Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

6. november 2026

Operacije z množicami

relacija pripadnosti $\ldots x \in A$

x *pripada* A.

podajanje množic

- z naštevanjem elementov $A = \{0, 1, 2\}$
- z neko izjavno formulo $A = \{x \,;\, \varphi(x)\}$
  Velja: $x \in A \iff \varphi(x)$

Zgledi množic

$$A = \{x\ ;\ x \neq x\} = \emptyset \qquad \text{prazna množica}$$

$$B = \{x\ ;\ x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2\} = \{0, 1, 2\}$$

$$C = \{x\ ;\ x^2 + 1 \geq 5\}$$

Russellov paradoks

Ni vsaka izjavna formula dobra!

$$R = \{x\ ;\ x \notin x\}$$

Ali velja $R \in R$?

Enakost in vsebovanost

Množici A in B sta *enaki*,

$$A = B \iff \forall x\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Množica A je *podmnožica* množice B,

$$A \subseteq B \iff \forall x\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

relacija *inkluzije*

Množica A je *prava podmnožica* množice B,

$$A \subset B \iff A \subseteq B \ \wedge\ A \neq B$$

relacija *stroge inkluzije*

Enakost in vsebovanost

Trditev

Za poljubne množice A, B in C velja

- $\emptyset \subseteq A$
- $A \subseteq A$
- *Če* $A \subseteq B$ *in* $B \subseteq C$, *potem* $A \subseteq C$.

Operacije z množicami

- *unija* $A \cup B = \{x \,;\, x \in A \vee x \in B\}$
- *presek* $A \cap B = \{x \,;\, x \in A \wedge x \in B\}$
- *razlika* $A \setminus B = \{x \,;\, x \in A \wedge x \notin B\}$
- *simetrična razlika* $A + B = \{x \,;\, x \in A \veebar x \in B\}$

Lastnosti operacij

- $A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$
- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

Pravimo, da sta množici A in B *disjunktni*, če je $A \cap B = \emptyset$.

Univerzalna množica in komplement

Univerzalna množica, označimo jo z S, ustreza področju pogovora v predikatnem računu.

Vse obravnavane množice so vsebovane v univerzalni množici S.

Komplement množice A, označimo ga z A^c, definiramo kot

$$A^c = S \setminus A$$

Lastnosti komplementa

- $(A^c)^c = A$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $A \setminus B = A \cap B^c$
- $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$
- $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq B^c \iff B \subseteq A^c$

Enakosti z množicami

Pokažimo, da velja

$$A \cup (A \cap B) = A$$

Enakosti z množicami

1. Zakon dvojnega komplementa: $(A^c)^c = A$
2. Idempotenca: $A \cap A = A \qquad A \cup A = A$
3. Komutativnost: $A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A$
   $A + B = B + A$
4. Asociativnost: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   $(A + B) + C = A + (B + C)$
5. Absorpcija: $A \cap (A \cup B) = A \qquad A \cup (A \cap B) = A$
6. Distributivnost: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
   $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
   $(A + B) \cap C = (A \cap C) + (B \cap C)$
7. de Morganova zakona: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Enakosti z množicami

8. Kontrapozicija: $A \subseteq B \sim B^c \subseteq A^c$
9. Lastnosti *prazne množice* $\emptyset$ in *univerzalne množice* S:
$$A \cup A^c = S \qquad A \cap A^c = \emptyset$$
$$A + A = \emptyset \qquad A + A^c = S$$
10. Še lastnosti $\emptyset$ in S: $A \cap \emptyset = \emptyset \qquad A \cup \emptyset = A$
$$A \cap S = A \qquad A \cup S = S$$
11. Lastnosti vsebovanosti:
$$A \subseteq B \sim A \cup B = B \sim A \cap B = A \sim A \setminus B = \emptyset$$
če $A \subseteq B$, potem $A \cup C \subseteq B \cup C$
če $A \subseteq B$, potem $A \cap C \subseteq B \cap C$
$A \cap B \subseteq A, B \subseteq A \cup B$
12. Lastnosti razlike množic: $A \setminus B = A \cap B^c$
13. Lastnosti simetrične razlike: $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
$$A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Potenčna množica

Potenčna množica množice A, $\mathcal{P}A$, je množica vseh podmnožic množice A.

$$\mathcal{P}A = \{B \,;\, B \subseteq A\}$$

Tako $\emptyset$ kot A pripadata potenčni množici $\mathcal{P}A$.

$$\mathcal{P}\{1, 2, 3\}$$

$$\mathcal{P}\emptyset = \qquad\qquad \mathcal{P}\{\emptyset\} =$$

Potenčna množica

Trditev

Če množica A vsebuje natanko n elementov in je n naravno število, potem $\mathcal{P}A$ vsebuje natanko 2^n elementov.

Trditev

Če je $A \subseteq B$, potem je $\mathcal{P}A \subseteq \mathcal{P}B$.

