Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

24. oktober 2024

Področje pogovora in predikati

Področje pogovora je neprazna *množica*. Na primer ljudje, številke, živali.

Predikati so logične *funkcije*, ki za svoje argumente uporabijo elemente področja pogovora.

Če v predikate vstavljamo elemente področja pogovora, dobimo *izjave*.

Predikati

Predikate ločimo po mestnosti.

V izbrani interpretaciji enomestni predikati ustrezajo *lastnostim* elementov področja pogovora.

Dvomestni predikati ustrezajo *zvezam* (tudi *relacijam*) med elementi področja pogovora.

Kvantifikatorja

Poznamo dva kvantifikatorja:

$\forall$	univerzalni kvantifikator
$\exists$	eksistenčni kvantifikator

Pomen kvantifikatorjev

Velja samo za izbrano interpretacijo.

$\forall x\, P(x)$ je izjava, ki je resnična natanko takrat, ko imajo vsi elementi področja pogovora lastnost P. Sicer je neresnična.

$\exists x\, P(x)$ je izjava, ki je resnična natanko takrat, ko obstaja (vsaj en) element področja pogovora, ki ima lastnost P. Sicer je neresnična.

Formalizacija

Definiraj ustrezne predikate in zapiši naslednje izjave:

- *Nekateri politiki so nepošteni.*
- *Noben politik ni nepošten.*
- *Vsi politiki so nepošteni.*

$\vdots$

Interpretacija

Dvomestni predikat $P(x, y)$ naj pomeni *x pozna y-ona.*

Na katere načine lahko formulo $P(x, y)$ spremeniš v izjavo?

Izjavne formule

- *spremenljivke* $x, y, z, \ldots,$
- *konstante* $a, b, c, \ldots,$
- *predikati* $P, Q, R, \ldots,$
- izjavni vezniki $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \ldots,$
- *kvantifikatorja* $\forall$ in $\exists$ ter
- oklepaja (in) .

Spremenljivkam in konstantam pravimo tudi *termi*.
Atomi predikatnega računa so, na primer,

$$P(x), P(a), Q(x, y), Q(a, x), \ldots$$

Atome dobimo tako, da terme vstavimo v predikate.

Izjavne formule

Izjavne formule so definirane induktivno:

1. Atomi so izjavne formule.
2. Če sta W in V izjavni formuli in je x spremenljivka, potem so tudi
$$(\neg W), (W \wedge V), (W \vee V), (W \Rightarrow V), (W \Leftrightarrow V), \ldots$$
$$(\exists x\, W) \quad \text{in} \quad (\forall x\, W)$$
izjavne formule.

Doseg kvantifikatorjev

Doseg kvantifikatorja je *najmanjši možen*: najmanjša izjavna formula, ki jo preberemo desno od kvantifikatorja (skupaj z njegovo spremenljivko).

Kvantifikator *veže* svojo spremenljivko in proste spremenljivke z istim imenom v svojem dosegu.

Vezane in proste spremenljivke

V formuli imamo vezane in proste spremenljivke:

- vstop spremenljivke x je *vezan*, če se ta x nahaja v dosegu (območju delovanja) kvantifikatorja $\forall x$ ali $\exists x$,
- vstop spremenljivke, ki ni vezan, je *prost*.

Doseg, vezane in proste spremenljivke

Določi doseg kvantifikatorjev in odloči, katere spremenljivke so vezane in katere proste:

$$\forall x\, P(x, y) \land Q(x, y)$$

$$\forall x\, P(w, y) \land Q(x, y)$$

$$\forall x\, (P(x, y) \land Q(z, y))$$

Doseg, vezane in proste spremenljivke

Določi doseg kvantifikatorjev in odloči, katere spremenljivke so vezane in katere proste:

$$\forall x \neg \exists x \forall z\, P(x, y, z)$$

$$\exists x\, \neg P(x, y) \Rightarrow Q(x) \wedge R(y)$$

$$\exists x\, P(x) \Rightarrow \forall x\, Q(x) \vee P(x) \wedge R(x) \vee S(y)$$

Interpretacija izjavne formule

Interpretacija $\mathcal{I}$ izjavne formule W je sestavljena iz neprazne množice $\mathcal{D}$, ki ji pravimo *področje pogovora* interpretacije.

