_{32}x_{33}x_{34}x_{35}x_{36}\ldots \\ x_4 &= 0{,}x_{40}x_{41}x_{42}x_{43}x_{44}x_{45}x_{46}\ldots \\ x_5 &= 0{,}x_{50}x_{51}x_{52}x_{53}x_{54}x_{55}x_{56}\ldots \\ x_6 &= 0{,}x_{60}x_{61}x_{62}x_{63}x_{64}x_{65}x_{66}\ldots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3}$$

Definirajmo novo zaporedje cifer:

$$y_n = \begin{cases} 0, & \text{če } x_{nn} > 0 \\ 1, & \text{če } x_{nn} = 0 \end{cases}$$

Decimalno število $y = 0{,}y_0y_1y_2y_3\ldots$ ne vsebuje neskončnega zaporedja devetic in se od vsakega x_n ($n \in \mathbb{N}$) razlikuje v vsaj eni decimalki. Zato za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $y \neq x_n$. To pa je v protislovju z dejstvom, da je f surjektivna preslikava. ■

Ravnokar uporabljeni metodi dokazovanja pravimo tudi *diagonalni argument*. Pozoren bralec bo opazil analogijo z dokazom Izreka 4.

Z naslednjim izrekom primerjamo po moči različne vrste intervalov.

Izrek 14 *Če je $a < b$, potem so množice (a,b), $[a,b)$, $[a,b]$, (a,∞), $[a,\infty)$ in $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ enako močne.*

Izberimo poljubni realni števili $a, b \in \mathbb{R}$, pri čemer naj bo $a < b$. Zaradi vsebovanosti množic velja

$$|(a,b)| \le |[a,b)| \le |[a,b]| \le |[a,\infty)| \le \mathbb{R}. \tag{4}$$

Po drugi strani je preslikava $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ bijekcija, zato velja $|\mathbb{R}| = |(-\pi/2,\pi/2)|$.

Nazadnje pridelamo bijektivno preslikavo iz $(-\pi/2,\pi/2)$ v (a,b) s predpisom

$$x \mapsto \frac{b-a}{\pi} \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right) + a.$$

Torej lahko znake $\le$ v zvezi (4) nadomestimo z enakostmi $=$ in dokaz Izreka 14 je zaključen. ■

Kaj lahko povemo o kartezičnih produktih v primeru realnih števil? Ni presenetljivo, podobno kot v primeru naravnih števil, velja naslednja trditev.

Trditev 15 *Množici $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sta enako močni. Še več, za vsako naravno število $n \ge 1$ je $|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|$.*

Upoštevamo, da je $|[0,1)| = |\mathbb{R}|$. Bralcu prepustimo drugi del dokaza, ki ga izdelamo natanko tako kot v dokazu Trditve 8. Za dokaz prvega dela je potrebno premisliti, da je $|[0,1) \times [0,1)| = |[0,1)|$.

Dovolj je pokazati, da obstaja injektivna preslikava q iz kartezičnega produkta $[0,1) \times [0,1)$ v $[0,1)$. Urejen par realnih števil (x,y) zapišimo z decimalkami $x = 0{,}x_0x_1x_2x_3\ldots$, $y = 0{,}y_0y_1y_2y_3\ldots$ in ga preslikajmo v realno število $z = 0{,}x_0y_0x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots$. Tako definirana preslikava je injektivna in dokaz je končan. ■

Množice preslikav

V tem razdelku si nas bo zanimala moč družine preslikav $|A^B|$. Za pozabljive, z A^B označimo množico preslikav $\{f \mid f : B \to A\}$. Če ima množica A en sam element, je $|A^B| = 1$ pri vsaki neprazni množici B.

Že malo večja zaloga vrednosti popolnoma spremeni situacijo.

Izrek 16 *Za poljubno množico B je $|\{0,1\}^B| = |\mathcal{P}B|$.*

Vsaki množici $B' \subseteq B$ namreč ustreza karakteristična preslikava $\chi_{B'} : B \to \{0,1\}$. ■

Zaporedje naravnih števil $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ni nič drugega kot preslikava $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pri čemer namesto $a(n)$ največkrat pišemo a_n. Koliko pa je vseh zaporedij naravnih števil, elementov množice $\mathbb{N}^\mathbb{N}$?

Trditev 17 $|\mathbb{N}^\mathbb{N}| = |\mathcal{P}\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$.

