# Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

28. november 2024

## Kaj je graf

*Graf* je urejen par $G = (V, E)$, kjer je

- $V$ neprazna končna množica *točk (vozlišč)* grafa $G$ in
- $E$ množica *povezav* grafa $G$, pri čemer je vsaka povezava *par* točk .

*Zgled:* $V = \{u, v, w, x, y\}$ $\quad E = \{\{u, v\}, \{u, w\}, \{v, w\}, \{v, x\}\}$

## Kaj je graf

*Pisava:* Namesto $e = \{u, v\}$ pišemo krajše $e = uv$ ali $e = vu$.

V tem primeru pravimo, da sta točki $u$ in $v$ *krajišči* povezave $e$, povezava $e$ povezuje točki $u$ in $v$. Pravimo tudi, da sta $u$ in $v$ *sosednji*, kar označimo z $u \sim v$, ker sta krajišči iste povezave.

*Oznake:* $V = V(G)$ ... množica točk grafa $G$
$E = E(G)$ ... množica povezav grafa $G$

## Stopnje točk

*Stopnja* točke $v \in V(G)$ je število povezav, ki imajo $v$ za krajišče. Stopnjo točke $v$ označimo z $\deg(v)$.

Točka stopnje 0 je *izolirana točka*, točki stopnje 1 pravimo tudi *list* grafa.

Graf $G$ je *regularen*, če imajo vse njegove točke isto stopnjo.
Graf $G$ je *$d$-regularen*, če so vse točke grafa $G$ stopnje $d$. 3-regularnim grafom pravimo tudi *kubični grafi*.

# Stopnje točk

## Izrek (Lema o rokovanju)

*Naj bo $G$ graf z $n$ točkami in $m$ povezavami. Potem je*

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2 \cdot m$$

## Posledica

*V vsakem grafu je sodo mnogo točk lihe stopnje.*

## Posledica

*Naj bo $G$ $d$-regularen graf z $n$ točkami in $m$ povezavami. Potem je*

$$n \cdot d = 2 \cdot m$$

# Grafično zaporedje

Končno zaporedje naravnih števil

$$d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \ldots \geq d_n$$

je *grafično*, če obstaja graf $G$ z $n$ točkami, ki imajo stopnje enake $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

*Naloga:* Ali je zaporedje $5, 4, 3, 2, 2, 1$ grafično?

## Grafično zaporedje

*Naloga:* Ali je zaporedje $6, 4, 4, 3, 2, 2, 1$ grafično?

## Grafično zaporedje

### Izrek

*Zaporedje $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \ldots \geq d_n$ je grafično natanko tedaj, ko je tudi zaporedje*

$$d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$$

*grafično.*

### Posledica

*Zaporedje $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \ldots \geq d_n$ je grafično natanko tedaj, ko požrešna metoda uspe.*

# Izomorfizem grafov

Grafa $G_1$ in $G_2$ sta *izomorfna*, če obstaja preslikava $f : V(G_1) \to V(G_2)$, za katero velja:

1. $f$ je bijektivna in
2. $u \sim_{G_1} v \;\Leftrightarrow\; f(u) \sim_{G_2} f(v)$.

V tem primeru pravimo, da je $f$ *izomorfizem* grafov $G_1$ in $G_2$, ter pišemo $G_1 \cong G_2$.
V nasprotnem primeru (če izomorfizem ne obstaja) pravimo, da sta grafa *neizomorfna*.

## Trditev

*Izomorfizem ohranja število vozlišč, število povezav, stopnje vozlišč, število trikotnikov, ...*

# Polni grafi

Graf je *poln*, če sta vsaki njegovi točki sosedi. Poln graf na $n$ točkah označimo s $K_n$.

| | |
|---|---|
| $V(K_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ | $\|V(K_n)\| = n$ |
| $E(K_n) = \{v_i v_j \,;\, 1 \leq i < j \leq n\}$ | $\|E(K_n)\| = \frac{n(n-1)}{2}$ |
| $\deg(v_1) = n - 1$ | $K_n$ je $(n-1)$-regularen graf. |

## Prazni grafi

Graf je *prazen*, če nobeni njegovi točki nista sosedi. Prazen graf na $n$ točkah označimo s $\overline{K_n}$.

