Osnove matematične analize

Dvanajsti sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

24. december 2020

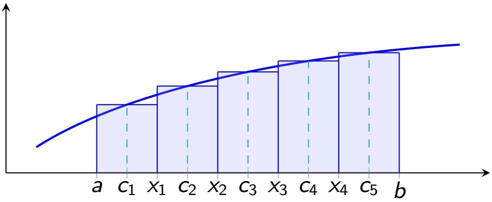
Določeni integral

- Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija. Radi bi izračunali ploščino območja med x-osjo in grafom $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$.
- Interval $[a, b]$ razdelimo na n intervalov $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$,

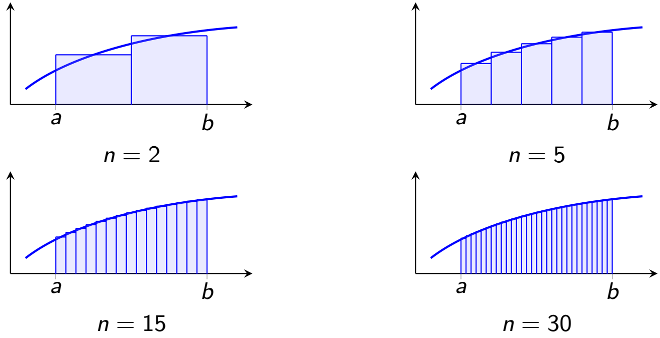
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Označimo širino k-tega intervala $[x_{k-1}, x_k]$ z $\delta_k = x_k - x_{k-1}$. Izberemo vmesne točke na vsakem od intervalov $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ in definiramo **Riemannovo vsoto**

$$I_f(\{x_0, \ldots, x_n\}; \{c_1, \ldots, c_n\}) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\delta_k.$$



Če je funkcija f zvezna in pozitivna, je v limiti, ko gre $n \to \infty$, je stolpčast lik čedalje bolj podoben liku pod grafom.



Določen integral funkcije $f : [a, b]$ je število $I \in \mathbb{R}$, za katerega velja, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da za vse Riemannove vsote $I_f(\{x_0, \ldots, x_n\}, \{c_1, \ldots, c_n\})$, ki zadoščajo $\delta_k < \delta$ za vsak $k = 1, \ldots, n$, velja

$$|I_f(\{x_0, \ldots, x_n\}, \{c_1, \ldots, c_n\}) - I| < \epsilon.$$

Posebej definiramo $\int_a^a f(x)\, dx = 0$ in $\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$.

Funkciji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, za katero določen integral $I \in \mathbb{R}$ obstaja, pravimo **integrabilna** funkcija. Integral I pa označimo z $\int_a^b f(x)\, dx$.

Trditev. Če je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna, potem je omejena.

Dokaz. Če f ne bi bila omejena, potem bi za poljubno delitev $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ intervala $[a, b]$ in poljubno število $N \in \mathbb{N}$ obstajala točka c_k, ki bi zadoščala, da je $f(c_k)\delta_k > N$. To pa pomeni, da zaporedja $I_f(\{x_0, \ldots, x_n\}, \{c_0, \ldots, c_n\})$ ne konvergirajo z $\delta_k \to 0$. To pa je protislovje.

Trditev. Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija. Velja:

- Če je f zvezna, potem je integrabilna.
- Če je f monotona, potem je integrabilna.
- Naj bo $m = \inf\{f(x) \colon x \in [a, b]\}$ in $M = \sup\{f(x) \colon x \in [a, b]\}$. Naj bo $g : [m, M] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Če je f integrabilna na $[a, b]$, potem je $g \circ f$ tudi integrabilna na $[a, b]$.

Posledica. Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Potem so na $[a, b]$ integrabilne tudi funkcije f^n, $n \in \mathbb{N}$, in $|f|$.

Dokaz. Če za g v zadnji alineje prejšnje trditve vzamemo $g(x) = x^n$, sklepamo, da je f^n integrabilna. Če pa vzamemo $g(x) = |x|$, sklepamo še, da je $|f|$ integrabilna.

Trditev. Naj bosta funkciji $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilni. Potem so integrabilne tudi funkcije $f + g$, λf za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ in fg.