Izrek 16 trdi $|\mathcal{P}\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}^\mathbb{N}|$, saj lahko vsako podmožico $\mathbb{N}$ opazujemo kot zaporedje, katerega vsi členi so 0 ali 1. Po drugi strani pa lahko vsako zaporedje naravnih števil skrijemo v eno samo realno število z intervala $[0,1)$. Kako?

$$1,2,0,2,4,3,6,1,\ldots \mapsto 0{,}0\,1\,00\,1\,1\,00\,1\,0000\,1\,000\,1\,000000\,1\,0\,1\,\ldots \tag{5}$$

Poskali smo torej injektivno preslikavo $\mathcal{P}\mathbb{N} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$ in injektivno preslikavo $\mathbb{N}^\mathbb{N} \to [0,1)$. S sklicem na Izrek 13 je dokaz končan. ■

Navedimo še neposredno posledico Izreka 16 in Trditve 17.

Posledica 18 *Za vsako števno množico A, ki ima vsaj dva elementa, je $|A^\mathbb{N}| = |\mathcal{P}\mathbb{N}|$.*

Kaj pa zaporedja realnih števil? Kakšna je moč množice $\mathbb{R}^\mathbb{N}$?

Trditev 19 $|\mathbb{R}^\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$

Ker je $|\mathbb{R}| = |[0,1)|$ lahko opazujemo zaporedja realnih števil s členi iz intervala $[0,1)$. Vsako realno število $x \in [0,1)$ lahko preslikamo v konstantno zaporedje $x,x,x,x,x,\ldots$, kar porodi injektivno preslikavo iz $[0,1)$ v množico $[0,1)^\mathbb{N}$.

Injektivno preslikavo iz $[0,1)^{\mathbb{N}}$ v $[0,1)$ pa konstruiramo z reciklirano idejo. Izberimo zaporedje števil $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ in jih zapišimo kot decimalna števila.

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0{,}x_{00}x_{01}x_{02}x_{03}x_{04}x_{05}x_{06}\ldots \\
x_1 &= 0{,}x_{10}x_{11}x_{12}x_{13}x_{14}x_{15}x_{16}\ldots \\
x_2 &= 0{,}x_{20}x_{21}x_{22}x_{23}x_{24}x_{25}x_{26}\ldots \\
x_3 &= 0{,}x_{30}x_{31}x_{32}x_{33}x_{34}x_{35}x_{36}\ldots \\
x_4 &= 0{,}x_{40}x_{41}x_{42}x_{43}x_{44}x_{45}x_{46}\ldots \\
x_5 &= 0{,}x_{50}x_{51}x_{52}x_{53}x_{54}x_{55}x_{56}\ldots \\
x_6 &= 0{,}x_{60}x_{61}x_{62}x_{63}x_{64}x_{65}x_{66}\ldots \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{6}$$

Iz takšnega zaporedja po diagonalah preberemo eno samo realno število

$$x = 0{,}x_{00}x_{10}x_{01}x_{20}x_{11}x_{02}x_{30}x_{21}x_{12}x_{03}\ldots.$$

Enostavno se prepričamo, da v zapisu števila x ne nastopajo skoraj same devetice. Tudi ta preslikava iz $[0,1)^{\mathbb{N}}$ v $[0,1)$ je injektivna. ■

Razdelek končajmo s preslikavami iz množice realnih števil. Koliko je preslikav iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{N}$ in koliko je preslikav iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$? Gotovo vsaj toliko kot preslikav iz $\mathbb{R}$ v $\{0,1\}$. Po Izreku 16 je slednja množica enako močna kot $\mathcal{P}\mathbb{R}$.

Izrek 20 $|\mathbb{N}^{\mathbb{R}}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = \mathcal{P}\mathbb{R}\,(= |\{0,1\}^{\mathbb{R}}|)$

Zaradi vsebovanosti $\{0,1\}^{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ je dovolj poiskati injektivno preslikavo $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \{0,1\}^{\mathbb{R}}$.

Vsaka realna preslikava $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je relacija v $\mathbb{R}$, resda posebne vrste. Vsaka relacija v $\mathbb{R}$ je podmnožica kartezičnega produkta $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ki jo lahko enačimo s preslikavo iz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ v $\{0,1\}$. Ker pa obstaja bijekcija med $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, glej Trditev 15, obstaja tudi bijektivna preslikava iz $\{0,1\}^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ v $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$.

Kompozitum omenjenih preslikav porodi injektivno preslikavo iz $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ v $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$. ■

Utrinek iz teoretičnega računalništva

Vsak program v vašem priljubljenem programskem jeziku (denimo `C`, `C++`, Java, ipd.) lahko zapišemo kot končno zaporedje ničel in enic. Denimo z ASCII kodami znakov. Končnih zaporedij ničel in enic pa je le števno mnogo. Glej Izrek 7 in upoštevaj, da je zaporedij ničel in enic dolžine n natanko 2^n, kar je končno mnogo.

