# 3. VEKTORSKI PROSTORI

## 3.1 Definicija in primeri

motivacija: $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}, \quad \alpha \vec{x} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Za vsaka $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, za vsaka $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (komutativnost
   $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ asociativnost)
2. za $\vec{0}$ velja $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ ($\vec{0}$ nevtralni elt za +)
3. za vsak $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ obstaja $-\vec{x}$, da velja $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
   nasprotni vektor
4. $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
5. $\alpha(\beta \vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$
6. $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$ (distributivnosti)
   $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$

množenje z realnimi števili/skalarji

**Definicija:** (Realni) vektorski prostor $V$ je množica elementov, ki jih imenujemo vektorji $v \in V$, skupaj z dvema notranjima operacijama:

- seštevanje vektorjev $+$ $(u, v \in V \Rightarrow u + v \in V)$
- množenje vektorjev s skalarji (realnimi števili) $\cdot$ $(u \in V, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot u \in V)$

z lastnostmi:

1. $u + v = v + u$
   $u + (v + w) = (u + v) + w$
2. $u + 0 = u$ (0 je ničelni vektor in je en sam)
3. za $\forall u$ $\exists (-u)$ ($-u$ je nasprotni vektor vektorja $u$)
   $u + (-u) = (-u) + u = 0$
4. $1 \cdot u = u$
5. $(\alpha \cdot \beta) u = \alpha(\beta u)$
6. $(\alpha + \beta) u = \alpha u + \beta u$
7. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

$\forall u, v, w \in V$ in $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Primeri:

① $\mathbb{R}^n$ $\qquad 0=\vec{0}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$

$+$ po komponentah

$\cdot$ po komponentah

② $\mathbb{R}^{m\times n}$ (matrike z $m$ vrsticami in $n$ stolpci)

$+,\ \cdot$ (po elementih)

$$0=\begin{bmatrix}0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{m\times n}$$

③ $\mathcal{C}(a,b)$ ... zvezne funkcije $f:(a,b)\to\mathbb{R}$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x) \qquad \text{za } \forall x\in(a,b)$$

notranji operaciji ✓

lastnosti 1-6: 1 ✓

2: ničelna funkcija: $e(x)=0$
$e\equiv 0$

3: nasprotna funkcija?
$-f=(-1)\cdot f$

4-6: ✓

$\mathcal{C}(a,b)$ vektorski prostor

④ $\mathbb{R}_n[x]$ ... množica vseh polinomov največ stopnje $n$, z realnimi koeficienti

$$\left.\begin{aligned}p(x)&=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\\ q(x)&=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0\end{aligned}\right]$$

$$(p+q)(x)=(a_n+b_n)x^n+\ \ldots\ +(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$$
$$(\alpha p)(x)=(\alpha a_n)x^n+\ \ldots\ +(\alpha a_1)x+\alpha a_0$$

$\mathbb{R}_n[x]$ je vektorski prostor (preveri za DN.)

⑤ množica vseh polinomov stopnje $n$ NI vektorski prostor

⑥ $\mathbb{R}_0^+=[0,\infty)$ ni vektorski prostor ($\cdot$ z negativnimi števili ni notranja)

V vsakem vektorskem prostoru V velja:

① $u, v \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{\alpha u}_{\in V} + \underbrace{\beta v}_{\in V} \in V$$

→ vsaka linearna kombinacija vektorjev iz V je tudi v V

Def: Za $v_1, \dots, v_n \in V$ imenujemo $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ linearna kombinacija vektorjev $v_1, \dots, v_n$.

② $v \in V$, $0 \in \mathbb{R}$ (= realno število 0) $\Rightarrow \underbrace{0 \cdot v}_{\in V} = \mathbf{0}^{\in V}$

PAZI! $\in \mathbb{R}$ $\in V$

(zakaj?

$$0 \cdot v \overset{0=0+0}{=} (0+0)\cdot v \overset{\text{distr.}}{=} 0\cdot v + 0 \cdot v \quad / + (-\,0\cdot v)$$

$$\underbrace{0\cdot v + (-0\cdot v)}_{\mathbf{0}} = 0 \cdot v + \underbrace{(0\cdot v + (-0v))}_{\mathbf{0}}$$

asoc, naspr. elt

$$\mathbf{0} = 0\cdot v + \mathbf{0}$$

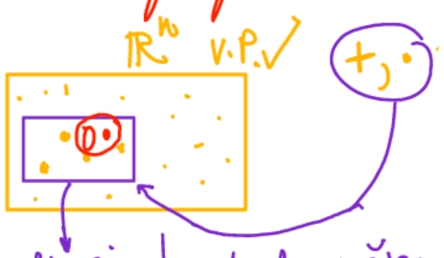
$$\mathbf{0} = 0 \cdot v$$

$$0\cdot v = \mathbf{0} \quad )$$

③ $\mathbf{0} \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\alpha \cdot \underset{V}{\mathbf{0}} = \underset{V}{\mathbf{0}}$ (dokažite doma za vajo)