Trditev. Naj bosta funkciji $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilni. Velja

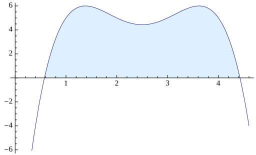
- $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$.
- $\int_a^b \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx$ za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$.
- $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$ za vsak $c \in [a, b]$.
- Če je $f(x) \geq 0$ za vsak $x \in [a, b]$, potem je $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$.
- Če je $f(x) \leq g(x)$ za vsak $x \in [a, b]$, potem je $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$.
- Če je f liha, je $\int_{-a}^a f(x)\, dx = 0$.
- Če je f soda, je $\int_{-a}^a f(x)\, dx = 2 \int_0^a f(x)\, dx$.
- Če je $m = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ in $M = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$, je

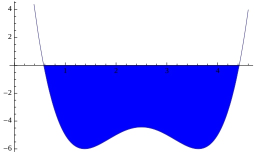
$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b - a).$$

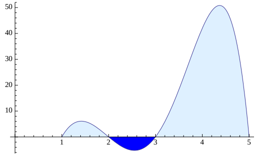
Zveza s ploščino

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija in P_1 ploščina dela grafa nad osjo x in P_2 ploščina grafa pod osjo x. Integral je enak **predznačeni ploščini**, tj.

$$\int_a^b f(x)\,dx = P_1 - P_2.$$

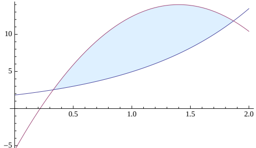






Ploščina med grafoma $y = f(x)$ in $y = g(x)$, kjer je $f(x) \geq g(x)$ za $x \in [a, b]$, je enaka

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

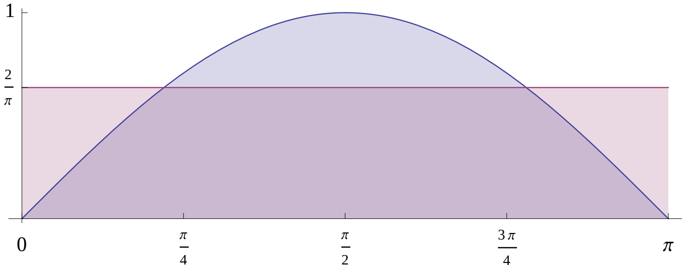


Povprečna vrednost funkcije

Povprečna vrednost funkcije f na intervalu $[a, b]$ je

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

μ je višina pravokotnika z osnovnico $[a, b]$, ki ima ploščino enako kot območje pod grafom $y = f(x)$.



Izrek Če je funkcija $f(x)$ na $[a, b]$ zvezna, obstaja taka točka $c \in [a, b]$, da je $f(c) = \mu$ in zato

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

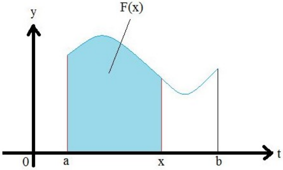
Zveza med določenim in nedoločenim integralom

Osnovni izrek integralskega računa: Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna. Potem velja:

1. Funkcija $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom
$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$
je zvezna.

2. Če je f zvezna v točki $x \in (a, b)$, potem je F v x odvedljiva in velja
$$F'(x) = f(x).$$

3. Če je f zvezna na (a, b), potem je F njen nedoločen integral.



Dokaz.

- Ker je f integrabilna, obstaja zgornja meja M funkcije $x \mapsto |f(x)|$ na intervalu $[a, b]$. Velja

$$\left|F(x') - F(x)\right| = \left|\int_a^{x'} f(t)\, dt - \int_a^{x} f(t)\, dt\right| = \left|\int_x^{x'} f(t)\, dt\right|$$

$$\leq \begin{cases} \displaystyle\int_x^{x'} |f(x)\, dt, & \text{če } x' \geq x, \\ \displaystyle\int_{x'}^{x} |f(x)\, dt, & \text{če } x' < x. \end{cases} = M|x - x'|.$$

Za fiksen $\epsilon > 0$ definiramo $\delta = \frac{\epsilon}{M}$. Po zgornji oceni za vsak $x, x' \in [a, b]$, ki zadoščata $|x - x'| < \delta$, sledi

$$|F(x') - F(x)| < M\delta = M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

Torej je F zvezna v poljubni točki $x \in [a, b]$.

