

# Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko  
Univerza v Ljubljani

14. november 2024

## Kaj je relacija

Množica  $R$  je *(dvomestna) relacija*, če je vsak njen element urejen par.

$R$  je relacija.  $\iff \forall x \in R \exists u, v : x = (u, v)$

Množica  $R$  je *(dvomestna) relacija v množici*  $A$ , če je  $R \subseteq A \times A$ .

## Zgledi

1.  $A = \{e, f, g, h\}$      $R = \{(e, f), (f, g), (g, h)\}$
2.  $A = \mathbb{N}$      $R = \{(x, y) ; x, y \in \mathbb{N} \wedge x \leq y\}$
3.  $\text{id}_A = \{(x, x) ; x \in A\}$
4.  $\emptyset \subseteq A \times A$
5.  $A \times A \subseteq A \times A$

Namesto  $(x, y) \in R$  pišemo  $xRy$ .

## Domena in zaloga vrednosti

Naj bo  $R$  relacija v  $A$ .

$\mathcal{D}_R = \{x ; \exists y : xRy\}$     *domena* ali *definicijsko območje* relacije  $R$ .

$\mathcal{Z}_R = \{y ; \exists x : xRy\}$     *zaloga vrednosti* relacije  $R$ .

## Lastnosti relacij

Naj bo  $R$  relacija v  $A$ . Pravimo, da je

1.  $R$  *refleksivna*  $\iff \forall x \in A : xRx$
2.  $R$  *simetrična*  $\iff \forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$
3.  $R$  *antisimetrična*  $\iff \forall x, y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
4.  $R$  *tranzitivna*  $\iff \forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
5.  $R$  *sovisna*  $\iff \forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$
6.  $R$  *enolična*  $\iff \forall x, y, z \in A : xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z$

## Zgledi

1. Relacija  $\text{id}_A$  v  $A$
2. Relacija  $\leq$  v  $\mathbb{N}$
3. Relacija  $<$  v  $\mathbb{N}$
4. Relacija  $\subseteq$  v  $\mathcal{P}A$
5. Relacija "oče" v množici ljudi ( $x$  oče  $y$  preberemo kot  $x$  je oče  $y$ -ona.)

## Grafična predstavitev relacije

$R$  naj bo relacija v končni množici  $A$ .

Elemente množice  $A$  narišemo kot *točke* v ravnini. Če velja  $aRb$ , narišemo usmerjeno puščico od  $a$  do  $b$ .

elementi  $A$  ... točke v ravnini

$aRb$  ... usmerjena puščica od  $a$  do  $b$ .

Zgled:  $A = \{e, f, g, h\}$      $R = \{(e, f), (f, g), (g, h)\}$

## Operacije z relacijami

Relacije so posebne vrste množic. Vemo, kako so definirane operacije  $\cup$ ,  $\cap$  in  $\setminus$ .

Ponavadi se pogovarjamo o družini relacij na isti množici  $A$ . V takem primeru je *komplement* smiselno definirati kot

$$R^c := (A \times A) \setminus R = U_A \setminus R$$

## Operacije z relacijami

Poleg navedenih operacij definiramo tudi:

- ▶ *inverzna relacija* relacije  $R$ , označimo jo z  $R^{-1}$ :

$$R^{-1} := \{(y, x) ; (x, y) \in R\}$$

- ▶ *produkt relacij*  $R$  in  $S$ , označimo ga z  $R * S$ :

$$R * S := \{(x, z) ; \exists y (xRy \wedge ySz)\}$$

## Operacije z relacijami

*Zgled:* sorodstvene relacije med ljudmi

Relacija *oče* v množici ljudi je definirana kot

$$x \text{ oče } y \Leftrightarrow x \text{ je oče } y\text{-ona.}$$

*Naloga:* Izrazi relacije *roditelj*, *zet*, *snaha*, *ded*, *vnuk*, *tašča*, *svak* z "bolj elementarnimi" sorodstvenimi relacijami *oče*, *mati*, *sin*, *hči*, *mož*, *žena*, ...

## Lastnosti operacij z relacijami

Naj bodo  $R, S, T$  relacije na  $A$ .

1.  $(R^{-1})^{-1} = R$
2.  $(R * S)^{-1} = S^{-1} * R^{-1}$
3.  $(R * S) * T = R * (S * T) =: R * S * T$
4.  $R * (S \cup T) = R * S \cup R * T$
5.  $(R \cup S) * T = R * T \cup S * T$
6.  $R * \text{id}_A = \text{id}_A * R = R$
7.  $R \subseteq S \implies R * T \subseteq S * T$  in  $T * R \subseteq T * S$

## Potence relacij

Zaradi asociativnosti množenja relacij lahko definiramo potence relacij. Naj bo  $R \subseteq A \times A$ .

$$\begin{aligned} R^0 &:= \text{id}_A \\ R^{n+1} &:= R^n * R, \text{ če je } n \geq 0. \end{aligned}$$

Velja  $R^1 = R$ ,  $R^2 = R * R$ , ter za  $m, n \geq 0$  tudi  $R^m * R^n = R^{m+n}$ .

