Osnove matematične analize

Trinajsti sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

7. januar 2021

Integral neomejene funkcije

- Naj bo f definirana na intervalu $(a, b]$ in neomejena v okolici točke a, tj. za vsak $\delta > 0$ je f neomejena na okolici $(a, a+\delta)$. Naj bo f integrabilna na vsakem intervalu $[a+\delta, b]$, kjer je $\delta > 0$. Potem definiramo
$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\delta \to 0^+} \int_{a+\delta}^b f(x)\,dx,$$
če obstaja limita na desni strani.
- Naj bo f definirana na intervalu $[a, b)$ in neomejena v okolici točke b, tj. za vsak $\delta > 0$ je f neomejena na okolici $[a, b-\delta)$. Naj bo f integrabilna na vsakem intervalu $[a, b-\delta]$, kjer je $\delta > 0$. Potem definiramo
$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\delta \to 0^+} \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx,$$
če obstaja limita na desni strani.
- Naj bo $c \in (a, b)$, f pa definirana na intervalu $[a, b] \setminus \{c\}$ in neomejena v okolici točke c, tj. za vsak $\delta > 0$ je f neomejena na okolici $(c-\delta, c+\delta)$. Naj bo f integrabilna na vsakem intervalu $[a, c-\delta]$ in $[c+\delta, b]$, kjer je $\delta > 0$. Potem definiramo
$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$
če obstajata limiti na desni strani.

Če kateri od zgornjih integralov obstaja, potem pravimo, da **posplošeni integral** $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergira. Sicer divergira.

Primer.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}\left[\log|x|\right]_\delta^1 = \lim_{\delta\to 0^+}(\log 1 - \log\delta).$$

Posplošeni integral $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ divergira.

Primer.

$$\int_0^1 \log x\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^1 \log x\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}\left[x\log x - x\right]_\delta^1 = \lim_{\delta\to 0^+}(-1-\delta\log\delta+\delta)$$
$$= -1 - \lim_{\delta\to 0^+}\frac{\log\delta}{\frac{1}{\delta}} = -1 - \lim_{\delta\to 0^+}\frac{\frac{1}{\delta}}{-\frac{1}{\delta^2}} = -1,$$

kjer smo v predzadnji enakosti uporabili L'Hospitalovo pravilo.

Primer.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\delta_1\to 0^+}\int_{-1}^{-\delta_1} \frac{1}{x}\,dx + \lim_{\delta_2\to 0^+}\int_{\delta_2}^1 \frac{1}{x}\,dx$$
$$= \lim_{\delta_1\to 0^+}\left[\log|x|\right]_{-1}^{-\delta_1} + \lim_{\delta_2\to 0^+}\left[\log|x|\right]_{\delta_2}^1$$
$$= \lim_{\delta_1\to 0^+}(\log|\delta_1| - \log 1) + \lim_{\delta_2\to 0^+}(\log 1 - \log|\delta_2|).$$

Posplošeni integral $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ divergira.

Izrek. Naj bo g zvezna funkcija na $[a, b]$.

- Integral $\int_a^b \frac{g(x)}{(x-a)^s}\, dx$ obstaja, če je $s < 1$. Če je $s \geq 1$ in $g(a) \neq 0$, integral ne obstaja.
- Integral $\int_a^b \frac{g(x)}{(b-x)^s}\, dx$ obstaja, če je $s < 1$. Če je $s \geq 1$ in $g(b) \neq 0$, integral ne obstaja.

Primer. Ali integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx$ obstaja?
Definiramo $g(x) = \cos x$. Ker je $s = \frac{1}{2}$, $g(0) = 1 \neq 0$, po izreku integral obstaja.

Primer. Ali integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{x}\, dx$ obstaja?
Definiramo $g(x) = \cos x$. Ker je $s = 1$, $g(0) = 1 \neq 0$, po izreku integral obstaja.

Primer. Ali integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx$ obstaja?
Definiramo $g(x) = \frac{\sin x}{x}$. Ker je $s = \frac{1}{2}$ in $\lim_{x \to 0+} g(0) = 1 \neq 0$, lahko g zvezno razširimo v točki $x = 0$, in po izreku integral obstaja.

Integral na neomejenem intervalu

- Naj bo f definirana na intervalu $[a, \infty)$ in integrabilna na vsakem končnem podintervalu $[a, b]$. Potem definiramo

  $$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\, dx,$$

  če obstaja limita na desni strani.

- Naj bo f definirana na intervalu $(-\infty, b]$ in integrabilna na vsakem končnem podintervalu $[a, b]$. Potem definiramo

  $$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\, dx,$$

  če obstaja limita na desni strani.

- Naj bo f definirana na $\mathbb{R}$ in integrabilna na vsakem končnem podintervalu $[a, b]$. Potem definiramo

  $$\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx = \int_{-\infty}^c f(x)\, dx + \int_c^\infty f(x)\, dx$$

  kjer je c poljubno realno število.

Primer.

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+1) = 1.$$

Primer. Za katere α obstaja integral $\displaystyle\int_1^\infty x^\alpha\,dx$

$$\int_1^\infty x^\alpha\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^\alpha\,dx = \begin{cases} \displaystyle\lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^b, & \alpha\neq -1,\\ \displaystyle\lim_{b\to\infty}\left[\log x\right]_1^b, & \alpha = -1,\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{\alpha+1}\left(\lim_{b\to\infty} b^{\alpha+1}-1\right), & \alpha\neq -1,\\ \displaystyle\left(\lim_{b\to\infty}\log b - \log 1\right), & \alpha = -1,\end{cases}$$

Integral $\displaystyle\int_1^\infty x^\alpha\,dx$ obstaja za $\alpha < -1$ in je enak $-\frac{1}{\alpha+1}$.

Primer. Gabrijelov rog dobimo z vrtenjem krivulje $y=\frac{1}{x}$ na intervalu $[1,\infty)$ okrog osi x. Pokaži, da je volumen roga končen.

$$V = \pi\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \pi\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \pi\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \pi\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}+1\right] = \pi.$$

Izrek. Naj bo g zvezna in omejena funkcija na $[a, \infty)$. Integral

$$\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^s}\, dx, \quad a > 0$$

obstaja, če je $s > 1$. Če je za nek $c < \infty$, $|g(x)| \geq m > 0$ za vsak $x > c$ in je $s \leq 1$, integral ne obstaja.

Funkcija Gamma. $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt, \quad \mathcal{D} = (0, \infty)$

- $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$,
- za $n \in \mathbb{N}$ velja $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Definicijsko območje lahko razširimo na $\mathbb{R} - \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$.