- Naj bo f zvezna v točki x. Izračujamo diferenčni kvocient:

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(x)+f(t)-f(x))\,dt\\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt + \frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\,dt\\ &= f(x) + \frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\,dt.\end{aligned}$$

Sledi

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| = \frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\,dt.$$

Ker je f zvezna v x, za fiksen $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da iz $|t-x| \leq \delta$ sledi $|f(t)-f(x)| \leq \epsilon$. Za vsak $0 \leq h \leq \delta$ iz zgornje ocene sledi, da velja

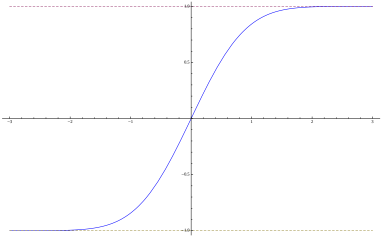
$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\epsilon\,dt = \frac{1}{h}\epsilon h = \epsilon.$$

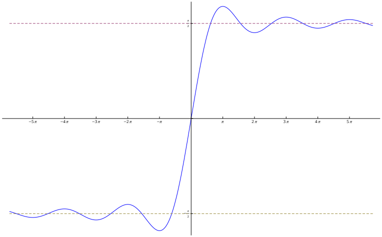
Analogen račun velja za $h < 0$. Torej je F odvedljiva v x in velja $F'(x) = f(x)$.

Posledica. Vsaka zvezna funkcija ima svoj nedoločeni integral.

Dobimo vrsto novih, neelementarnih funkcij, na primer:

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt \quad \text{funkcija napake (leva),}$$
$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt \quad \text{integralski sinus (desna) :}$$





Računanje določenega integrala

Newton-Leibnitzova formula: Naj bo f takšna integrabilna funkcija na $[a, b]$, ki ima na $[a, b]$ neko primitivno funkcijo G. Potem velja

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b.$$

Dokaz (v primeru, ko je f zvezna).

- Po osnovnem izreku integralskega računa velja, da je $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ primitivna funkcija od f.
- Velja $F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$ in $F(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$.
- Ker sta F in G primitivni funkciji od f, obstaja konstanta C, da je $(F - G)(x) = C$ za vsak $x \in [a, b]$.
- Sledi

$$G(b) - G(a) = (F(b) - C) - (F(a) - C) = F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Pravila za računanje določenih integralov

Vpeljava nove spremenljivke. Če je u zvezno odvedljiva na $[a, b]$ ter f zvezna na $\mathcal{Z}_u$, potem je

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du.$$

Integriranje po delih. Če sta u, v odvedljivi na $[a, b]$, potem je

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Primeri:

1. $$\int_0^2 \frac{x^3}{1+x^4}\,dx = \int_1^{17} \frac{du}{4u} = \frac{1}{4}(\log(17) - \log 1) = \frac{\log(17)}{4},$$

   kjer smo uporabili substitucijo $u(x) = 1 + x^4$ in zato $u(2) = 17$, $u(0) = 1$.

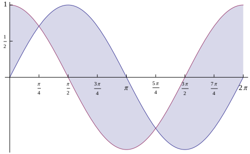
2.

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^4 \log x \, dx &= \left[\log x \cdot \frac{x^5}{5}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^5}{5} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \left[\log 2 \cdot \frac{2^5}{5} - \log 1 \cdot \frac{1}{5}\right] - \left[\frac{x^5}{25}\right]_1^2 \\ &= \log 2 \cdot \frac{32}{5} - \frac{32}{25} + \frac{1}{25} = \frac{160 \cdot \log 2 - 31}{25}.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int_0^3 |x^2 - 4| \, dx &= \int_0^2 (4 - x^2)| \, dx + \int_2^3 (x^2 - 4) \, dx \\ &= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_2^3 \\ &= \left[8 - \frac{8}{3}\right] + \left[\frac{27}{3} - 12 - \frac{8}{3} + 8\right] \\ &= \frac{23}{3}.\end{aligned}$$

