

1. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Ali je sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rešljiv? Ali je sistem $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rešljiv? Poišči pravokotni projekciji \mathbf{b}_1 in \mathbf{b}'_1 vektorja \mathbf{b} na $C(A)$ in $C(A')$ ter zapiši vse rešitve sistemov $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ in $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'_1$.
 - (b) Zapiši matrice U , S in V , da bo USV^T singularni razcep matrice A . Pomagaj si z lastnimi vrednostmi in lastnimi vektorji matrice $A^T A$.
 - (c) Poišči Moore–Penroseov posplošeni inverz matric A in A' ter izračunaj $A^+\mathbf{b}$ in $A'^+\mathbf{b}$. Komentiraj rezultat.
 - (d) Reši nalogo še v octave-u ali Matlab-u, uporabi ukaza `svd(A)` in `pinv(A)`.
2. **SVD in kompresija slik.** Sivinsko sliko lahko predstavimo z matrico A . (Barvno pa s tremi matrikami, recimo A_R , A_G in A_B .) Iz matrik U , S in V SVD razcepa potem A rekonstruiramo kot USV^T . Lahko se pa odločimo, da 'majhne' singularne vrednosti niso bistvene in jih postavimo na 0. Vsako singularno vrednost σ_i torej zamenjamo s $\sigma'_i = 0$, če je $\sigma_i < \sigma$, sicer pustimo $\sigma'_i = \sigma_i$. Naj bo S' matrika, ki ima σ'_i na diagonalni. Potem je $A' = US'V^T$ 'približek' za našo začetno sliko A .
- (a) Prenesi sliko `lena512.mat` s spletne učilnice in jo naloži v octave/Matlab: `A = imread("lena512.mat")`. Za izris slike lahko uporabiš `imshow(A)`.
 - (b) Poišči SVD razcep matrice A .
 - (c) Poišči približke A' za A tako, da uporabiš le 10, 20, 50, 100 največjih singularnih vrednosti matrice A , in izriši pripadajoče slike. Oceni kvaliteto približkov vizualno.
 - (d) Kolikšno količino podatkov moramo dejansko shraniti za vsakega od približkov?