Družine množic

Naj bo

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\} = \{A_i \,;\, i \in \mathcal{I}\}$$

družina množic. Z $\mathcal{I}$ označimo indeksno množico.

Unija družine $\mathcal{A}$ je množica

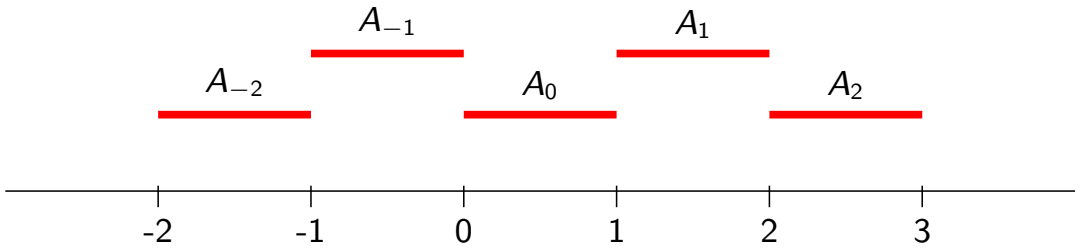
$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i = \{x \,;\, \exists i \,(i \in \mathcal{I} \wedge x \in A_i)\}$$

Presek družine $\mathcal{A}$ je množica

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i = \{x \,;\, \forall i \,(i \in \mathcal{I} \Rightarrow x \in A_i)\}$$

