INVERZNA MATRIKA (obstaja le za nekatere kvadratne matrike)

Def: Matrika $A \in \mathbb{R}^{\boxed{n\times n}}$ je obrnljiva, če obstaja $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da velja

$$A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A .$$

V nasprotnem primeru je A neobrnljiva.

Če A obrnljiva, matriko A^{-1} imenujemo inverz matrike A.

Primer: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Ali je A obrnljiva?

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$0 = 1 \quad \rightarrow\leftarrow \qquad \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ni obrnljiva}$$

Če $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva: obstaja taka X $\quad AX = I$.

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix}$$

$$e_j = \begin{bmatrix} \\ 1 \\ \\ \end{bmatrix} \leftarrow j \in \mathbb{R}^n$$

$$A X^{(j)} = I^{(j)} = e_j$$

za vsak stolpec $X^{(j)}$: $A \cdot X^{(j)} = e_j$: $[A \mid e_j] \xrightarrow{G.e} \dots$ rešitev $X^{(j)}$

za $j = 1, 2, \dots, n$ — A isti — spreminjamo le desno stran

vedno isti A

$$n\overbrace{[\underset{n}{A} \mid \underset{n}{I}]}^{2n} = [A \mid e_1 e_2 \dots e_n] \xrightarrow{G.e} \text{če } \left[\underset{I_n}{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}} \;\middle|\; B \right] : \boxed{I_n \cdot X = B}$$

$\boxed{A \cdot X = I_n}$ $\qquad$ $\boxed{X = B}$ rešitev

hkrati rešimo n linearnih sistemov
$A X^{(1)} = e_1,\ A X^{(2)} = e_2, \dots,\ A X^{(n)} = e_n$

Če je rang $A = n$, potem matrika na desni strani zelo razširjene matrike po G.e. reši enačbo $A \cdot X = I_n$.

Denimo $AX = I_n$ in $YA = I_n$.

$$X = I_n \cdot X = (YA)X \underset{\substack{\uparrow \\ \text{asociativnost}}}{=} Y(AX) = Y \cdot I_n = Y$$

$\Rightarrow X = Y$.

V posebnem:
- $AX = I_n \Rightarrow X = A^{-1}$.
- Če $AX = XA = I_n$ in $AY = YA = I_n \Rightarrow X = Y$

  $\Rightarrow$ inverz matrike je en sam.

Algoritem za računanje inverza matrike $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Na celo razširjeni matriki $[A \mid I] \in \mathbb{R}^{n \times (2n)}$ izvajamo Gaussovo eliminacijo po vrsticah

- Če $\operatorname{rang} A < n \Rightarrow A$ ni obrnljiva
- Če $\operatorname{rang} A = n$:

$$[A \mid I] \longrightarrow [I \mid A^{-1}]$$

Primer: 1) Ali je matrika $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ obrnljiva? Če da, izračunajmo njen inverz.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{v_3 \leftarrow v_3 - 2v_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{v_3 \leftarrow v_3 - 2v_2}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$\operatorname{rang} A = 3 \Rightarrow A$ je obrnljiva

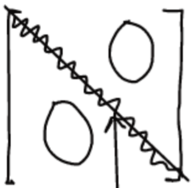
$v_3 \leftarrow -v_3$, $v_1 \leftarrow v_1 + 2v_3$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

I_3 $\quad = A^{-1}$

② Kdaj je diagonalna matrika obrnljiva?

Matrika D je diagonalna, če so njeni edini neničelni elementi na diagonali.



diagonala matrike

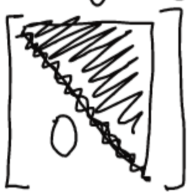
$$\left[\begin{matrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}\right] \begin{matrix} /:d_1 \\ /:d_2 \\ \vdots \\ /:d_n \end{matrix} \longrightarrow \left[\begin{matrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} \frac{1}{d_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{d_n} \end{matrix}\right]$$

Če $d_1 \neq 0, \dots, d_n \neq 0$, potem je $\operatorname{rang} D = n$ in zato je D obrnljiva.

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix},$$ če $d_i \neq 0$ za $i = 1, \dots, n$.

