1. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Pokaži, da je $\mathbf{v} = [1, -1, 0]^{\mathsf{T}}$ lastni vektor matrike A in določi pripadajočo lastno vrednost.

   (b) Pokaži, da je $\lambda = 4$ lastna vrednost matrike A in poišči pripadajoči lastni vektor.

   (c) Poišči še tretjo lastno vrednost in pripadajoč lastni vektor.

Rešitev: (a) $\mathbf{v}$ pripada lastni vrednosti $\lambda_1 = -2$.
(b) $\lambda_2 = 4$ pripada lastni vektor $\mathbf{u} = [0, -1, 1]^{\mathsf{T}}$.
(c) $\lambda_3 = 2$ pripada lastni vektor $\mathbf{w} = [1, 0, 1]^{\mathsf{T}}$.

2. Naj bo Z matrika (poševnega) zrcaljenja, tj. kvadratna matrika z lastnostjo $Z^2 = I$.

   (a) Kaj so lastne vrednosti te matrike? Kako bi opisal lastne podprostore, ki pripadajo tem lastnim vrednostim?

   (b) Opiši geometrijski pomen lastnih podprostorov Z, če Z opisuje zrcaljenje preko ravnine (skozi $\mathbf{0}$) v $\mathbb{R}^3$.

   (c) Naj bo sedaj
$$Z = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$
   Preveri, da je Z matrika zrcaljenja. Preko katerega podprostora zrcali? Ali sta oba lastna podprostora ortogonalna?

Rešitev: (a) Lastni vrednosti sta -1 in 1. Z zrcali preko lastnega podprostora za lastno vrednost 1 vzdolž lastnega podprostora za lastno vrednost -1.
(b) Ta ravnina je lastni podprostor za lastno vrednost 1, premica skozi $\mathbf{0}$ pravokotna na to ravnino pa lastni podprostor za lastno vrednost -1.
(c) Zrcali preko ravnine skozi $\mathbf{0}$ z normalnim vektorjem $\mathbf{n} = [-1, 2, 1]^{\mathsf{T}}$, lastna podprostora sta ortogonalna.

3. Poišči vse lastne vrednosti in pripadajoče lastne podprostore matrike
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Lastni vrednosti sta $\lambda_{1,2} = -1$ ter $\lambda_{3,4} = 2$. Lastni podprostor za $\lambda_{1,2} = -1$ ima bazo $B_{1,2} = \{[1, 0, 1, 1]^{\mathsf{T}}\}$, lastni podprostor za $\lambda_{3,4} = 2$ pa bazo $B_{3,4} = \{[2, 1, 0, 1]^{\mathsf{T}}, [0, -1, 0, 1]^{\mathsf{T}}\}$.

4. Množenje z matriko

$$R_\phi = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

predstavlja zasuk vektorja v $\mathbb{R}^2$ za kot ϕ. (Kot med vektorjema $\mathbf{v}$ in $R_\phi \mathbf{v}$ je ravno ϕ.) Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike R_ϕ.

Rešitev: Lastni vrednosti sta $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\phi} = \cos\phi \pm i \sin\phi$, pripadajoča lastna vektorja sta $\mathbf{v}_{1,2} = [\pm i, 1]^\mathsf{T}$.