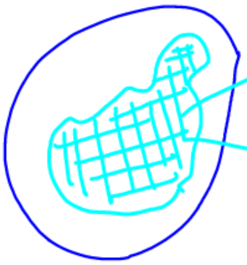
④ Če $\alpha v = \mathbf{0}$, potem $\alpha = 0$ ali $v = \mathbf{0}$.

## 3.2. Vektorski podprostori




ali je ta podmnožica vektorskega prostora tudi vektorski prostor?

**Definicija:** Naj bo $V$ nek vektorski prostor.
Podmnožica $U \subseteq V$ je vektorski podprostor v $V$, če



V

1) $u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$
(+ je notranja operacija v $U$)

2) $u \in U,\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u \in U$
($\cdot$ je notranja operacija v $U$)

Vprašanja? • Ali vsak vekt. podpr. vsebuje ničelni vektor?

DA: $u \in U \Rightarrow \mathbf{0} = 0 \cdot u \underset{\text{po } 2)}{\in} U$

(! Če neka množica NE vsebuje ničelnega vektorja, potem ta NI vektorski (pod)prostor.)

• Ali ima vsak vektor v vektorskem podprostoru tudi nasprotni element v tem vekt. podprostoru?

DA: $u \in U \Rightarrow -u = (-1)u \in U$

$\Rightarrow$ Vsak vektorski podprostor je tudi vektorski prostor.

Primer: ① Ali je $A = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ -y \\ -x \end{bmatrix} ; x, y \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$ vekt. prostor?

JE vekt. prostor

$u, v \in A$, $u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -y \\ -x \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} z \\ w \\ -w \\ -z \end{bmatrix}$

• Želimo: $u + v \in A$

$$u + v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -y \\ -x \end{bmatrix} \underset{\text{v } \mathbb{R}^4}{+} \begin{bmatrix} z \\ w \\ -w \\ -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ y+w \\ -y+(-w) \\ -x+(-z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ y+w \\ -(y+w) \\ -(x+z) \end{bmatrix} \in A$$

• Želimo: $\alpha u \in A$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha u = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ -\alpha y \\ -\alpha x \end{bmatrix} \in A$$

$\Rightarrow A$ je vekt. podpr. v $\mathbb{R}^4 \Rightarrow A$ je vekt. prostor.

Trditev: $U$ podmnožica vektorskega prostora $V$. Naslednji trditvi sta ekvivalentni:

a) $U$ zaprt za seštevanje in množenje s skalarjem ($\Leftrightarrow$ $U$ vekt. podprostor v $V$.)

b) $U$ zaprt za linearne kombinacije $\left( \begin{array}{c} u_1, u_2 \in U \\ \Downarrow \\ \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in U \end{array} \right)$

dok: a) $\Rightarrow$ b) že vemo

b) $\Rightarrow$ a) $u_1, u_2 \in U$. Vemo: $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in U$ za vsak $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

- ali $u_1 + u_2 \in U$? DA! ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$)
- ali $\alpha_1 u_1 \in U$? DA! ($\alpha_2 = 0$)

Primer ①: Pokažite, da je $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^4$ vekt. prostor s pomočjo te trditve:

$u_1, u_2 \in \mathcal{A}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in \mathcal{A}$.

POKAŽITE (DN)

② Definicija: Za matriko $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pravimo, da je simetrična, če velja $A^T = A$.

$(A = [a_{ij}]: \quad a_{ij} = a_{ji})$

primer: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

Ali je množica $\mathcal{S}_n = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} ; A^T = A \}$ vektorski prostor?

Način a)

- $A, B \in \mathcal{S}_n$. Želimo pokazati, da $A + B \in \mathcal{S}_n$.

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$

$\left. \begin{array}{l} A^T = A \\ B^T = A \end{array} \right\}$ $\qquad (A+B)^T = A + B$

$(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$

$\Rightarrow (A+B)^T = A + B$

$\Rightarrow A + B \in \mathcal{S}_n$

- $A \in \mathcal{S}_n$. Želimo pokazati, da $\alpha A \in \mathcal{S}_n$.