Izrek 21 *Množica sintaktično pravilnih* `C`*-jevskih (vstavi svoj priljubljeni programski jezik, če ti* `C` *ne ustreza) programov je števno neskončna.*

Realno število je *izračunljivo*, če ga lahko izračunamo (na primer izpišemo) v idealiziranem računalniku (modelu računanja) s C-jevskim programom (ali programom napisanim v kateremkoli drugem jeziku).

Obstoječi računalniki so za naše potrebe premajhni. Vsak izmed obstoječih računalnikov (ali pa vsi skupaj) imajo na voljo samo končno mnogo spominskih celic in vanje lahko shranimo samo *končno* mnogo `C`-jevskih programov. Naj nam idealni računalnik — model računanja — pomeni računalnik, ki mu nikoli ne zmanjka spomina.

Vseeno pa zahtevamo, da `C`-jevski program vsebuje samo končno mnogo znakov kode.

Izračunati število pomeni izpisati ga na ekran, pri čemer dovolimo neskončno dolgo trajajoče izpisovanje posameznih decimalk tega števila.

Toda samo nekateri `C`-jevski programi izpišejo (izpisujejo) realno število. Vseeno je tudi takšnih števno neskončno. Ker pa je realnih števil neštevno mnogo, lahko sklenemo.

Izrek 22 *Obstajajo neizračunljiva realna števila.*

Kaj obstajajo. "Velika večina" realnih števil je neizračunljivih.

Vprašanja za zvedave

Za ogrevanje pokaži naslednjo trditev.

(0) Naj bo A števno neskončna množica in B števna množica. Potem je tudi $A \cup B$ števno neskončna množica.

V prejšnjih razdelkih smo pokazali, da je družina vseh podmnožic množice naravnih števil neštevna. Prav tako smo pokazali, da je končnih podmnožic množice $\mathbb{N}$ samo števno mnogo. Navedimo pa nekaj vprašanj iz vmesnega prostora, prvo je le za ogrevanje.

(1) Naj bo $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ družina podmnožic naravnih števil, ki so paroma disjunktne: $A_i \cap A_j = \emptyset$, če je $i \neq j$. Je lahko $\mathcal{A}$ neštevna ali je v vsakem primeru števna?

(2) Naj bo $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ družina podmnožic naravnih števil, pri čemer so preseki po dveh množic iz družine končni, pa vendar omejeni po številu elementov. To pomeni, da obstaja $n \in \mathbb{N}$, da za vsak par različnih indeksov $i, j \in \mathcal{I}$ velja $|A_i \cap A_j| \leq k$. Je lahko $\mathcal{A}$ neštevna ali je v vsakem primeru števna?

(3) Še tretje vprašanje. Znova naj bo $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ družina podmnožic naravnih števil, pri čemer so preseki po dveh množic iz družine končni. To pomeni, da je za vsak par različnih indeksov $i, j \in \mathcal{I}$ množica $|A_i \cap A_j|$ končna. Je v tem primeru lahko $\mathcal{A}$ neštevna ali je nujno števna?

Pri dokazovanju, da sta množici enako močni, smo v kar nekaj primerih uporabili Cantor-Bernsteinov izrek in poiskali med množicama par injektivnih preslikav namesto ene bijekcije. Bi šlo morda brez tega orodja?

(4) Poišči bijektivno preslikavo iz $(0,1)$ v $[0,1)$. Takšna preslikava gotovo ne bo elementarna.

(5) Ali je preslikava $q : [0,1) \times [0,1) \to [0,1)$, definirana v zadnjem odstavku dokaza Trditve 15 celo bijektivna?

(6) V literaturi poišči dokaz Cantor-Bernsteinovega izreka.

Se morda spremeni moč množice, če namesto množice realnih preslikav $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ opazujemo množico realnih funkcij. Ali pa opazujemo podmnožico množice vseh realnih preslikav?

(7) Kolikšna je moč množice vseh realnih funkcij? Se moč množice res strogo poveča, če poleg realnih preslikav (realne funkcije z definicijskim območjem enakim $\mathbb{R}$) v množico pridružimo še takšne funkcije, katerih definicijska območja so prave podmnožice $\mathbb{R}$?

(8) Kaj pa množica vseh relacij v $\mathbb{R}$? Kakšna je njena moč? Je enaka moči množice $\mathcal{P}\mathbb{R}$ ali je celo močnejša? Smo na to vprašanje že odgovorili?

(9) Kakšna pa je moč množice $\{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ in } f \text{ zvezna}\}$? Kako pa bi opisal zvezno (in povsod definirano) funkcijo? So funkcijske vrednosti zvezne funkcije čisto poljubne ali pa morda med njimi veljajo kakšne zveze?