Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

10. november 2023

Moč končnih množic

Naj bo A končna množica. Potem $|A|$ označuje *število elementov* ali *moč* množice A.
Naj bosta A in B končni množici. Pravimo, da sta A in B *enako močni*, $A \sim B$, če $|A| = |B|$.
Zgledi:

1. $|\emptyset| = 0$
2. $|\{0, 1\}| = 2$
3. $|\{\{0, 1\}\}| = 1$

Moč končnih množic

Trditev

Naj bodo A, B, C končne množice.

1. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
2. $|\{f\ ;\ f : A \to B\}| = \left|B^A\right| = |B|^{|A|}$
3. $|\mathcal{P}A| = 2^{|A|}$
4. *Če je* $B \subseteq A$*, potem je* $|A \setminus B| = |A| - |B|$.

   V splošnem je $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$.
5. *Če je* $A \cap B = \emptyset$*, potem je* $|A \cup B| = |A| + |B|$.

   V splošnem je $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
6. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Načelo vključitev in izključitev

Izrek

Naj bo A končna množica in $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq A$*. Potem je*

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \ =& \\
& |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| \\
- & |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_{n-1} \cap A_n| \\
+ & \ldots \\
& \ldots \\
+(-1)^{n+1} & |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \\
= & \textstyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i S_i,
\end{aligned}
$$

kjer je $S_k = \displaystyle\sum_{\substack{\mathcal{J} \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |\mathcal{J}|=k}} \left| \bigcap_{i \in \mathcal{J}} A_i \right|.$

Nalogi

Naloga: Koliko je števil na celoštevilskem intervalu $[1 \dots 96]$, ki so deljiva s 6 in niso deljiva niti s 24 niti z 32?

Naloga: Zaposleni v nekem podjetju programirajo v treh jezikih: Java, C in C++. V vsakem jeziku programira tri petine programerjev, v C in C++ dve petini, v C-ju in Javi tri desetine ter v jezikih Java in C++ ena petina. V vseh treh jezikih programira 10 programerjev.
Koliko programerjev je zaposlenih v podjetju?
Koliko jih programira v natanko dveh jezikih?