$V(\overline{K_n}) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ $\quad |V(\overline{K_n})| = n$

$E(\overline{K_n}) = \emptyset$ $\quad |E(\overline{K_n})| = 0$

$\deg(v_1) = 0$ $\quad \overline{K_n}$ je 0-regularen graf.

$\overline{K_1} = K_1$

## Polni dvodelni grafi

$K_{m,n}$ je *polni dvodelni graf* na $n + m$ točkah. Vsebuje dva *barvna razreda* s po $n$ in $m$ točkami, točki sta sosedi natanko tedaj, ko sta v različnih barvnih razredih.

$V(K_{m,n}) = \{v_1, v_2, \ldots, v_m, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ $\quad |V(K_{m,n})| = m + n$

$E(K_{m,n}) = \{v_i u_j \; ; 1 \leq i \leq m \text{ in } 1 \leq j \leq n\}$ $\quad |E(K_{m,n})| = m \cdot n$

$\deg(v_1) = n\,,\ \deg(u_1) = m$ $\quad K_{n,n}$ je $n$-regularen.

$K_{1,1} = K_2$

# Cikli

*Cikel* na $n \geq 3$ točkah označimo s $C_n$.

| | |
|---|---|
| $V(C_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ | $\lvert V(C_n)\rvert = n$ |
| $E(C_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$ | $\lvert E(C_n)\rvert = n$ |
| $\deg(v_1) = 2$ | $C_n$ je 2-regularen graf. |

$C_3 = K_3, C_4 = K_{2,2}$

# Poti

*Pot* na $n$ točkah označimo s $P_n$.

| | |
|---|---|
| $V(P_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ | $\lvert V(P_n)\rvert = n$ |
| $E(P_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n\}$ | $\lvert E(P_n)\rvert = n - 1$ |
| $\deg(v_1) = 1, \deg(v_2) = 2$ | če $n \geq 3$. |

$P_1 = K_1 = \overline{K_1}, P_2 = K_2 = K_{1,1}, P_3 = K_{2,1}$

## Hiperkocke

Točke *d-razsežne hiperkocke* $Q_d$ so zaporedja ničel in enic dolžine $d$. Dve takšni točki-zaporedji sta sosedi, če se razlikujeta v natanko enem členu.

$|V(Q_d)| = 2^d$
$|E(Q_d)| = d \cdot 2^{d-1}$
$Q_d$ je $d$-regularen graf.

$Q_0 = K_1, Q_1 = K_2, Q_2 = C_4$

## Podgrafi

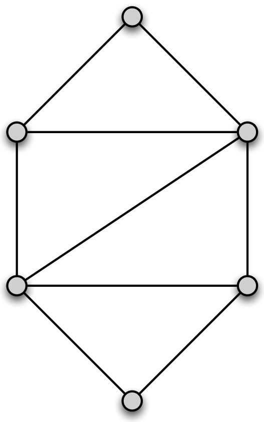
Naj bosta $H$ in $G$ grafa.
Pravimo, da je $H$ *podgraf* grafa $G$, $H \subseteq G$, če je $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$.

## Podgrafi

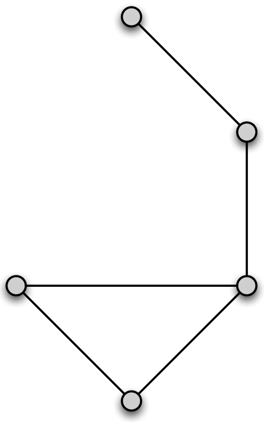
Podgraf $H$ grafa $G$ je *vpet podgraf*, če je $V(H) = V(G)$.

Podgraf $H$ grafa $G$ je *induciran podgraf*, če za vsako povezavo $e = uv \in E(G)$ velja: če sta $u$ in $v$ vozlišči grafa $H$, potem je tudi $e$ povezava v grafu $H$.

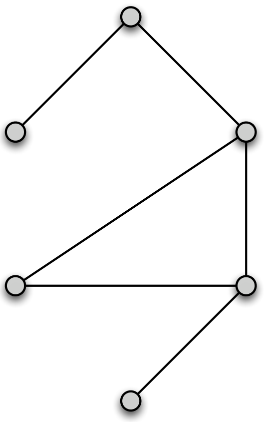
## Zgledi podgrafov



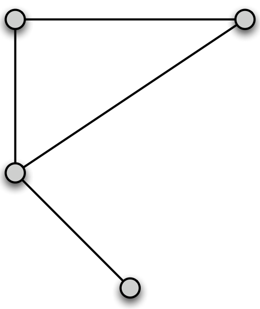
Graf $G$.