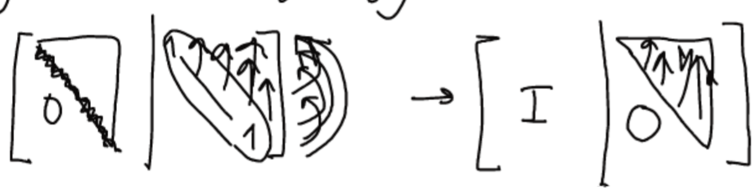
(zg△)

③ Matrika je zgornje trikotna, če so njeni elementi pod diagonalo enaki 0.



Zg△ je obrnljiva, če so vsi njeni diagonalni elementi neničelni.

Inverz zg△ matrike je zg△ matrika.



Uporaba in lastnosti inverzov:

(1) Če $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva, ter $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$:

$$A^{-1} \cdot \backslash \quad \boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$$

PAZI! množimo z leve

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

$$\underbrace{(A^{-1}A)}_{=I_n}\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{x} = A^{-1}\vec{b}}$$

je edina rešitev

(2) A, B obrnljivi matriki, $A, B, C, X \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Izrazimo X iz enakosti

$$A^{-1} \cdot \backslash \quad AXB = C \quad / B^{-1}$$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{=I_n} X \underbrace{BB^{-1}}_{=I_n} = A^{-1}CB^{-1}$$

$$X = A^{-1}CB^{-1}$$

(3) Če je v sistemu $A\vec{x} = \vec{b}$ desna stran enaka $\vec{b} = \vec{0}$, potem sistem $A\vec{x} = \vec{0}$ imenujemo homogeni sistem.

- homogeni sistem ima gotovo vsaj eno rešitev $\vec{x} = \vec{0}$ ($\vec{x} = \vec{0}$ je trivialna rešitev sistema)
- če A obrnljiva: $A^{-1} \cdot \backslash \; A\vec{x} = \vec{0}$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$$

$\Downarrow$

$\vec{0}$ je edina rešitev

obrat? Če $\vec{0}$ edina rešitev $A\vec{x} = \vec{0}$, potem je rang $A = n \Rightarrow A$ je obrnljiva

Torej smo dokazali: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

A je obrnljiva $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ rang $A = n$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\vec{0}$ edina rešitev homogenega sistema $A\vec{x} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ Sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ ima natanko eno rešitev (pri poljubnem $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$)

(4) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva matrika

$$A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$$

Kaj je $(A^{-1})^{-1}$? $\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$

(5) Če sta in $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljivi, potem je $AB \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

dokaz: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A\underbrace{(BB^{-1})}_{=I}A^{-1} = A\, I A^{-1} = \underbrace{AA^{-1}}_{=I} = I$

$$\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Lastnosti transponirane matrike

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$ $\qquad A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

(3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

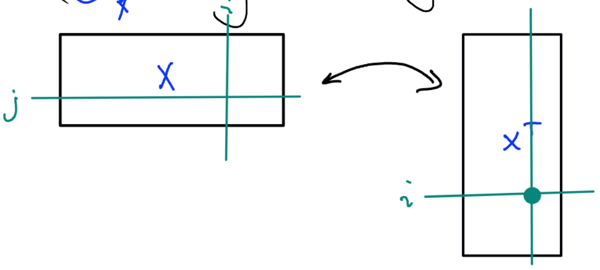
(4) $(AB)^T = B^T A^T$ $\qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times p}$

dokaz: $A = [A_{ij}]^{m\times n}$, $B = [B_{ij}]^{n\times p}$, $(AB) = [(AB)_{ij}]$

$$(\underbrace{(AB)^T}_{X})_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} B_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (A^T)_{kj} (B^T)_{ik} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (B^T)_{ik} (A^T)_{kj}$$

$$= (B^T A^T)_{ij}$$



(5) A obrnljiva $\Rightarrow$ A^T obrnljiva in $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

dokaz: A obrnljiva $\Rightarrow$ $A \cdot A^{-1} = I_n \quad /^T$

$$(A \cdot A^{-1})^T = I_n^T$$

po (1):

$$\boxed{(A^{-1})^T} \cdot \boxed{A^T} = I_n$$

inverz (A^T)

$(A^T)^{-1}$ $\qquad A^T$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$