Poglavje 1

Zahtevnost

1.1 Asimptotska notacija

Naloga 1

Naj bo $f(n) = 876n$, definirana za $n \geq 0$. Po definiciji pokaži, da velja $f(n) = O(n^3)$.

Odgovor 1

Naj bosta $k = 876$ in $n_0 = 0$. Če izbrani konstanti vstavimo v definicijo, dobimo neenakost

$$\forall n > 0 : 876n \leq 876n^3,$$

ki se poenostavi v

$$\forall n > 0 : 1 \leq n^2,$$

kar je očitno res, s čimer smo dokazali začetno trditev.

Naloga 2

Naj bo f funkcija, za katero velja $f(n) \geq 0$ za $n >= 0$. Pokaži, da velja $42f(n) = \Theta(f(n))$.

Odgovor 2

Naj bosta $k = 40$ in $n_0 = 1$. Če izbrani konstanti vstavimo v definicijo, dobimo neenakost

$$\forall n > 1 : 42f(n) \geq 40f(n),$$

ki se poenostavi v $42 \geq 40$, s čimer smo dokazali začetno trditev.

Trditev lahko dokažemo tudi z izračunom limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{42f(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} 42 = 42.$$

Ker za 42 velja $0 < 42 < \infty$, je trditev dokazana.

Naloga 3

Pokaži, da velja $\ln n = O(n)$.

Odgovor 3

Trditev bomo dokazali z izračunom limite.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \overset{LH}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ker velja $0 < \infty$, je trditev dokazana.

Naloga 4

Pokaži, da velja

$$f(n) = \Omega(g(n)) \wedge f(n) = O(g(n)) \Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$$

Naloga 5

Naj bo $n_0 > 0$ poljubna konstanta ter naj bosta f in g funkciji, za kateri velja $f(n) \geq g(n)$, če je $n > n_0$. Pokaži, da tedaj velja tudi

$$O(f(n) + g(n)) = O(f(n)).$$

Naloga 6

Naj bodo a, b in n realna števila, večja od 0. Dokaži veljavnost oz. neveljavnost nalsednje trditve:

$$a^n = O(b^n).$$