$H_1 \subseteq G$



$H_2 \subseteq G$,
vpet.



$H_3 \subseteq G$,
inducirán.

# Podgrafi

Naj bo $G$ graf in $U \subseteq V(G)$ ter $F \subseteq E(G)$.

Z $G[U]$ označimo inducirani podgraf z množico vozlišč $U$.

Z $G[F]$ označimo vpet podgraf z množico povezav $F$.

# Definicija sprehoda

*Sprehod* $S$ v grafu $G = (V, E)$ je zaporedje vozlišč

$$u_0 u_1 u_2 \dots u_{n-1} u_n,$$

pri čemer sta zaporedni vozlišči sprehoda $u_i$ in $u_{i+1}$ sosedi v grafu $G$ $(i = 0, \dots, n-1)$.

*Dolžina* sprehoda $S = u_0 u_1 \dots u_n$ je enaka $n$, $|S| = n$.

Vozlišče $u_0$ imenujemo *začetek*, vozlišče $u_n$ pa *konec* sprehoda. *$u - v$ sprehod* je sprehod z začetkom v $u$ in koncem v $v$.

Sprehod $S = u_0 \dots u_n$ je *pot*, če $u_i \neq u_j$ za vse $0 \leq i < j \leq n$.
Sprehod $S = u_0 \dots u_n$ je *obhod*, če je $u_0 = u_n$.
Sprehod $S = u_0 \dots u_n$ je *cikel*, če je $u_0 = u_n$, sicer pa so točke med sabo različne in je $n \geq 3$.

# Sprehod ali pot

## Lema

*Če v grafu $G = (V, E)$ obstaja $u - v$ sprehod $S$, potem v $G$ obstaja tudi $u - v$ pot.*

## Posledica (dokaza zgornje leme)

*Najkrajši $u - v$ sprehod v grafu je pot.*

# Operacije s sprehodi

*Stik* ali *konkatenacija* sprehodov $S_1 = u_0 u_1 \ldots u_k$ in $S_2 = u_k u_{k+1} \ldots u_m$ je sprehod

$$S_1 S_2 = u_0 u_1 \ldots u_k u_{k+1} \ldots u_m.$$

Velja tudi $|S_1 S_2| = |S_1| + |S_2|$.

*Obratni sprehod* sprehoda $S = u_0 u_1 \ldots u_k$ je sprehod

$$S^R = u_k \ldots u_1 u_0.$$

*Odsek* sprehoda $S = u_0 u_1 \ldots u_k$ od $u_i$ do $u_j$, kjer je $i \leq j$, je sprehod

$$S_{u_i - u_j} = u_i u_{i+1} \ldots u_j.$$

## Povezanost grafov

Graf $G$ je *povezan*, če za vsaki dve vozlišči $u, v \in V(G)$ v grafu $G$ obstaja $u - v$ sprehod .

## Povezane komponente

V množici točk grafa $G$ definirajmo relacijo $P$ z naslednjim predpisom:

$$uPv \iff \text{v } G \text{ obstaja } u - v \text{ sprehod.}$$

# Razdalja v povezanem grafu

Naj bo $G$ povezan graf. *Razdalja* med točkama $u$ in $v$ v grafu $G$, $\text{dist}(u, v)$, je dolžina najkrajše $u - v$ poti (sprehoda) v $G$.