Poleg tega

- vsakemu predikatu ustreza 0/1 logična funkcija v $\mathcal{D}$
- vsaki konstanti določimo vrednost v $\mathcal{D}$ (ponavadi je implicitno določena že z imenom konstante)
- vsaki prosti spremenljivki v W določimo vrednost v $\mathcal{D}$, pri tem vsem prostim spremenljivkam z istim imenom določimo *isto* vrednost iz $\mathcal{D}$.

Pomen kvantifikatorjev

Naj bo W formula. Z $W(x/a)$ označimo formulo, ki jo dobimo tako, da v formuli W vse proste vstope spremenljivke x nadomestimo z a.

W	$P(x) \vee \exists x\, Q(x,y) \wedge R(b,x)$
$W(x/a)$	$P(a) \vee \exists x\, Q(x,y) \wedge R(b,a)$

Pomen kvantifikatorjev

Formula $\forall x\, W$ je *resnična* v interpretaciji $\mathcal{I}$, če je za vsak element področja pogovora $d \in \mathcal{D}$ resnična formula $W(x/d)$. Sicer je $\forall x\, W$ neresnična.

Formula $\exists x\, W$ je *resnična* v interpretaciji $\mathcal{I}$, če v področju pogovora obstaja $d \in \mathcal{D}$, za katerega je formula $W(x/d)$ resnična. Sicer je $\exists x\, W$ neresnična.

Preimenovanje spremenljivk

Dejstvo: če je W formula, potem imen prostih spremenljivk ne smemo spreminjati, če želimo pridelati enakovredno formulo.

Želja: Vezane spremenljivke lahko *preimenujemo* tako, da *ista* spremenljivka (tj. spremenljivka z istim imenom)

- ne nastopa pri več kvantifikatorjih
- ni hkrati vezana in prosta.

Preimenovanje spremenljivk

$$\forall x \exists y \, (P(x, y) \Rightarrow \exists x \, Q(x, y) \lor \forall y \, R(x, y)) \lor S(y)$$

Enakovredne izjavne formule

Izjavni formuli W in V sta *enakovredni*, če imata isto logično vrednost v vseh možnih interpretacijah.

V tem primeru pišemo $W \sim V$.

Enakovredne izjavne formule

Izjavna formula W je *splošno veljavna*, če je resnična v vsaki interpretaciji.

Izjavna formula V je *neizpolnljiva*, če je neresnična v vsaki interpretaciji.

Zakoni predikatnega računa

So nekateri pomembni pari enakovrednih izjavnih formul:

$$\neg\forall x\, W \sim \exists x\, \neg W$$
$$\neg\exists x\, W \sim \forall x\, \neg W$$

$$\forall x \forall y\, W \sim \forall y \forall x\, W$$
$$\exists x \exists y\, W \sim \exists y \exists x\, W$$

$$\forall x\, (W \wedge V) \sim \forall x\, W \wedge \forall x\, V$$
$$\exists x\, (W \vee V) \sim \exists x\, W \vee \exists x\, V$$

Zgledi

$P(x)$ ... *x je plešast.*
$N(x)$ ... *x je nesmrten.*

$S(x)$ ... *x je sodo število.*
$L(x)$ ... *x je liho število.*

Zakoni predikatnega računa z omejitvami

Če se x ne pojavi (prosto) v formuli C, potem veljajo naslednje enakovredosti:

$$\forall x\,(C \lor W) \sim C \lor \forall x\, W$$
$$\exists x\,(C \lor W) \sim C \lor \exists x\, W$$

$$\forall x\,(C \land W) \sim C \land \forall x\, W$$
$$\exists x\,(C \land W) \sim C \land \exists x\, W$$

Preneksna normalna oblika

Trditev

Vsako formulo lahko enakovredno zapišemo tako, da se kvantifikatorji nahajajo samo na začetku.

Kako?

1. Preimenujemo spremenljivke.
2. Znebimo se $\Rightarrow$ in $\Leftrightarrow$, raje imamo $\neg$, $\land$ in $\lor$.
3. Izvlečemo kvantifikatorje na začetek z uporabo zakonov predikatnega računa.

Zgled

$$\forall x\, A(x) \vee \exists x\, B(x) \Rightarrow D(x) \wedge \exists x\, D(x)$$

Zgled

Zamenjava raznovrstnih kvantifikatorjev v splošnem ni možna.

$$P(x, y) \quad \ldots \quad x \text{ pozna } y\text{-ona.}$$

Včasih vseeno lahko:

$$\forall x \exists y\, (P(x) \wedge Q(y)) \sim \exists y \forall x\, (P(x) \wedge Q(y))$$