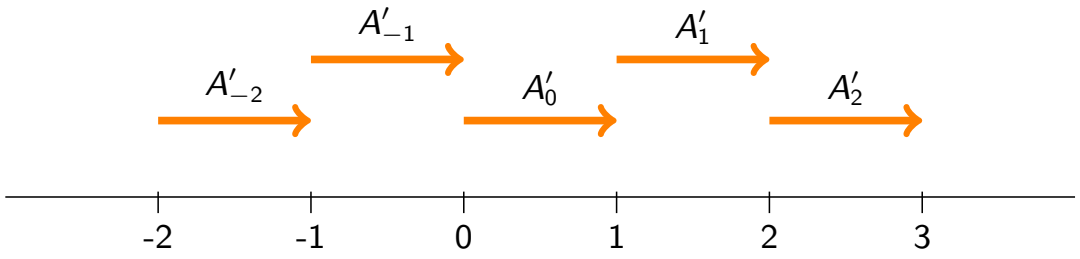
Družina množic, zgled 1

$A_i = [i, i+1]$
$i \in \mathbb{Z}$



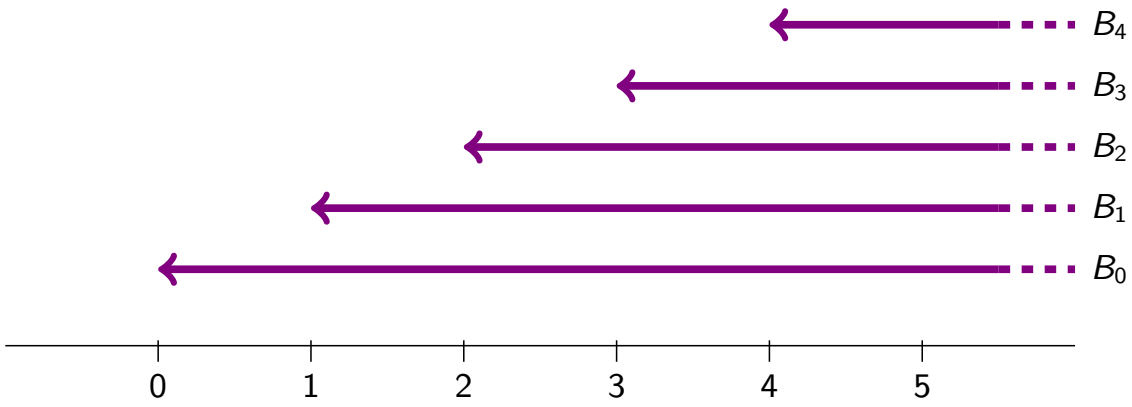
Družina množic, zgled 2

$A'_i = [i, i+1)$
$i \in \mathbb{Z}$



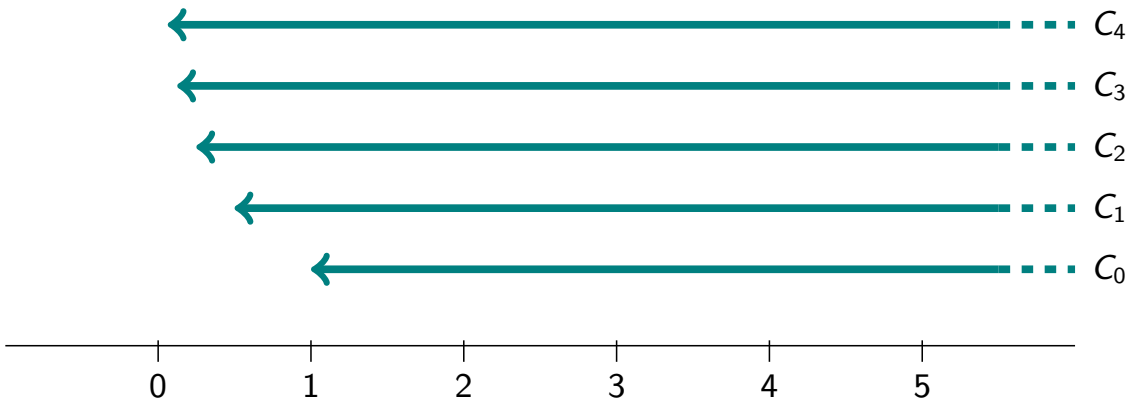
Družina množic, zgled 3

$B_i = (i, \infty)$
$i \in \mathbb{N}$



Družina množic, zgled 4

$C_i = (2^{-i}, \infty)$
$i \in \mathbb{N}$



Pokritje in razbitje

Družina množic $\mathcal{A} = \{A_i \, ; \, i \in \mathcal{I}\}$ je *pokritje* množice B, če je $B = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$.

Družina množic $\mathcal{A} = \{A_i \, ; \, i \in \mathcal{I}\}$ je *razbitje* množice B, če je

- $\mathcal{A}$ pokritje množice B
- elementi $\mathcal{A}$ so neprazni in
- elementi $\mathcal{A}$ so paroma disjunktni .

Urejeni pari

Urejeni par s *prvo komponento (koordinato)* a in *drugo komponento (koordinato)* b označimo z (a, b) in definiramo kot

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Trditev

(osnovna lastnost urejenih parov)

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ in } b = d$$

Kartezični produkt

Kartezični produkt množic A in B je množica vseh urejenih parov

$$A \times B = \{(a, b) \, ; \, a \in A \wedge b \in B\}$$

Kartezični produkt

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je urejena n-terica.

Definicijo kartezičnega produkta lahko razširimo na več faktorjev.

$A \times B \times C$ je množica vseh urejenih trojic s prvo koordinato v A, drugo v B in tretjo koordinato v množici C.

Lastnosti kartezičnega produkta

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

Lastnosti kartezičnega produkta

- $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset \vee B = \emptyset$
- $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \implies A \times B \subseteq C \times D$
- $A \times B \subseteq C \times D \ \wedge \ A \times B \neq \emptyset \implies A \subseteq C \wedge B \subseteq D$
- A končna z m elementi in B končna z n elementi $\implies$ $A \times B$ končna z $m \cdot n$ elementi.

Moč končnih množic

Naj bo A končna množica. Potem $|A|$ označuje *število elementov* ali *moč* množice A.

Naj bosta A in B končni množici. Pravimo, da sta A in B *enako močni*, $A \sim B$, če $|A| = |B|$.

Zgledi:

1. $|\emptyset| = 0$
2. $|\{0, 1\}| = 2$
3. $|\{\{0, 1\}\}| = 1$

Moč končnih množic

Trditev

Naj bodo A, B, C končne množice.

1. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
2. $|\{f \; ; \; f : A \to B\}| = \left|B^A\right| = |B|^{|A|}$
3. $|\mathcal{P}A| = 2^{|A|}$
4. *Če je $B \subseteq A$, potem je $|A \setminus B| = |A| - |B|$.*

   V splošnem je $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$.
5. *Če je $A \cap B = \emptyset$, potem je $|A \cup B| = |A| + |B|$.*

   V splošnem je $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
6. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Načelo vključitev in izključitev

Izrek

Naj bo A končna množica in $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq A$. Potem je

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \; = & \\
& |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| \\
- \quad & |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_{n-1} \cap A_n| \\
+ \quad & \ldots \\
& \ldots \\
+(-1)^{n+1} \quad & |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \\
= \quad & \textstyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i S_i,
\end{aligned}$$

kjer je $S_k = \displaystyle\sum_{\substack{\mathcal{J} \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |\mathcal{J}|=k}} \left| \bigcap_{i \in \mathcal{J}} A_i \right|.$

Nalogi

Naloga: Koliko je števil na celoštevilskem intervalu $[1 \ldots 96]$, ki so deljiva s 6 in niso deljiva niti s 24 niti z 32?

Naloga: Zaposleni v nekem podjetju programirajo v treh jezikih: Java, C in Python. V vsakem jeziku programira tri petine programerjev, v C in Pythonu dve petini, v C-ju in Javi tri desetine ter v jezikih Java in Python ena petina. V vseh treh jezikih programira 10 programerjev.
Koliko programerjev je zaposlenih v podjetju?
Koliko jih programira v natanko dveh jezikih?