1. Katere od spodaj naštetih preslikav med vektorskimi prostori so linearne? Za tiste, ki so linearne, poišči še matrike, ki jim pripadajo v standardnih bazah.

   (a) $\eta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\eta([x_1, x_2, x_3]^\mathsf{T}) = [x_1 + x_2, x_2 + x_3]^\mathsf{T}$,

   (b) $\theta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\theta([x_1, x_2, x_3]^\mathsf{T}) = [x_1x_2, x_2x_3]^\mathsf{T}$,

   (c) $\xi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\xi([x_1, x_2, x_3]^\mathsf{T}) = [x_1 + 1, x_2 + 2]^\mathsf{T}$,

   Rešitev: (a) Je, $A_\eta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (b,c) Nista.

2. Naj bo A matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Preslikava $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ima predpis $\phi(\mathbf{x}) = A^\mathsf{T}\mathbf{x} - 2\mathbf{x}$.

   (a) Preveri, da je ϕ linearna.

   (b) Poišči matriko, ki pripada ϕ v standardni bazi $\mathbb{R}^2$.

   (c) Poišči bazo za $\ker\phi$.

   Rešitev: (b) $A_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. (c) $B_{\ker\phi} = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

3. Naj bo $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$ neničeln vektor. Preslikava $\eta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dana s predpisom $\eta(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$.

   (a) Prepričaj se, da je η linearna preslikava.

   (b) Poišči matriko, ki pripada η v standardni bazi $\mathbb{R}^3$.

   (c) Poišči bazi za $\ker\eta$ in $\operatorname{im}\eta$. Če ne gre v splošnem, pa vsaj za $\mathbf{a} = [1, 1, 1]^\mathsf{T}$.

   Rešitev: (b) $A_\eta = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$. (c) Za $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ je $B_{\ker\eta} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, $B_{\operatorname{im}\eta} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$.

4. V $\mathbb{R}^3$ so dani vektorji $\mathbf{a} = [1, 1, 0]^\mathsf{T}$, $\mathbf{b} = [1, 0, 1]^\mathsf{T}$ in $\mathbf{c} = [0, 1, 1]^\mathsf{T}$ ter linearna preslikava $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, za katero velja

$$\mathcal{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\ ,\ \ \mathcal{F}(\mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{b}\ \text{ ter }\ \mathcal{F}(\mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{c}.$$

   (a) Pokaži, da je $B = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ baza prostora $\mathbb{R}^3$.

   (b) Zapiši matriko preslikave $\mathcal{F}$ v bazi B.

   (c) Zapiši matriko preslikave $\mathcal{F}$ v standardni bazi $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ prostora $\mathbb{R}^3$.

   (d) Kam $\mathcal{F}$ preslika vektor $[1, 1, 1]^\mathsf{T}$?

   (e) Kaj je $\ker\mathcal{F}$? Ali je $\mathcal{F}$ bijekcija?

   Rešitev: (b) $A_{\mathcal{F},B,B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (c) $A_{\mathcal{F},S,S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (d) $\mathcal{F}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. (e) $\ker\mathcal{F} = \{\mathbf{0}\}$ in $\mathcal{F}$ je bijekcija.