## Trditev

*Razdalja* dist *v povezanem grafu ustreza trikotniški neenakosti, za poljubne tri točke $u, v, w$ grafa $G$ velja*

$$\text{dist}(u, w) \leq \text{dist}(u, v) + \text{dist}(v, w)$$

# Dvodelni grafi

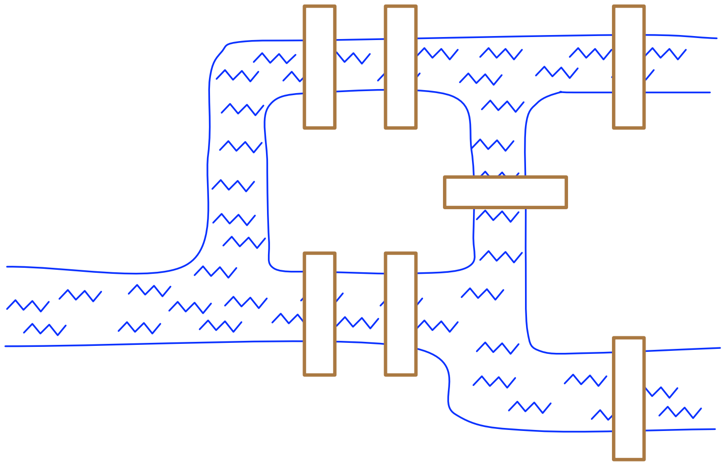
Graf $G$ je *dvodelen*, če lahko točke grafa $G$ pobarvamo z dvema barvama takó, da ima vsaka povezava krajišči različnih barv.

## Izrek

*Graf $G$ je dvodelen natanko tedaj, ko $G$ ne vsebuje ciklov lihe dolžine.*

# Eulerjev problem

Euler, 1736
Königsberg.



- *Ali obstaja obhod po mestu, ki bi prehodil vse mostove in sicer vsakega natanko enkrat?*

# Eulerjevi grafi

Sprehod v grafu $G$ je *enostaven*, če vsako povezavo *uporabi* največ enkrat.

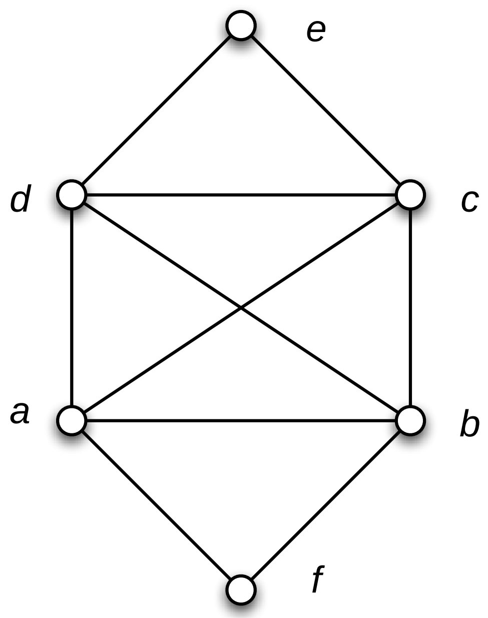
*Problem:* Ali v grafu $G$ obstaja enostaven obhod, ki vsebuje vse povezave in vse točke?

Enostaven obhod v grafu $G$, ki vsebuje vse povezave in vse točke imenujemo *Eulerjev obhod*.

Graf $G$ je *Eulerjev*, če ima kak Eulerjev obhod.

# Eulerjevi grafi

*Zgled:*




- Eulerjev obhod:

# Eulerjev izrek

## Izrek (Euler)

*Graf $G$ je Eulerjev natanko tedaj, ko je $G$ povezan in so vse njegove točke sodih stopenj.*

## Posledica

*Graf je Eulerjev natanko tedaj, ko ga lahko narišemo z eno samo potezo, ki je povrh vsega še sklenjena.*

# Drevesa in gozdovi

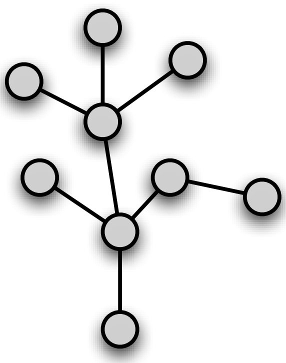
*Drevo* je povezan graf brez ciklov.
*Gozd* je graf brez ciklov.

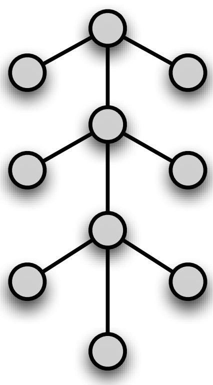
## Trditev

*G je gozd* $\iff$ *povezane komponente G so drevesa.*
*G je drevo* $\iff$ *G je povezan gozd.*

# Zgledi

Grafi $P_n$ in $K_{1,n}$ so drevesa.