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$

$A^T = A$ $\qquad (\alpha A)^T = \alpha A$

$(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T = \alpha A \Rightarrow (\alpha A)^T = \alpha A$

$\Rightarrow \alpha A \in \mathcal{S}_n$

$\Rightarrow \mathcal{S}_n$ je vekt. podprostor v $\mathbb{R}^{n \times n}$

Način b): $A, B \in \mathcal{S}_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Želimo pokazati $\alpha A + \beta B \in \mathcal{S}_n$.

$A^T = A$, $B^T = B$

$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A + \beta B$

$$\begin{aligned}(\alpha A+\beta B)^T &= (\alpha A)^T + (\beta B)^T = \\ &= \alpha A^T + \beta B^T \\ &= \alpha A + \beta B\end{aligned}$$

$\Rightarrow (\alpha A + \beta B)^T = \alpha A + \beta B$

$\Rightarrow \alpha A + \beta B \in \mathcal{S}_n$

$\Rightarrow \mathcal{S}_n$ vekt. podprostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$

(3) Ali je $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ vektorski podprostor?

Način 1: $\underset{\in \mathcal{B}}{\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix}} + \underset{\in \mathcal{B}}{\begin{bmatrix} 1 \\ c \\ d \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2 \\ a+c \\ b+d \end{bmatrix} \notin \mathcal{B}$ $\Rightarrow \mathcal{B}$ ni zaprta za $+$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ ni vekt. prostor

Način 2: $2 \cdot \underset{\in \mathcal{B}}{\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2a \\ 2b \end{bmatrix} \notin \mathcal{B}$ $\Rightarrow \mathcal{B}$ ni zaprta za $\cdot$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ ni vekt. prostor

Način 3: $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \mathcal{B}$ $\Rightarrow \mathcal{B}$ ne vsebuje ničelnega vektorja

$\Rightarrow \mathcal{B}$ ni vektorski prostor

(4) Ali je $\mathcal{C} = \{ A \in \mathbb{R}^{3\times 3} ; \operatorname{rang} A \leq 2 \} \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3}$ vekt. prostor?

$= \{ A \in \mathbb{R}^{3\times 3} ; A$ ni obrnljiva $\}$

$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ← rang $0 \leq 2$ $\Rightarrow 0 \in \mathcal{C}$ (To nam še ničesar ne pove...)

Ker $\underset{\text{rang}=2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{\in \mathcal{C}} + \underset{\text{rang}=1}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\in \mathcal{C}} = \underset{\text{rang}=3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \notin \mathcal{C}$ $\Rightarrow \mathcal{C}$ ni zaprt za $+$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ ni vekt. prostor

**Def:** Naj bo $V$ vektorski prostor in $v_1,\dots,v_k \in V$. Množico

$$\mathcal{L}\{v_1,\dots,v_k\} = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k ;\ \alpha_1,\dots,\alpha_k \in \mathbb{R}\}$$

VSE LINEARNE KOMBINACIJE $v_1,\dots,v_k$

imenujemo linearna ogrinjača vektorjev $v_1,\dots,v_k$.
(linear span)

Linearna ogrinjača je najmanjši vekt. podprostor v $V$, ki vsebuje vektorje $v_1,\dots,v_k$.

Pravimo, da $v_1,\dots,v_k$ razpenjajo/napenjajo linearno ogrinjačo.

**Primer:** 1. Kaj je $\mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha+4\beta\\2\alpha+5\beta\\3\alpha+6\beta\end{bmatrix},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Je pa tudi ravnina skozi izhodišče, ki vsebuje dana vektorja.

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\6\\-3\end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

ravnina: $x - 2y + z = 0$.

2. Katere matrike razpenjajo $\mathcal{S}_3 = \{3\times3 \text{ simetrične matrike}\}$?

$$\mathcal{S}_3 = \left\{\begin{bmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{bmatrix};\ a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}\right\} = \mathcal{L}\{E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2}+E_{2,1}, E_{1,3}+E_{3,1}, E_{2,3}+E_{3,2}\}$$

$$\begin{bmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{bmatrix} = a\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}}_{E_{1,1}} + b\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}}_{=E_{1,2}+E_{2,1}} + c\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}}_{=E_{1,3}+E_{3,1}} + d\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}}_{=E_{2,2}} + e\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}}_{=E_{2,3}+E_{3,2}} + f\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{=E_{3,3}}$$

teh 6 matrik razpenja $\mathcal{S}_3$
(ni enolično določen)