Diskretne strukture UNI
Vaje, 13. teden

1. Dana je permutacija
$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 1 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Določi π^{-1}.

   (b) Zapiši π kot produkt disjunktnih ciklov.

   (c) Zapiši π kot produkt samih transpozicij.

   (d) Določi π^2 in π^{2022}.

2. Za $n > 3$ definiramo permutacije $\pi_n \in S_n$ kot produkt ciklov
$$\pi_n = (1 \quad 2 \quad n)(1 \quad 3 \quad n)\cdots(1 \quad n-1 \quad n).$$

   (a) Zapiši permutacije π_4, π_5 in π_6.

   (b) Izračunaj $\pi_n(1)$, $\pi_n(n)$, $\pi_n^{-1}(1)$ in $\pi_n^{-1}(n)$.

   (c) Določi ciklično strukturo in parnost permutacije π_n.

3. Dane so permutacije
$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 & 9 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \ \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 2 & 1 & 4 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix} \text{ in}$$
$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Zapiši permutacije η, θ in ξ kot produkte disjunktnih ciklov.

   (b) Kateri dve od permutacij η, θ in ξ sta konjugirani? (Permutacji α in β sta *konjugirani*, če obstaja permutacija π, da je $\alpha = \pi * \beta * \pi^{-1}$.)

   (c) Za vsaki dve konjugirani permutaciji poišči ustrezno permutacijo π.

4. Poišči vsaj dve permutaciji $\pi \in S_6$, za kateri je
$$\pi^3 = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6).$$

5. V S_{10} opazujemo permutacije, ki rešijo enačbo $\pi^{10} = \pi$.

   (a) Cikli katerih dolžin lahko nastopajo v razcepu permutacije π na produkt disjunktnih ciklov?

   (b) Pokaži, da imajo vse permutacije π, ki rešijo to enačbo, vsaj eno fiksno točko.

   (c) Poišči eno rešitev, ki ima najmanjše možno število fiksnih točk.

6. Dane so permutacije
$$\alpha = (1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 11), \ \beta = (2\ 4\ 6\ 8\ 10) \ \text{ in } \ \gamma = (1\ 9\ 5)(2\ 10\ 8\ 6\ 4)(3\ 11\ 7).$$

   (a) Pokaži, da α in β komutirata.

   (b) Pokaži, da je $\alpha^2 * \beta^2$ rešitev enačbe $\pi^2 = \gamma$.

   (c) Poišči vsaj še eno te enačbe rešitev, ki je drugačne parnosti kot $\alpha^2 * \beta^2$.

7. Naj bodo $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 7 & 2 & 9 & 10 & 8 \end{pmatrix}$, $\beta = (1\ 2)(1\ 6)(1\ 7)(1\ 3)(4\ 5)(4\ 10)(4\ 8)$ in $\gamma = (1\ 4\ 9\ 3\ 6\ 7\ 2\ 8)$ permutacije iz S_{10}.

   (a) Določi ciklične strukture in parnosti permutacij α, β ter γ.

   (b) Poišči vse dopustne ciklične strukture za permutacijo π, ki reši enačbo

$$\alpha * \beta * \pi^4 * \beta^{-1} = \gamma$$

   (c) Poišči vsaj eno rešitev zgornje enačbe, ki ima najvišji možni red.