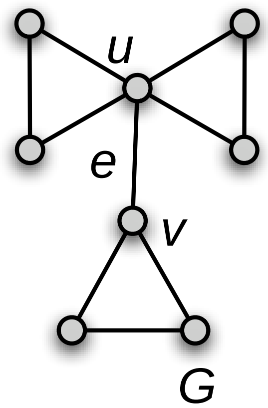
## Prerezne točke in povezave

$v \in V(G)$ je *prerezna točka* grafa $G$, če ima $G - v$ strogo več povezanih komponent kot $G$.
$e \in E(G)$ je *prerezna povezava* grafa $G$, če ima $G - e$ strogo več povezanih komponent kot $G$.

### Trditev

*$e \in E(G)$ je prerezna povezava natanko tedaj, ko $e$ ne leži na nobenem ciklu v grafu $G$.*

## Zgledi



# Lastnosti dreves

Naj bo $T$ drevo z $n$ točkami in $m$ povezavami.

1. $T$ je povezan graf.
2. $T$ je brez ciklov.
3. $m = n - 1$.
4. Vsaka povezava v $T$ je prerezna.
5. Za poljubni točki $u, v \in V(T)$ obstaja natančno ena $u - v$ pot v $T$.
6. Če drevesu $T$ dodamo katerokoli novo povezavo, vsebuje dobljeni graf natanko en cikel.

# Vpeto drevo

Naj bo $G$ graf in $H \subseteq G$. $H$ je *vpeto drevo* v $G$, če je

- $H$ vpet podgraf v $G$ in
- $H$ drevo.

## Lastnosti

### Izrek
*$G$ je povezan $\iff$ $G$ ima vsaj eno vpeto drevo.*

### Trditev
*Če je $T$ drevo in $|V(T)| \geq 2$, potem ima $T$ vsaj dva lista.*

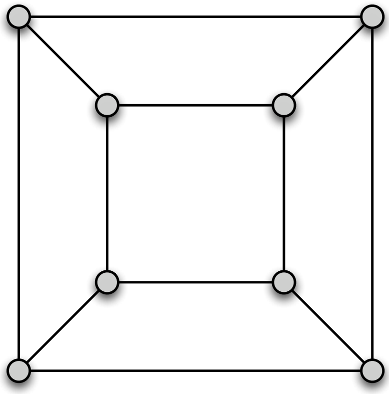
### Posledica
*Če je $G$ povezan in $|V(G)| \geq 2$, potem vsebuje $G$ vsaj dve točki, ki nista prerezni.*

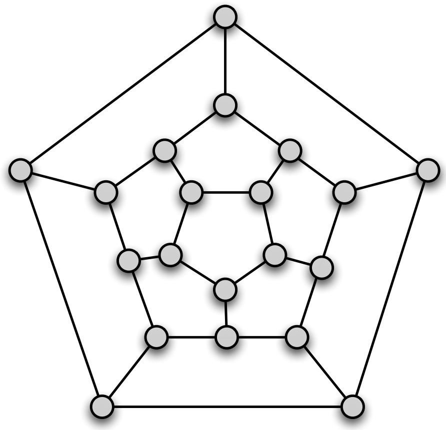
## Hamiltonovi grafi

*Cikel* v grafu $G$ je *Hamiltonov*, če vsebuje vse točke grafa $G$.

Graf $G$ je *Hamiltonov*, če vsebuje kak Hamiltonov cikel.

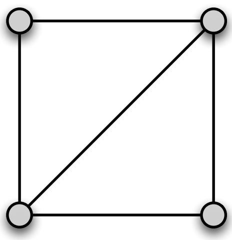
## Zgledi

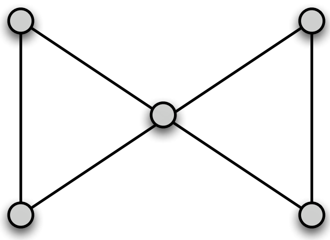




## Zgledi

Kakšna je zveza med Hamiltonovimi in Eulerjevimi grafi?





# Kako prepoznati Hamiltonove grafe

Hamiltonov problem je mnogo težji kot Eulerjev.

Ne obstaja enostavna karakterizacija Hamiltonovih grafov.