4. Določimo ploščino enega od likov med krivuljama $y = \sin x$ in $y = \cos x$.

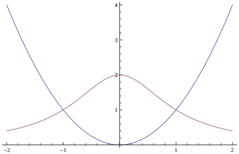


- Poiščimo presečišča krivulj. $\sin x = \cos x \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Izberimo $x_1 = \frac{\pi}{4}$ in $x_2 = \frac{5\pi}{4}$.
- Ker je $\sin x \geq \cos x$ na intervalu $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$, nas zanima:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\, dx = [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 2\sqrt{2}.$$

5. Določimo ploščino omejenega lika med krivuljama $y = x^2$ in $y = \frac{2}{1+x^2}$.

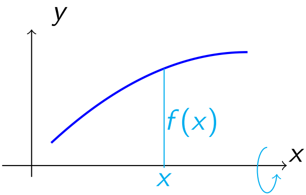


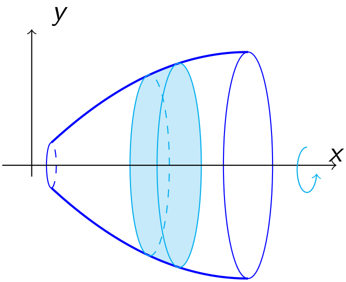
- Poiščimo presečišča krivulj. $x^2 = \frac{2}{1+x^2} \iff x^2(1+x^2) = 2$. Pišimo $x^2 = u$. Rešujemo enačbo $u(1+u) = 2$ oz. $0 = u^2 + u - 2 = (u+2)(u-1)$. Rešitev $u = -2$ ni smiselna, saj je x^2 nenegativen. Sledi $x^2 = 1$ oz. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.
- Ker je $\frac{2}{1+x^2} \geq x^2$ na intervalu $[-1, 1]$, nas zanima:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{1+x^2} - x^2 \right) \, dx &= \left[2 \arctan x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} \\ &= \left[2 \arctan 1 - \frac{1}{3} - 2 \arctan(-1) + \frac{-1}{3} \right] \\ &= 4 \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} = \pi - \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Prostornine teles

- Prostornina telesa, ki ima za vsak $x \in [a, b]$ ploščino preseka z ravnino, vzporedno koordinatni yz-ravnini in ima konstanten x, enako $S(x)$, je enaka
$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$
- Prostornina telesa, ki ga dobimo, če lik pod krivuljo $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$, $0 \leq a \leq x \leq b$, zavrtimo okrog osi x je
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\ dx.$$





Primer. Izračunajmo volumen **torusa**, dobljenega z vrtenjem krožnice $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ okrog osi x.

- Če si narišemo krožnico, vidimo, da x teče v mejah od 0 do 2. Opazimo, da moramo od volumna telesa, ki ga dobimo z vrtenjem zgornje polkrožnice okrog x-osi, odšteti volumen telesa, ga dobimo z vrtenjem spodnje polkrožnice okrog x-osi.

- Zgornja polkrožnica je funkcija $y_2(x) = 2 + \sqrt{1-(x-1)^2}$, spodnja polkrožnica pa funkcija $y_1(x) = 2 - \sqrt{1-(x-1)^2}$.

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^2 (y_2(x))^2 \, dx - \pi \int_0^2 (y_1(x))^2 \, dx \\
&= \pi \left(\int_0^2 (2 + \sqrt{1-(x-1)^2})^2 \, dx - \int_0^2 (2 - \sqrt{1-(x-1)^2})^2 \, dx \right) \\
&= \pi \left(\int_0^2 (4 + 4\sqrt{1-(x-1)^2} + 1 - (x-1)^2) \, dx \right) \\
&- \pi \left(\int_0^2 (4 - 4\sqrt{1-(x-1)^2} + 1 - (x-1)^2) \, dx \right) \\
&= 8\pi \left(\int_0^2 \sqrt{1-(x-1)^2} \, dx \right) = 8\pi \left(\int_\pi^0 \sqrt{\sin^2\varphi} (-\sin\varphi) \, d\varphi \right) \\
&= 8\pi \left(\int_0^\pi \sin^2\varphi \, d\varphi \right) = 8\pi \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi \right]_0^\pi = 4\pi^2.
\end{aligned}
$$

kjer smo v peti enakosti uvedli substitucijo $x - 1 = \cos\varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$.