## Potence relacij

Definiramo lahko tudi potence z negativnimi eksponenti, če je  $n > 0$ , potem

$$R^{-n} := (R^{-1})^n$$

Toda če sta  $m$  in  $n$  celi števili različnih predznakov, potem  $R^n * R^m$  ni nujno enako  $R^{m+n}$ .

## Potence relacij

*Zgled:* sorodstvene relacije med ljudmi

*Naloga:* Definiraj relacije *prednik*, *potomec*, *sorodnik*.

## Potence relacij

Naj bo  $R$  relacija v  $A$ .

Relacijo  $R^+$  imenujemo *tranzitivna ovojnica* relacije  $R$  in jo definiramo s predpisom

$$R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$$

Relacijo  $R^*$  imenujemo *tranzitivno-refleksivna ovojnica* relacije  $R$  in jo definiramo s predpisom

$$R^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k$$

*Vprašanje:* Kako s pomočjo grafa relacije  $R$  opišemo grafa relacij  $R^+$  in  $R^*$ ?

## Algebraična karakterizacija lastnosti relacij

Naj bo  $R$  relacija v  $A$ . Relacija  $R$  je

1. *refleksivna*  $\iff \text{id}_A \subseteq R$
2. *simetrična*  $\iff R^{-1} = R$
3. *antisimetrična*  $\iff R^{-1} \cap R \subseteq \text{id}_A$
4. *tranzitivna*  $\iff R^2 \subseteq R$
5. *sovisna*  $\iff \text{id}_A \cup R \cup R^{-1} = U_A$
6. *enolična*  $\iff R^{-1} * R \subseteq \text{id}_A$



## Preslikave

Relacija  $f \subseteq A \times B$  je *preslikava iz A v B*, če velja:

- ▶  $f$  je enolična
- ▶  $\mathcal{D}_f = A$
- ▶  $(\mathcal{Z}_f \subseteq B)$

Pišemo tudi  $f : A \rightarrow B$ .

## Preslikave

Namesto  $x f y$  pišemo  $y = f(x)$ ,

in pravimo, da  $f$  (*pre*)*slika*  $x$  v  $y$ ,

$x$  je *argument*,  $y$  pa *vrednost* preslikave  $f$  pri  $x$ .

Tudi:  $y$  je *slika*  $x$ -a.

## Preslikave

Naj bo  $f$  preslikava iz  $A$  v  $B$ .

- ▶  $A = \mathcal{D}_f$  ... domena ali definicijsko območje  $f$
- ▶  $\mathcal{Z}_f$  ... zaloga vrednosti  $f$
- ▶  $B$  ... kodomena  $f$

## Preslikave

*Zgled:* Naj bo  $X$  množica nepraznih bitnih besed  $\{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots\}$  in  $Y$  množica naravnih števil  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

Definirajmo relacije  $f_1, f_2, f_3 \subseteq X \times Y$ ,  $f_4 \subseteq X \times X$  in  $f_5 \subseteq Y \times X$  z naslednjimi opisi:

- ▶  $x f_1 y$  natanko tedaj, ko je  $y$  število enic v  $x$ -u.
- ▶  $x f_2 y$  natanko tedaj, ko je  $y$  prvi bit niza  $x$ .
- ▶  $x f_3 y$  natanko tedaj, ko je  $y$  mesto najbolj leve ničle v  $x$ -u.
- ▶  $x_1 f_4 x_2$  natanko tedaj, ko  $x_2$  dobimo tako, da nizu  $x_1$  dodamo na koncu 0 ali 1.
- ▶  $y f_5 x$  natanko tedaj, ko je  $x$  niz  $y$  zaporednih enic.

Katere izmed relacij  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$  so preslikave?

## Lastnosti preslikav

Naj bo  $f : A \rightarrow B$ . Pravimo, da je

- ▶  $f$  *injektivna*, če  $\forall x, y \in A : (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$
- ▶  $f$  *surjektivna*, če  $Z_f = B$  (pravimo tudi, da je  $f$  preslikava iz  $A$  **na**  $B$ )
- ▶  $f$  *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.

