1. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike A.

   (b) Če obstaja, poišči matriko P, da bo $P^{-1}AP$ diagonalna matrika.

   (c) Izračunaj A^{1000}.

Rešitev: (a) $\lambda_{1,2} = -1$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 1$. (b) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. (c) $A^{1000} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Naj bo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ poljuben neničeln vektor in $H = I - 2\mathbf{x}\mathbf{x}^\mathsf{T}$.

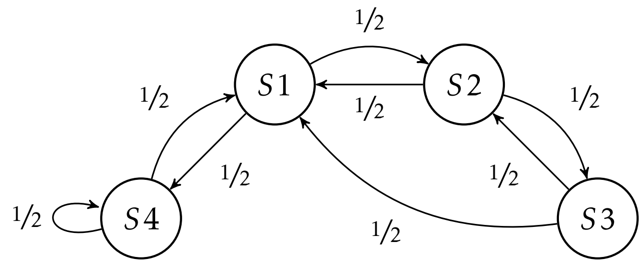
   (a) Preveri, da je $\mathbf{x}$ lastni vektor matrike H. Kateri lastni vrednosti pripada?

   (b) Poišči/opiši lastne podprostore za ostale lastne vrednosti matrike H.

   (c) Kaj mora dodatno veljati za $\mathbf{x}$, da bo H matrika zrcaljenja?

Rešitev: (a) $H\mathbf{x} = (I - 2\mathbf{x}\mathbf{x}^\mathsf{T})\mathbf{x} = \mathbf{x} - 2\mathbf{x}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} = (1 - 2\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x})\mathbf{x}$, tj. $\mathbf{x}$ pripada lastna vrednost $1 - 2\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}$. (c) $\|\mathbf{x}\| = 1$.

3. Na nanospletu so štiri (!) spletne strani, S_1, S_2, S_3 in S_4. Ko se naključni obiskovalec znajde na tem nanospletu na strani S_i, bo z verjetnostjo p_{ij} kliknil na povezavo do strani S_j. Za naš nanosplet *verjetnosti prehodov* ponazorimo s spodnjim diagramom.



(Če med dvema stranema ni puščice, to pomeni, da ni spletne povezave s strani S_i na stran S_j in zato $p_{ij} = 0$.) Verjetnosti p_{ij} zložimo v matriko

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Pokaži, da ima matrika P (in zato tudi matrika P^T) vsaj eno lastno vrednost, ki je enaka 1. Nato poišči tisti lastni vektor $\mathbf{v}$ matrike P^T za lastno vrednost 1, ki ima vsoto komponent enako 1. (Temu lastnemu vektorju pravimo *invariantna porazdelitev* pripadajoče markovske verige.)

4. Vztrajnostni tenzor nekega togega telesa je dan z matriko

$$J = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

   (a) Poišči lastne osi matrike J.

   (b) Ali obstaja baza za $\mathbb{R}^3$ iz paroma pravokotnih vektorjev, ki so vsi lastni vektorji matrike J?

   (c) Okrog katere osi naj vpnemo naše togo telo, da bo energija zaradi vrtenja okrog te osi najmanjša možna?

   Namig: Kinetična energija zaradi vrtenja togega telesa je $E = \frac{1}{2}\omega^\mathsf{T} J\omega$, kjer je ω vektor kotne hitrosti.

5. Za kvadratno matriko A z $\Delta_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$ označimo *karakteristični polinom* matrike A. Po *Cayley–Hamiltonovem izreku* velja $\Delta_A(A) = 0$. Z uporabo tega izreka izračunaj inverza matrik

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

6. Ajda je velika poznavalka kave in vsako jutro spije skodelico v eni od treh kavarn. Verjetnost, da bo na neko jutro obiskala neko kavarno, je odvisna od tega, za katero kavarno se je odločila prejšnji dan, in je podana s prehodno matriko

$$P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}$$

   - Ajdina cimra Lana nekega jutra opazi, da je Ajda doma pozabila telefon. Želi ji ga odnesti v kavarno, vendar se spomni samo, da je bila Ajda včeraj v prvi ali tretji kavarni, ne ve pa, v kateri od njiju in kje je danes. Pomagaj ji ugotoviti, kje se bo najbolj verjetno danes zjutraj nahajala Ajda.
   - Pokaži, da so $1, -\frac{1}{2}$ in $-\frac{1}{5}$ lastne vrednosti matrike P^T.
   - Naj bo $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ baza iz pripadajočih lastnih vektorjev matrike P^T (ni jih treba računati). Ajda ima danes rojstni dan. Lani si je privoščila kavo v prvi kavarni. Izrazimo

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \gamma\mathbf{v}_3$$

     Izrazi v tej bazi vektor verjetnosti, da bo Ajda v vsaki od teh kavarn na letošnji rojstni dan. Kaj opaziš?

- Določi invariantno porazdelitev te markovske verige in jo normaliziraj. Katero kavarno Ajda obišče najbolj pogosto?

7. Bor vsak večer gleda TV. Rad ima drame, komedije, znanstveno fantastiko in dokumentarce. Ko začne gledati ZF, le s težavo preklopi drugam. Verjetnosti, da zamenja program, so podane v prehodni matriki

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

- Pokaži, da so 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{10}$ in $\frac{1}{10}$ lastne vrednosti matrike $P^\top$.
- Pokaži, da je $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}^\top$ lastni vektor za $P^\top$ za lastno vrednost 1.
- Kaj lahko zaključiš o Borovih navadah?