Spoznali bomo en *zadosten pogoj*, da je graf Hamiltonov in en *potreben pogoj*, da je graf Hamiltonov.

# Potrebni pogoj z razpadom grafa

## Izrek

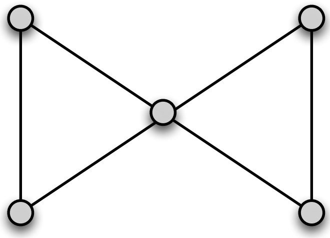
*Naj bo $G$ povezan graf. Denimo, da obstaja takšna podmnožica točk grafa $S \subseteq V(G)$ moči $|S| = k$, za katero velja, da ima*

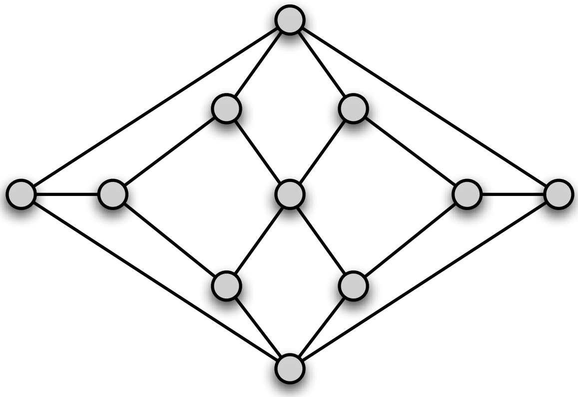
$$G - S$$

*vsaj $k + 1$ povezanih komponent. Potem $G$ ni Hamiltonov.*

*Komentar:* Pogoj, da v grafu takšna množica $S$ ne obstaja, je potreben. To pomeni, da vsak Hamiltonov graf zadošča temu pogoju. Toda če graf pogoju zadošča, to še ne pomeni, da je Hamiltonov.

## Zgledi





## Razpad v dvodelnih grafih

Potrebni pogoj z razpadom grafa ima v družini dvodelnih grafov naslednjo posledico.

### Posledica

*Naj bo $G$ dvodelen graf z barvnima razredoma $V_1$ in $V_2$.*
*($V(G) = V_1 \cup V_2$, $V_1$ je množica 'belih', $V_2$ množica 'črnih' točk.)*
*Če je $|V_1| \neq |V_2|$, potem $G$ ni Hamiltonov.*

## Diracov zadostni pogoj

### Izrek (Dirac)

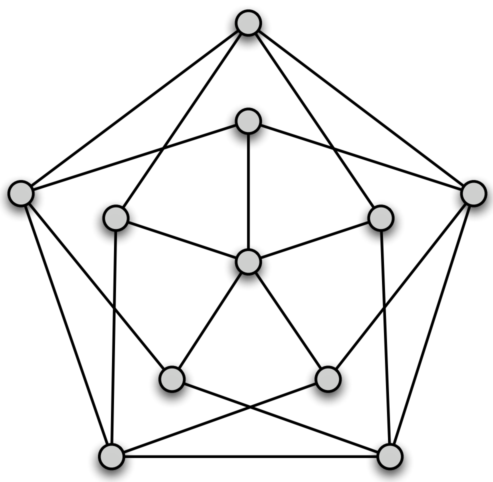
*Naj bo $G$ graf z vsaj tremi točkami* ($|V(G)| = n \geq 3$).
*Če za vsako točko*

$$v \in V(G) \text{ velja } \deg(v) \geq \frac{n}{2},$$

*potem je graf $G$ Hamiltonov.*

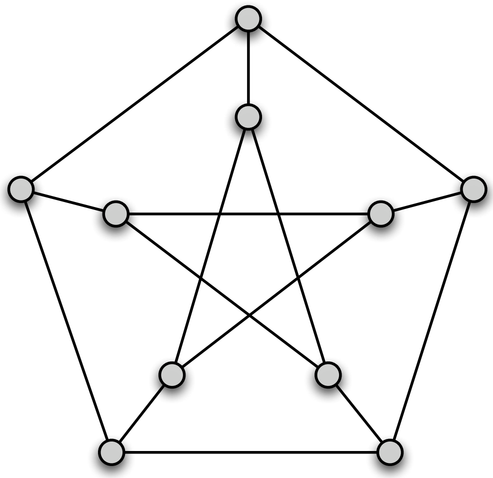
*Komentar:* Pogoj je zadosten. To pomeni, da je vsak graf, ki izpolni omenjeni pogoj tudi Hamiltonov. Ni pa res, da bi vsak Hamiltonov graf izpolnil zgornji pogoj.