## Zgledi preslikav

1.  $\text{id}_A : A \rightarrow A$ , *identiteta na A*  
 $\text{id}_A(x) = x$ , je bijektivna
2.  $p_i : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A_i$ , *projekcija na i-to komponento*  
 $p_i((a_1, \dots, a_n)) = a_i$ , je surjektivna
3.  $A_1 \subseteq A$ ,  $i = \text{id}_A|_{A_1}$   
 $i : A_1 \hookrightarrow A$ ,  $i(x) = x$  je injektivna, *vložitev*  $A_1$  v  $A$
4.  $A \subseteq B$ ,  $\chi_A : B \rightarrow \{0, 1\}$   
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$
*karakteristična funkcija množice A (v B)*

## Inverzna preslikava

Vprašanje: Kdaj je  $f^{-1}$  tudi preslikava?

### Trditev

$f : A \rightarrow B$

1.  $f^{-1}$  je enolična natanko tedaj, ko je  $f$  injektivna,
2.  $f^{-1} : B \rightarrow A$  natanko tedaj, ko je  $f$  bijektivna.

## Kompozitum preslikav

Naj bosta  $g : A \rightarrow B$  in  $f : B \rightarrow C$ . Potem je  $f \circ g$  preslikava iz  $A$  v  $C$  določena s predpisom

$$f \circ g = g * f.$$

Velja  $(f \circ g)(a) = f(g(a))$  za vse  $a \in A$ .

### Trditev

Kompozitum preslikav je asociativna operacija, velja namreč:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

## Lastnosti kompozituma

### Trditev

Naj bo  $f : A \rightarrow B$ . Potem je

$$f \circ \text{id}_A = \text{id}_B \circ f = f$$

### Trditev

$f : B \rightarrow C, g : A \rightarrow B$

1.  $f, g$  injektivni  $\implies f \circ g$  injektivna
2.  $f, g$  surjektivni  $\implies f \circ g$  surjektivna
3.  $f \circ g$  injektivna  $\implies g$  injektivna
4.  $f \circ g$  surjektivna  $\implies f$  surjektivna

## Lastnosti kompozituma

### Trditev

Naj bo  $f : B \rightarrow A, g : A \rightarrow B$ . Če je  $f \circ g = \text{id}_A$  in  $g \circ f = \text{id}_B$ , potem sta  $f$  in  $g$  bijekciji in je  $g = f^{-1}$ .

## Dirichletov princip

### Izrek

Naj bo  $A$  končna množica in  $f : A \rightarrow A$ . Potem so naslednje trditve enakovredne:

- ▶  $f$  je injektivna.
- ▶  $f$  je surjektivna.
- ▶  $f$  je bijektivna.

## Ekvivalenčna relacija

$R \subseteq A \times A$  je *ekvivalenčna*, če je

- ▶ refleksivna,
- ▶ simetrična in
- ▶ tranzitivna.

## Ekvivalenčna relacija

Zgledi:

1. Relacija  $\parallel$  vzporednosti v množici vseh premic v ravnini.
2.  $A = \{\text{ljudje}\}$ ,  $xRy \iff x$  ima enako barvo oči kot  $y$ .
3.  $f : A \rightarrow B$ ,  $x, y \in A : xR_f y \iff f(x) = f(y)$   
 $x$  in  $y$  imata isto funkcijsko vrednost.
4. Naj bo  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ . Definirajmo relacijo  $R$  v množici  $\mathbb{Z}$ :

$$xRy \iff m \text{ deli } |x - y|$$

## Ekvivalenčni razredi

Naj bo  $R \subseteq A \times A$  ekvivalenčna in  $x \in A$ .

$R[x] = \{y \in A ; yRx\}$  je *ekvivalenčni razred* elementa  $x$ .

$A/R = \{R[x] ; x \in A\}$  (množica vseh ekvivalenčnih razredov) je *faktorska (kvocientna) množica* množice  $A$  po relaciji  $R$ .

## Ekvivalenčni razredi, razbitje

### Trditev

Naj bo  $R$  ekvivalenčna relacija na  $A$ . Potem za poljubna  $x, y \in A$  velja

$$R[x] = R[y] \iff xRy$$

### Izrek

Naj bo  $R$  ekvivalenčna relacija na  $A$ . Potem je  $A/R$  razbitje množice  $A$ .

## Zgledi faktorskih množic

- ▶ “premise v ravnini” / “vzporedne premise” =  
 $\{\{\text{navpične pr.}\}, \{\text{vodoravne pr.}\}, \{\text{pr. pod kotom } 45^\circ\}, \dots\} \cong$   
“množica vseh smeri v ravnini”  $\cong [-\pi/2, \pi/2)$