## Grötzschev graf



Ali je Hamiltonov?

## Petersenov graf



Ali je Hamiltonov?

## Barvanje grafov

*k-barvanje* točk grafa $G$ je preslikava

$$c : V(G) \to \{1, 2, 3, \ldots, k\},$$

za katero velja, da je $c(u) \neq c(v)$ za vsako povezavo $uv \in E(G)$.

To pomeni, da morata biti krajišči vsake povezave različnih *barv*.

Najmanjše naravno število $k$, za katerega obstaja $k$-barvanje točk grafa $G$, imenujemo *kromatično število grafa $G$* in ga označimo s $\chi(G)$.

## Zgledi

1. $\chi(G) \leq |V(G)|$
2. $\chi(G) \leq 2 \iff G$ dvodelen
3. $\chi(K_n) = n$, $\chi(\overline{K_n}) = 1$
4. $\chi(K_{m,n}) = 2$
5. $\chi(T) = 2$, če je $T$ drevo in ima vsaj dve točki, $\chi(P_n) =$
6. $\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ sod}, \\ 3, & n \text{ lih}. \end{cases}$
7. $\chi(Q_d) = 2$, če $d \geq 1$.

## Velikost največje klike

Z $\omega(G)$ označimo velikost največjega *polnega podgrafa* v $G$.

Velja $\omega(G) \leq 2$ natanko tedaj, ko je $G$ *brez trikotnikov*.

$\Delta(G)$ označuje *največjo stopnjo* točke v grafu $G$,
z $\delta(G)$ pa označimo *najmanjšo stopnjo* točke grafa $G$.

## Barvanje točk grafa

### Izrek
$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Velja celo boljši rezultat.

### Izrek (Brooks)
*Naj bo G povezan graf. Če G ni niti lih cikel niti poln graf, potem je*

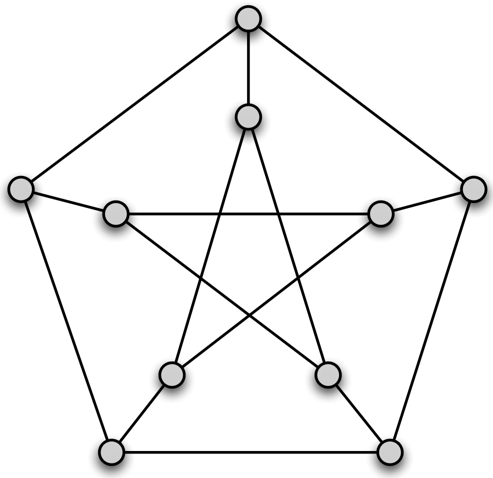
$\chi(G) \leq \Delta(G)$

## Zgled uporabe

*Problem:* Skladiščimo nevarne kemikalije $K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n$.

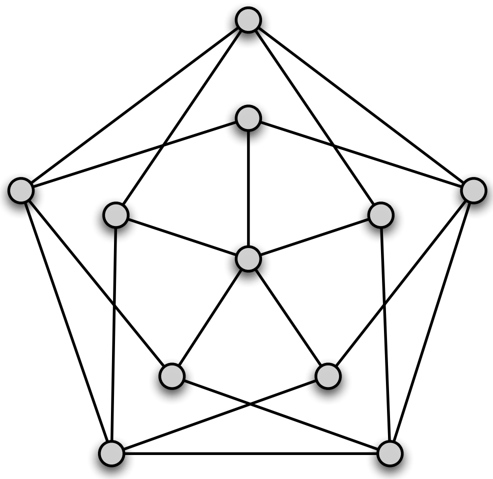
Predpisi določajo, da določenih nevarnih snov ne smemo skladiščiti skupaj. Poišči najmanjše potrebno število skladiščnih prostorov.

# Petersenov graf



Kolikšno je njegovo kromatično število?

# Grötzschev graf



Kolikšno je njegovo kromatično število?